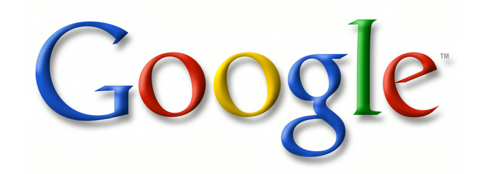
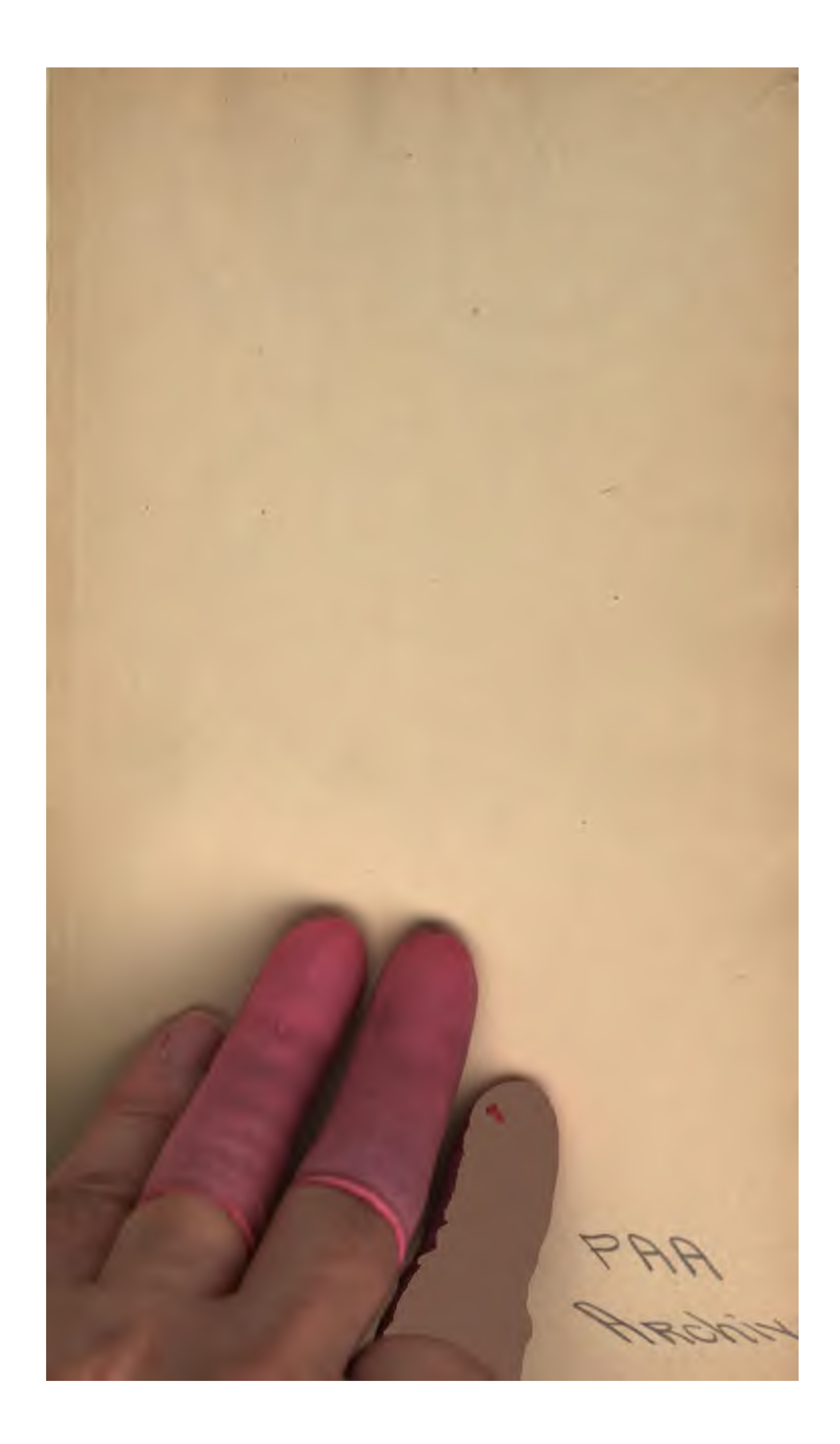
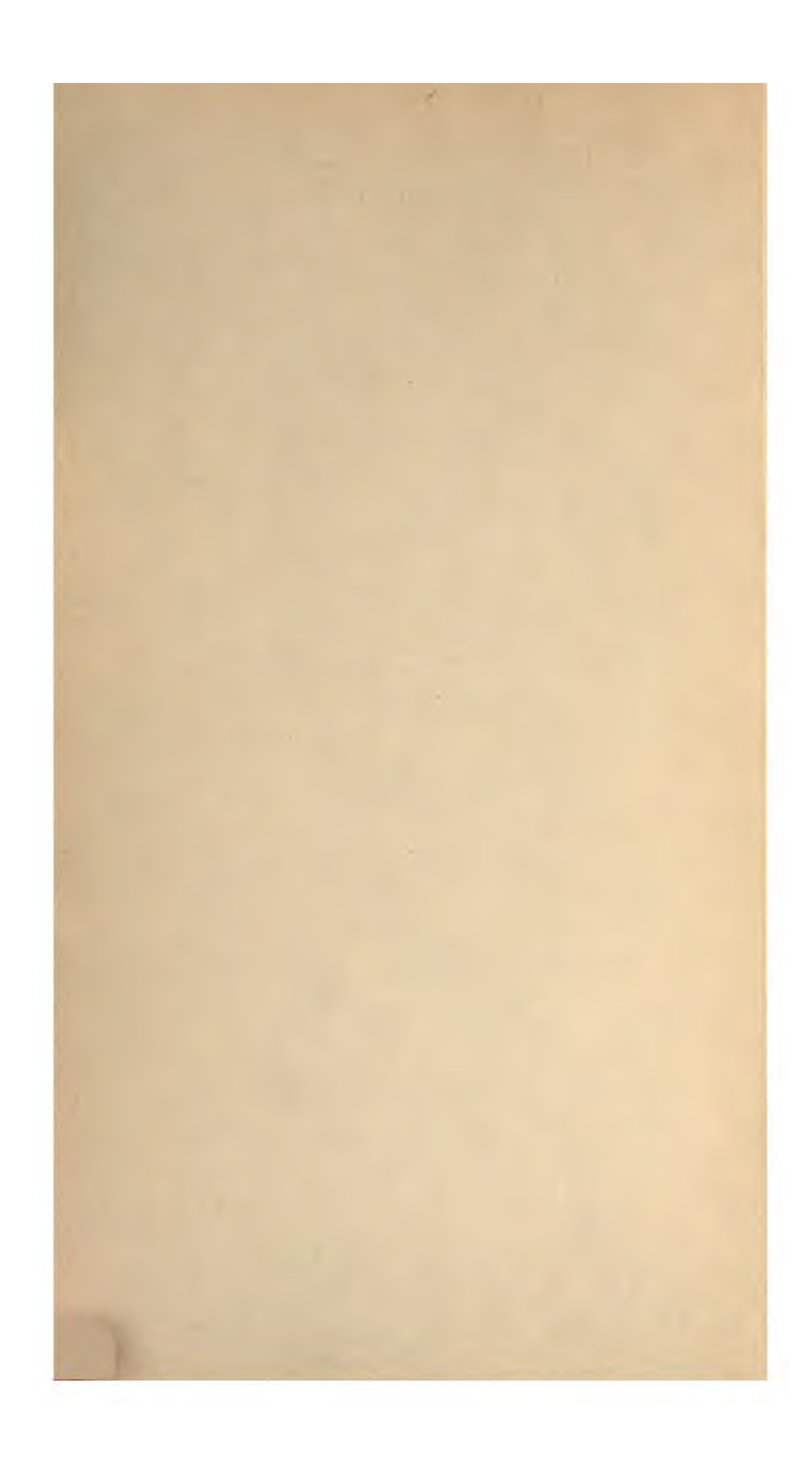


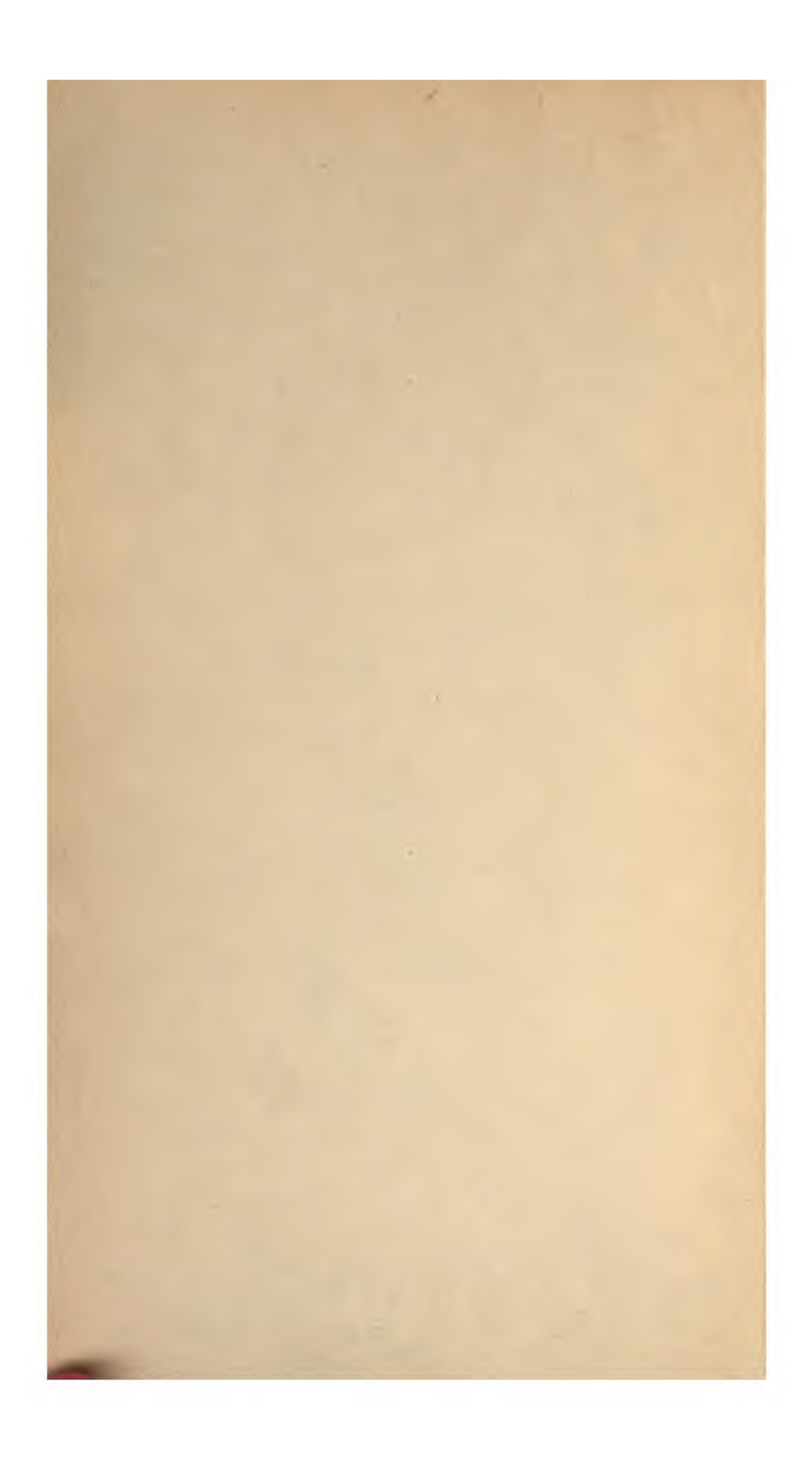



PAA
Archiv



















Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Neunundzwanzigster Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1857.

Inhaltsverzeichniss des neunundzwanzigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Mechanik.

Astronomie.

Physik.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XVI.

Arithmetik.

B. **Féaux**, Buchstabenrechnung und Algebra nebst Uebungsaufgaben. gr. 8°. geh. Paderborn. $17\frac{1}{2}$ Ngr.

J. **Heger**, Auflösungsmethode für algebraische Buchstabengleichungen mit einer einzigen unabhängigen Buchstabengrösse. gr. 4°. Wien. geh. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

R. G. **Hering**, Sammlung von Aufgaben aus der höheren Arithmetik. 3. Hft. 2. Aufl. gr. 8°. Leipzig u. Magdeburg. $\frac{1}{6}$ Thlr.

C. **Mühlpfordt**, Arithmetisches Uebungsbuch. Aufgaben nebst Auflösungen zur Beförderung eines wahrhaft bildenden Ziffer- und Denkrechnens. br. gr. 8°. Halle. 10 Ngr.

A. **Steinberger**, Tafel der gemeinen oder Briggschen Logarithmen aller Zahlen von 1—1,000,000 mit 7 Decimalstellen. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Regensburg. 10 Ngr.

Tables des Logarithmes, contenant les logarithmes des nombres de 1 à 108,000, les logarithmes des sinus et tangentes de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés, et de dix en dix secondes pour tous les degrés du quart de cercle, par **Franç. Callet**, suivies d'un Revueil de tables nautiques, par M. M. les professeurs à l'Ecole navale impériale de Brest, **E. Boitard**, ancien élève de l'Ecole polytechnique, professeur d'hydrographie, et **Ansart-Deusy**, lieutenant de vaisseau. Paris. 4 Thlr.

J. **Witt**, Aufgaben aus der wichtigen Lehre von den pythagorischen Zahlen. Fortsetzung. Lex. 8°. geh. Itzehoe. 10 Ngr.

Geometrie.

B. **Féaux**, Ebene Geometrie und elementare Stereometrie. gr. 8°. geh. Paderborn. $17\frac{1}{2}$ Ngr.

N. **Fialkowski**, Taschen-Modelle zum Behufe des leichtern Studiums der darstellenden Geometrie mit Inbegriff der Schatten-Construction und Perspective. gr. 8°. geh. Wien. 16 Ngr.

Optik.

A. **Weiss**, Die Elemente der analytischen Dioptrik. 4°. geh. Nürnberg. 1 Thlr. 10 Ngr.

Astronomie.

Annalen der königl. Sternwarte bei München. Herausgegeben von J. Lamont. 9. Bd. (Der vollständigen Sammlung 24. Bd.) gr. 8°. geh. München. $1^{2}/_{3}$ Thlr.

Handatlas der Erde und des Himmels in 70 Lief. Neu red. Ausg. 15. 16. Lfr. qu. Imp.-Fol. Weimar. à 10 Ngr.

E. Wetzel, Allgemeine Himmelskunde. Ein Handbuch für Lehrer und zum Selbstunterricht. Lex. 8°. geh. Berlin. $2^{1}/_{3}$ Thlr.

Nautik.

Cours complet d'études mathématiques. Par Levret ainé, Tm. I.: Arithmétique. 15 Ngr. Tm. II.: Géométrie. 1 Thlr. 15 Ngr. Tm. III.: Navigation. 1 Thlr. $22^{1}/_{2}$ Ngr. Tm. IV.: Cours d'études nautiques à l'usage des officiers de la marine marchande et de maîtres au cabotage. Paris. 2 Thlr.

Glossaire nautique. Répertoire polyglotte des termes de marine anciens et modernes par M. A. Jal. 1 énorme volume grand in 4°, avec des gravures dans le texte. Paris. 16 Thlr.

H. Metger, Nautische Geographie. I. Thl.: Mathematisch-astronomische Geographie. gr. 8°. geh. Hannover. $^{1}/_{3}$ Thlr.

Physik.

H. W. Dove, Klimatologische Beiträge. I. gr. 8°. geh. Berlin. $1^{2}/_{3}$ Thlr.

H. W. Dove, Ueber das Gesetz der Stürme. gr. 8°. geh. Berlin. $^{2}/_{3}$ Thlr.

J. F. Encke, Ueber die magnetische Deklination in Berlin. gr. 4°. geh. Berlin. $^{1}/_{3}$ Thlr.

G. Hagen, Ueber Fluth und Ebbe in der Ostsee. gr. 4°. geh. Berlin. 8 Ngr.

W. G. Hankel, Elektrische Untersuchungen. 2. Abhdl.: Ueber d. thermoelektr. Eigenschaften d. Boracites. h. 4. geh. Leipz. 24 Ngr.

L. F. Kaemtz, Cours complet de météorologie. Traduit et annoté par Ch. Martins. Avec un appendice contenant la représentation graphique des tableaux numériques, par L. Lalanne. In 18 jésus. 5 pl. Paris.

T. Laurent de Jussieu, Simples notions de physique et d'histoire naturelle. In 12. Paris.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen, mathemat., der königl. Akademie der Wissensch. zu Berlin. Aus dem Jahre 1856. gr. 4°. geh. Berlin. 16 Ngr.

Abhandlungen, physikalische, der königl. Akademie der Wisschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1856. gr. 4°. geh. Berlin. 7 Thlr.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissensch. Mathemat.-naturwissenschaftl. Classe. 13. Bd. gr. 4°. geh. Wien. 11 Thlr.

I.

Integration der Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit zwei Veränderlichen.

Von

Herrn Doctor *August Weiler*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Vorwort.

Die Integration der Differentialgleichungen bietet der Forschung eine grosse Mannigfaltigkeit von Aufgaben. Wenn der Versuch gelingen soll, die hier vorkommenden Lehren in den durch die Natur der Sache begründeten Zusammenhang zu bringen, so kommt es vor Allem darauf an, den passenden Eintheilungsgrund festzustellen. Es handelt sich nämlich darum, alles dasjenige, was auf einem und demselben Wege erzielt wird, unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen; zugleich aber diejenigen Lehren, welche wesentlich von einander abweichen, so aufzustellen und anzuordnen, dass jede von ihnen als eine Erweiterung oder Vervollständigung einer der vorausgehenden Lehren betrachtet werden kann. Es lassen sich gewisse Eigenschaften der Differentialgleichungen angeben, wonach man sich bei der Aufstellung und Anordnung der einzelnen Lehren zu richten hat, damit die genannte Absicht erreicht werde; und diese Eigenschaften zusammengenommen enthalten Dasjenige, was man unter dem passenden Eintheilungsgrunde versteht. Die Feststellung dieses Eintheilungsgrundes ist aber eine anerkannt schwierige Sache. Nur durch die sorgfältigste Vergleichung aller Hülfsmittel, welche man bei der Lösung der hier vorkommenden Aufgaben benutzt, kann man dazu gelangen. In dem Maasse als die bekannten Hülfsmittel noch mangelhaft sind, und in der Lösung der allgemeinen Aufgabe Lücken zurücklassen, wird man auch über die Wahl des Eintheilungsgrundes in Zweifel sein. Man wird fragen, welche von den bekannten Lehren einer Erweiterung bedürfe, um die noch vorhandene Lücke auszufüllen, man wird fragen, wie diese Lehre selbst umgestaltet oder deren Stellung zu den andern Lehren verändert werden müsse, damit eine solche Erweiterung möglich werde. Man kann wohl sagen, dass die Einigung über den zu

befolgenden Eintheilungsgrund erst dann möglich ist, wenn die Lösung des allgemeinen Problems nach ihren Hauptrichtungen vollendet ist.

Da ich mich während einer Reihe von Jahren mit der Integration der Differentialgleichungen beschäftigt habe, so bin ich zu mancherlei Vortheilen gelangt, welche einerseits nicht unbedeutende Erweiterungen der bisherigen Lehren enthalten, andererseits fast durchgehends mehr oder weniger erhebliche Aenderungen herbeigeführt haben. Ich sehe mich desshalb nur dann in den Stand gesetzt, meine Resultate über den genannten Gegenstand in ihrer wahren Bedeutung aus einander zu setzen, wenn ich es unternehme, die ganze Lehre im Zusammenhang zu entwickeln. Dies glaube ich passend in den gegenwärtigen Blättern nach und nach zur Ausführung zu bringen, indem ich nicht annehmen darf, dass ich eine fertige Arbeit liefern werde, sondern weiteren Untersuchungen die Entscheidung überlassen muss, in wie fern ich mich in meinen Darstellungen der Wahrheit genähert habe, oder von ihr abgewichen bin. Zunächst möchte ich in diesem Vorwort den Versuch machen, die Hauptgedanken, welche nach meiner Auffassung Einheit und Ordnung in die ganze Lehre zu bringen geeignet sind, und mir desshalb bei allen Untersuchungen zur Richtschnur dienen sollen, in einigen kurzen Zügen anzugeben.

Schon Euler, welcher zuerst die gesammte Lehre von der Integration der Differentialgleichungen einer strengen Prüfung unterwarf, entschied sich dafür, dass die Anzahl der Veränderlichen als Eintheilungsgrund gelten solle. Alle Lehren, welche den Zweck haben, eine veränderliche Grösse als Funktion einer zweiten Veränderlichen zu bestimmen, gleichgültig, ob die vorliegende Differentialgleichung der ersten, der zweiten oder dritten Ordnung angehört, sollten demnach denjenigen Untersuchungen vorausgeschickt werden, welche sich mit der Bestimmung einer veränderlichen Grösse als Funktion zweier weiteren Veränderlichen beschäftigen. Ebenso, wie also die Integration der Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen der Integration der Differentialgleichungen mit drei Veränderlichen, so sollte auch die letztere wieder der Integration der Differentialgleichungen mit vier Veränderlichen vorausgehen. Dieser Anordnung liegt ein höchst einfacher Gedanke zum Grunde, welcher bis dahin jederzeit seine unbedingte Brauchbarkeit bewährt hat. Jede Differentialgleichung mit irgend einer Anzahl Veränderlichen soll nämlich jedesmal auf eine Differentialgleichung mit einer geringeren Anzahl Veränderlichen zurückgeführt werden, so dass also die ganze Mannigfaltigkeit der Aufgaben, welche die Integration der Differentialgleichungen in sich begreift, zuletzt immer nur auf die Integration der Funktionen

einer einzigen Veränderlichen oder auf die sogenannte Quadratur zurückführt.

Da nun der äusserste Punkt bezeichnet ist, auf welchen alle Untersuchungen der Integralrechnung hinzielen, und da sich so ein sehr einfaches Kennzeichen für die Stellung der verschiedenen Differentialgleichungen zu einander bei der Lösung der allgemeinen Aufgabe ergeben hat, handelt es sich um einen weiteren Eintheilungsgrund für diejenigen Differentialgleichungen jedesmal, worin gleich viel Veränderliche vorkommen. Denn die Mannigfaltigkeit der zur Integration führenden Regeln ist auch hier noch sehr gross. Bei der Feststellung dieses weiteren Eintheilungsgrundes darf aber nicht die Ordnung der Differentialgleichung als maassgebend angesehen werden. Denn wenn auch in vielen Fällen die Integration einer Differentialgleichung von höherer Ordnung am vortheilhaftesten dadurch ausgeführt wird, dass man dieselbe auf eine Differentialgleichung von niederer Ordnung zurückführt, so giebt es doch auch wieder andere Fälle, in welchen die Integration wesentlich dadurch vereinfacht wird, dass man nicht auf eine Differentialgleichung von niederer Ordnung übergeht, sondern dass man sogleich das endliche Verhalten zwischen den Veränderlichen darstellt. Unter den Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen, welche diese Eigenthümlichkeit zeigen, mögen hier vor Allem die linearen Differentialgleichungen zu erwähnen sein. In andern Fällen endlich ist ein solcher Uebergang auf eine Differentialgleichung von niederer Ordnung sogar geradezu Sache der Unmöglichkeit. Dies zeigt sich ganz gewöhnlich, wenn eine partielle Differentialgleichung von der zweiten oder von noch höherer Ordnung mit drei oder mehr Veränderlichen vorliegt. Der Eintheilungsgrund für die Differentialgleichungen von gleicher Anzahl von Veränderlichen liegt mehr versteckt. Es lässt sich dafür kein so auf der Stelle sichtbares Merkmal an den Differentialgleichungen auffinden, wie etwa die Anzahl der Veränderlichen oder die Ordnung der Differentialgleichung. Doch hat man in dieser Angelegenheit seit Euler einen entschiedenen Fortschritt gemacht. Man ist nämlich schon lange übereingekommen, die Integration der linearen Differentialgleichungen, oder derjenigen Differentialgleichungen, worin die abhängige Veränderliche nur auf dem ersten Grade vorkommt, von der Integration der übrigen Differentialgleichungen zu trennen, während Euler diese Unterscheidung noch nicht gemacht hat. Man könnte erwarten, dass alle diejenigen Differentialgleichungen, welche in ihrer Form eine auffallende Uebereinstimmung zeigen, jedesmal auch nach ähnlichen Regeln sich integriren lassen. Dies trifft aber nicht immer zu. Zwar besitzen alle diejenigen Differentialgleichungen, welche

sich nach derselben Regel integriren lassen, auch eine gemeinsame Eigenschaft. Allein diese Eigenschaft kommt nicht immer deutlich durch die Form der Differentialgleichung zum Vorschein, und wird durch andere unwesentliche Momente oftmals so sehr zurückgedrängt, dass nur eine genaue Untersuchung jene Eigenschaft erkennen lässt. Die linearen Differentialgleichungen, welche jetzt allgemein von den übrigen Differentialgleichungen getrennt untersucht werden, besitzen ein sogleich in die Augen fallendes Kennzeichen, nämlich diejenige Form, der sie ihren Beinamen linear verdanken. Allein es giebt noch andere Gruppen von Differentialgleichungen, welche ganz mit demselben Recht von einander getrennt werden, wiewohl man einer vorliegenden Differentialgleichung nicht auf der Stelle ansieht, ob sie der einen oder der anderen Gruppe angehört. Der Grund zu dieser Trennung der Differentialgleichungen in einzelne Gruppen ist aber kein anderer, als die eigenthümliche Gestalt des allgemeinen Integrals dieser Differentialgleichungen. Jedes Integrationsverfahren geht nämlich von einer gewissen Voraussetzung aus in Bezug auf das Vorkommen der willkührlichen Beständigen oder der willkührlichen Funktionen des allgemeinen Integrals. Man bildet aus dieser Integralform die Differentialgleichung, und vergleicht dieselbe mit einer vorliegenden von ähnlicher Form. Das Resultat dieser Vergleichung besteht in mehreren Beziehungen, welche das Mittel an die Hand geben, die Integration zu bewerkstelligen. Ueberall da, wo dieselbe Voraussetzung gemacht werden kann in Bezug auf die Integralform, führt auch ein gemeinsamer Weg zum Ziel. Da sich nun gezeigt hat, dass man, um die mannigfaltigen hier vorkommenden Aufgaben zu lösen, auch von verschiedenen Voraussetzungen in Bezug auf das Vorkommen der willkührlichen Beständigen oder willkührlichen Funktionen des allgemeinen Integrals ausgehen muss, so ergeben sich hierdurch nothwendigerweise ebenso viele Abtheilungen unter den Differentialgleichungen. Dabei hat sich noch herausgestellt, dass oftmals auch solche Differentialgleichungen, welche auf den ersten Anblick eine grosse Uebereinstimmung zeigen, doch in ganz verschiedene Gruppen eingereiht werden müssen. Die einzelnen Gruppen selbst lässt man in einer bestimmten Ordnung auf einander folgen, so wie sich eben die denselben zum Grunde liegenden Integralformen einander unterordnen.

Das Integrationsverfahren zeigt für diejenigen Gruppen von Differentialgleichungen, deren Trennung sich auf die verschiedene Form des allgemeinen Integrals gründet, so auffallende Unterschiede, dass man der Integralform als Eintheilungsgrund mit vollem Recht sogar den Vorrang zugesteht vor der Anzahl der Veränderlichen in der Differentialgleichung. Dies widerstreitet keineswegs dem

eben gegebenen allgemeinen Ausspruche, dass die ganze Lehre von der Integration der Differentialgleichungen auf eine allmählige Verminderung der Veränderlichen hinweise, so dass also alle Differentialgleichungen mit der gleichen Anzahl Veränderlichen zusammenzustellen seien. Denn dieser Grundsatz kann eben so gut in den engeren Grenzen einer durch die Natur des allgemeinen Integrals bedingten Abtheilung streng beibehalten werden. Man erreicht aber so andererseits den wesentlichen Vortheil, dass alle gleichartigen Untersuchungen zusammen kommen, und der innere Zusammenhang der ganzen Lehre in deren einzelnen Theilen seinen Ausdruck erhält.

Auch die Ordnung der Differentialgleichung ist als Eintheilungsgrund von Bedeutung. Denn alle diejenigen Differentialgleichungen, welche einerlei Integralform, und zugleich dieselbe Anzahl Veränderlichen haben, werden am natürlichsten so an einander gereiht, wie es deren Ordnung vorschreibt. Wenn man also im Ganzen die drei bis dahin erwähnten Momente, nämlich die Anzahl der Veränderlichen, die Integralform und die Ordnung der Differentialgleichung als Eintheilungsgrund für die Lehre von der Integration der Differentialgleichungen gelten lässt, so wird unter diesen die Ordnung der Differentialgleichung die untergeordnetste Stelle einnehmen, während die Natur der Integralform den ersten und wichtigsten Einfluss erhält.

Meine erste Abhandlung, welche in dem 51sten Bande des Crelle'schen Journals erschienen ist, enthält die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei, drei und mehr Veränderlichen. In der vorliegenden Abhandlung habe ich mir die Aufgabe gestellt, die allgemeine Differentialgleichung erster und zweiter Ordnung mit zwei Veränderlichen zu integriren. Wenn auch die Integration solcher Differentialgleichungen als der zunächst liegende und zugleich einfachste Theil der allgemeinen Aufgabe am frühesten zu einer gewissen Reife gekommen ist, so muss doch zugestanden werden, dass in den bisher vorgetragenen Lehren der innere Zusammenhang sehr vermisst wird. Dieselben erscheinen zum grossen Theil unabhängig von einander, und gewähren dem Leser keineswegs diejenige Befriedigung, welche demselben jedesmal dann zu Theil wird, wenn die gemeinsame Quelle verschiedener Ergebnisse deutlich hervortritt, und demselben eine ungefähre Uebersicht gestattet, in welchem Maasse diese gemeinsame Quelle durch die bekannten Ergebnisse erschöpft ist. Da ich eine solche Darstellung der genannten spezielleren Aufgabe in der vorliegenden Schrift zu leisten beabsichtige, so will ich, um in der Folge besser verstanden zu werden, dies Vorwort

damit beschliessen, eine Vergleichung anzustellen zwischen der bisherigen von Euler fast ausschliesslich benutzten Methode, die einzelnen Lehren aufzustellen und anzuordnen, und derjenigen, von welcher ich glaube, dass sie weit mehr geeignet sei, die einheitliche Darstellung des Ganzen zu begründen.

Wenn eine Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen ein vollständiges Differential ist, oder wenn dieselbe in der vorliegenden Form durch Differentiation aus ihrem allgemeinen Integral abgeleitet werden kann, so hat die Integration bekanntlich keine Schwierigkeit, welcher Ordnung die Differentialgleichung auch angehören mag, da man dann jedesmal nach einer bestimmt vorgeschriebenen Regel das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung durch Quadraturen darstellt. Wenn eine Differentialgleichung kein vollständiges Differential ist, so kann man dieselbe jedesmal in ein solches umwandeln, wenn man sie mit einem geeigneten Faktor multiplicirt. Diese Umwandlung in ein vollständiges Differential oder die Bestimmung des integrirenden Faktors macht aber die eigentliche Schwierigkeit der vorliegenden Aufgabe aus. Es giebt nämlich kein Verfahren, welches den integrirenden Faktor der allgemeinen Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$Zdz + Ydy = 0,$$

worin Z und Y irgend Funktionen der beiden Veränderlichen z und y vorstellen, oder der allgemeinen Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$Zd^2z + Ydy^2 = 0,$$

worin Z und Y irgend Funktionen von z und y und des Differentialquotienten der ersten Ordnung $\frac{dz}{dy}$ sind, durch eine bestimmt vorgeschriebene Entwickelung erzielt. Ebenso wenig ginge es an, wollte man jene beiden allgemeinen Differentialgleichungen in gewisse Gruppen zertheilen, für jede dieser Gruppen ein bestimmtes Integrationsverfahren zu geben. Alle Regeln, welche sich in der genannten Absicht aufstellen lassen, wie viele es deren auch sein mögen, reichen immer nur bedingungsweise aus; oder es lassen sich immer wieder solche Differentialgleichungen angeben, welche durch keine jener Regeln integrirt werden können. Desshalb lassen sich dann auch diejenigen Regeln, wodurch der integrirende Faktor jedesmal am vortheilhaftesten bestimmt wird, nicht aus einigen wenigen Beispielen ableiten, für welche diese Bestimmung gelungen ist. Diese Regeln müssen vielmehr, wenn sie dem jedesmaligen Entwickelungszustand der Analysis angemessen sein

sollen, das Resultat der Vergleichung aller bekannten Lösungen enthalten. Dieselben müssen so aufgestellt sein, dass sie möglichst allgemein sind, oder auf möglichst viele Differentialgleichungen ihre Anwendung finden; zugleich aber muss ihrer Allgemeinheit eine solche Grenze gesteckt sein, dass die darauf gegründete Rechnung nicht wesentlich mehr vereinfacht werden könnte, wollte man sich dabei auf engere Grenzen beschränken.

In diesem Sinne hat man nun zwar die Aufgabe schon seit Euler aufgefasst. In dem Weiteren aber hat man, glaube ich, eine falsche Richtung eingeschlagen. Man war nämlich bemüht, alle Regeln, wonach man den integrirenden Faktor bestimmt, an gewisse Bedingungen zu knüpfen, welche sich auf die besondere Form der Differentialgleichungen

$$Zdz + Ydy = 0 \quad \text{und} \quad Zd^2z + Ydy^2 = 0$$

beziehen, so dass die Brauchbarkeit dieser Regeln entweder sogleich in die Augen fällt; oder doch noch vor deren Anwendung durch eine bestimmt vorgeschriebene Untersuchung erkannt wird. Um hier ein Beispiel der Art anzuführen, brauche ich nur daran zu erinnern, wie man den integrirenden Faktor der sogenannten homogenen Differentialgleichungen der ersten und zweiten Ordnung bestimmt. Die Bedingung, unter welcher der integrirende Faktor aufgefunden wird, ist hier gerade diejenige Eigenschaft der Differentialgleichung, welcher sie ihren Beinamen homogen verdankt. An solche Merkmale suchte man also die Regeln zur Bestimmung des integrirenden Faktors anzuknüpfen. Doch nur wenige dieser Regeln finden eine allgemeinere Anwendung; und es zeigte sich bald, dass man zu einer Unzahl von Unterscheidungen Zuflucht nehmen müsste, wollte man auf diese Weise auch nur diejenigen Fälle erschöpfen, in welchen die Integration bereits gelungen ist. Nach Euler, welcher sich vorzugsweise dieser Methode bedient hat, konnte man es desshalb weder erfolgreich noch auch sonst wünschenswerth finden, dass weitere Versuche der Art gemacht würden. Das Fehlerhafte der befolgten Methode besteht aber, glaube ich, darin, dass man die Bedingungen für den Erfolg als einen Bestandtheil der Regel selbst aufgenommen hat. Jene unzähligen Unterscheidungen werden dadurch herbeigeführt, dass man bei der Bildung und genaueren Begrenzung der einzelnen Regeln nicht allein das jedesmal einzuschlagende Rechnungsverfahren entscheiden lässt, sondern auch der Beschaffenheit derjenigen Bedingungen, unter welchen dies Verfahren zum Ziel führt, einen Einfluss zugesteht. Nimmt man keine Rücksicht auf diese Bedingungen, so lässt sich das Gemeinsame in der Lösung der

verschiedenen Aufgaben viel allgemeiner aussprechen als in dem anderen Falle. Indem ich mich damit begnüge, dass die Brauchbarkeit allein durch den Erfolg der Rechnung sich herausstelle, bin ich in den Stand gesetzt, einige wenige und allgemeine Regeln aufzustellen, wodurch man alle mir bekannten Lösungen erzielt. Jede dieser Regeln liefert also in der Anwendung auf eine vorliegende Differentialgleichung entweder das allgemeine Integral, oder sie führt zu der Ueberzeugung, dass sie in dem vorliegenden Falle nicht angewendet werden darf. Ich habe es zugleich für unerlässlich gehalten, eine ebenso reichaltige als sorgfältige Auswahl von Beispielen zu geben, weil gerade hier nur die genaue Untersuchung und Vergleichung von einzelnen Lösungen dem Leser die Möglichkeit verschafft, den Werth der zu benutzenden Regeln gehörig zu beurtheilen.

Eines der vorzüglichsten Hülfsmittel bei der Aufstellung allgemeiner gültigen Integrationsregeln, welche sich unabhängig halten von den Bedingungen, unter welchen dieselben zum Ziel führen, liegt in der Benutzung der besonderen Integrale und der besonderen Auflösungen der Differentialgleichungen. Man wird sich in der That überzeugen, dass die grosse Mehrzahl dieser Integrationsregeln vorerst darauf Rücksicht nimmt, wie man zur Kenntniss solcher besonderen Integrale und besonderen Auflösungen gelangen kann. Der weitere Zweck dieser Regeln aber, welcher sich bestimmter verfolgen lässt, und desshalb einen wesentlicheren Bestandtheil der Untersuchungen ausmacht, besteht darin, zu zeigen, wie man die besonderen Integrale und die besonderen Auflösungen zu benutzen hat, um das allgemeine Integral zusammenzusetzen. Wenn auch jenes Hülfsmittel schon sehr bald nach dem Entstehen der Integralrechnung bei der Lösung einzelner Aufgaben in Anwendung kam, so gehören doch diejenigen Bemühungen, welche demselben einen grösseren Einfluss zu verschaffen suchen, einer späteren Zeit an. Dies Ziel ist auch jetzt noch nicht in dem Maasse erreicht, als es der Gegenstand verdient, und die Untersuchungen, welche die erwähnte Richtung eingeschlagen haben, sind nur wenig zahlreich. Schon d'Alembert hat gezeigt, wie man das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dy^2}+Y\frac{dz}{dy}+Y_1z=0,$$

worin Y und Y_1 beliebige Funktionen von y vorstellen, aus zwei besonderen Integralen dieser Differentialgleichung zusammensetzt. Was aber die Integration der nicht linearen Differentialgleichungen

betrifft, so scheint man sich eher bemüht zu haben, die Benutzung der besonderen Integrale und besonderen Auflösungen dabei fern zu halten. Erst nach Euler beschäftigte sich Trembley mit der Aufgabe, bei der Bestimmung des integrirenden Faktors der Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy = 0$$

die besonderen Integrale und besonderen Auflösungen zu benutzen. Man kann darüber nachlesen in Lacroix, Tome II. pag. 405. Einen ausgedehnteren Gebrauch hat eine neuere Arbeit davon gemacht, welche sich in dem 40. Bande des Crelle'schen Journals vorfindet. Dort zeigt nämlich Herr Professor Minding in seiner Abhandlung „Bemerkungen über Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen" an einer Reihe bemerkenswerther Beispiele den wesentlichen Gewinn, welchen die Kenntniss der besonderen Integrale bei der Trennung der Veränderlichen und bei der Bestimmung des integrirenden Faktors leistet.

Wenn auch dies Vorwort mehr für den Sachkundigen bestimmt ist, so möchte ich doch in dem Folgenden auch den übrigen Lesern, welche mit den bisherigen Arbeiten weniger vertraut sind, nicht unverständlich sein. Desshalb liess ich meine Abhandlung mit einem kurzen Abschnitte beginnen, welcher von den ersten Begriffsbestimmungen ausgehend den Gegenstand der allgemeineren Aufgabe, womit sich die Integration der Differentialgleichungen überhaupt beschäftigt, nach seinen Hauptbestandtheilen in's Auge fasst. Was aber den Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen betrifft, so habe ich denselben auf die folgende Weise vertheilt. In einem zweiten Abschnitte wird die Form des allgemeinen Integrals für die Differentialgleichung der ersten Ordnung $Zdz + Ydy = 0$ aufgestellt, wenn Z und Y irgend Funktionen der Veränderlichen z und y sind. Ausserdem werden die besonderen Integrale und die besonderen Auflösungen dieser Differentialgleichung bestimmt. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Bestimmung des integrirenden Faktors durch Trennung der Veränderlichen. Der vierte Abschnitt bestimmt den integrirenden Faktor als gemischte Funktion der beiden Veränderlichen z und y. In dem fünften Abschnitte wird die Form des allgemeinen Integrals für die Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$Zd^2z + Ydy^2 = 0$$

aufgestellt, wenn Z und Y irgend Funktionen von z, y und $\frac{dz}{dy}$ sind. Ausserdem werden die besonderen Integrale und be-

sonderen Auflösungen dieser Differentialgleichung bestimmt. Der sechste Abschnitt führt die Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$Zd^2z + Ydy^2 = 0$$

zurück auf eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen. Der siebente Abschnitt endlich bestimmt den integrirenden Faktor für den Fall, dass derselbe irgend eine Funktion der drei Veränderlichen z, y und $\frac{dz}{dy}$ ist.

I. Zerlegung der allgemeinen Aufgabe in ihre Hauptbestandtheile.

Jede Gleichung, welche eine Abhängigkeit zwischen mehreren Grössen und deren Differentialen ausdrückt, heisst Differentialgleichung. Im Gegensatz damit spricht man von einer endlichen Gleichung, wenn dieselbe von Differentialen frei ist. Diejenigen Grössen, deren Differentiale in der Gleichung vorkommen, heissen die Veränderlichen; dagegen wird jede andere Grösse eine Beständige genannt. Die höchste Ordnung der vorkommenden Differentiale bestimmt die Ordnung der Differentialgleichung. Demnach hat man eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, wenn nur Differentiale der ersten Ordnung vorkommen. Die Differentialgleichung heisst eine der zweiten Ordnung, wenn sie Differentiale der zweiten Ordnung enthält. u. s. w.

Wie auch immer die Differentiale in einer Gleichung vorkommen mögen, so kann dieselbe doch jedesmal auf Differentialgleichungen zurückgeführt werden, worin ausser den Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dy}, \quad \frac{dz}{dx} \cdots \frac{d^2z}{dy^2}, \quad \frac{d^2z}{dydx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} \cdots$$

keine Differentiale mehr vorkommen. Eine solche Differentialgleichung aber heisst partiell. Man denkt sich, die Veränderliche z werde durch die partielle Differentialgleichung als Funktion der andern Veränderlichen y, x.... bestimmt. Desshalb nennt man z die abhängige Veränderliche, während die Grössen y, x.... die unabhängigen Veränderlichen heissen.

Es lassen sich jedesmal unzählig viele Funktionen von y, x.... angeben, welche an die Stelle von z in die partielle Differentialgleichung eingesetzt derselben genügen. Diese Funktionen deuten auf ebenso viele Gleichungen hin, welche zwischen den Veränderlichen z, y, x.... der Differentialgleichung bestehen. Wenn man z. B. die Differentialgleichung:

$$2(y^2-a^2)z'+(z-y)^2=2(y^2+a^2)$$

ansetzt, so bestehen die Gleichungen:

$$z+y=0,\quad z=y+2a,\quad z=y-2a,\quad z=y-\frac{2a^2}{y}\ \text{u. s. w.},$$

weil man der Differentialgleichung genügt, wenn man diejenige Funktion von y an die Stelle von z einsetzt, welche auch irgend einer von diesen Gleichungen genügt. Die Integralrechnung stellt sich die Aufgabe, alle möglichen Gleichungen zwischen den Veränderlichen z, y, x.... zu bestimmen, welche auf die angegebene Weise die Differentialgleichung befriedigen. Man könnte Anfangs glauben, diese Aufgabe führe auf endlose Rechnungen. Allein es zeigt sich, dass jedesmal eine einzige Gleichung angegeben werden kann, woraus alle vorhin erwähnten sich ableiten lassen. Dies ist nämlich die allgemeinste Gleichung, woraus die vorliegende Differentialgleichung durch Differentiation abgeleitet werden kann. Man nennt aber die allgemeinste Gleichung, woraus eine Differentialgleichung durch Differentiation abgeleitet werden kann, deren allgemeines Integral. Die allgemeine Aufgabe, womit sich die Integration der Differentialgleichungen beschäftigt, kommt demnach zurück auf die Bestimmung des allgemeinen Integrals.

Die folgenden Blätter sollen die Integration der Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen, oder die Integration derjenigen Differentialgleichungen enthalten, wodurch die abhängige Veränderliche z als Funktion einer einzigen Veränderlichen y bestimmt wird. Man nimmt hierbei die Integration der Funktionen einer einzigen Veränderlichen als gegeben an, und betrachtet die vorliegende Aufgabe jedesmal als gelöst, wenn das allgemeine Integral jener Differentialgleichungen mit Hülfe von Quadraturen dargestellt ist.

II. Allgemeines Integral, besondere Integrale und besondere Auflösungen der Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

Wenn man die Gleichung $\alpha = c$ nach den beiden Grössen z und y differentiirt, und wenn α eine bestimmte Funktion von z und y, dagegen c eine willkührliche Beständige oder eine willkührliche Funktion aller von den beiden Veränderlichen z und y unabhängigen Grössen vorstellt, so verschwindet dies willkührliche c, und man behält die Differentialgleichung:

$$\frac{d\alpha}{dz} dz + \frac{d\alpha}{dy} dy = 0.$$

Theilt man dieselbe durch eine Grösse k, welche gleichfalls eine bestimmte Funktion von z und y ist, so hat man:

$$\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{k} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{k} = 0.$$

Daraus folgt, dass jede Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy = 0,$$

worin Z und Y irgend Funktionen der beiden Veränderlichen z und y sind, durch Differentiation einer Gleichung $\alpha = c$ entstanden gedacht werden kann. Denn wenn man dieselbe vergleicht mit der obigen aus $\alpha = c$ gebildeten Differentialgleichung, so ergeben sich die beiden identischen Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dz} = Zk, \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{dy} = Yk,$$

denen man jederzeit genügen kann, weil die beiden Unbekannten α und k ohne Ausnahme alle diejenigen Grössen aufnehmen dürfen, welche auch in Z und Y vorkommen. Da sich nun aber keine allgemeinere Gleichung angeben lässt, durch deren Differentiation die Gleichung

$$Zdz + Ydy = 0$$

entsteht, so muss die Gleichung $\alpha = c$ als das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung angesehen werden. Doch muss hier noch bemerkt werden, dass das allgemeine Integral $\alpha = c$ auch in der Form $\varphi(\alpha) = c$ angeschrieben werden kann, worin φ eine willkührliche Funktion vorstellt. Denn wenn man α aus $\varphi(\alpha) = c$

entwickelt, so kommt man immer wieder auf jene erstere Form $\alpha = f(c)$ oder $\alpha = c_1$ zurück, wo dann $c_1 = f(c)$ die willkührliche Beständige bezeichnet. Wenn es also vorkommt, dass man auf verschiedenen Wegen zu verschiedenen Integralformen derselben Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy = 0$$

gelangt, so ist diese Verschiedenheit ohne Einfluss auf die zwischen den Veränderlichen z und y dargestellte Abhändigkeit. Bei der genaueren Untersuchung wird sich dann jedesmal herausstellen, dass die Integralformen

$$\varphi_1(\alpha) = c, \quad \varphi_2(\alpha) = c \ldots.$$

vorliegen, welche alle auf ein und dieselbe Form $\alpha = c_1$ hinweisen.

Unsere Absicht ist nun aber zunächst die, zu zeigen, wie man alle Funktionen von y, welche an der Stelle von z der Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy = 0$$

genügen, aus dem allgemeinen Integral ableitet. Wir nehmen desshalb an, dass $(z-\mu)^m$, worin μ irgend eine Funktion von y, und m ein beständiger Exponent ist, für ein bestimmtes $c = c_1$ ein Faktor des Ausdrucks $\alpha - c$ sei, so dass also die identische Gleichung:

$$\alpha - c = \alpha_1 (z-\mu)^m + c_1 - c$$

angesetzt werden kann, worin α_1 wieder eine Funktion von z und y vorstellt. Wenn man dann das allgemeine Integral $\alpha = c$ differentiirt, so entsteht:

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dz} z' + \frac{d\alpha_1}{dy}\right)(z-\mu)^m + m\alpha_1 (z-\mu)^{m-1}.(z'-\mu') = 0,$$

indem man abkürzend

$$\frac{dz}{dy} = z' \quad \text{und} \quad \frac{d\mu}{dy} = \mu'$$

setzt. Diese Differentialgleichung wird durch $z = \mu$ befriedigt. Streicht man den gemeinsamen Faktor $(z-\mu)^{m-1}$, so behält man die einfachere Gleichung:

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dz} z' + \frac{d\alpha_1}{dy}\right)(z-\mu) + m\alpha_1 (z'-\mu') = 0,$$

welche auch wieder durch $z=\mu$ befriedigt wird. Man sieht leicht ein, dass diese Eigenschaft der Differentialgleichung, durch $z=\mu$ identisch zu werden, niemals verloren geht, welcher gemeinsame Faktor auch immer wegfallen mag. Man gelangt zu demselben Ergebniss, wenn man auch den Exponenten m als Funktion von z und y voraussetzt. Wenn man also in der aus $\alpha=c$ abgeleiteten Differentialgleichung:

$$\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{k}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{k}=0$$

an die Stelle von z die Funktion μ einführt, so wird man derselben jedenfalls genügen, sobald auch das allgemeine Integral $\alpha=c$ für einen besonderen Werth $c=c_1$ den Werth $z=\mu$ liefert.

So genügt man z. B. der Gleichung

$$y^a\left(z-\frac{by}{1+a}\right)=c$$

für den besonderen Werth $c=0$ durch $z=\frac{by}{1+a}$. Wenn man jene Gleichung differentiirt, so entsteht:

$$y^a dz+(ay^{a-1}.z-by^a)\,dy=0,$$

oder auch, wenn man den gemeinsamen Factor y^{a-1} streicht, die einfachere Differentialgleichung:

$$ydz+(az-by)\,dy=0,$$

welche auch wieder durch $z=\frac{by}{1+a}$ befriedigt wird.

Man nennt jeden Werth z, welcher aus dem allgemeinen Integral $\alpha=c$ für einen besonderen Werth $c=c_1$ hervorgeht, und desshalb auch der entsprechenden Differentialgleichung genügt, ein besonderes Integral dieser Differentialgleichung. Die Anzahl der besonderen Integrale kann als eine unbegrenzte angesehen werden, weil das allgemeine Integral $\alpha=c$ jedesmal auch andere Werthe z liefert, wenn die willkührliche Beständige einen andern Werth erhält.

Damit hat man aber keineswegs alle Funktionen von y aufgefunden, welche an der Stelle von z der Differentialgleichung

$$\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{k}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{k}=0$$

genügen. Es giebt deren noch andere, welche dem allgemeinen

Integral $\alpha = c$ niemals genügen, welchen besonderen Werth man auch immer der willkührlichen Beständigen c geben mag. In der Voraussetzung, dass ein solcher Werth $z = \mu$ der Differentialgleichung genüge, kann man jedenfalls annehmen, dass das allgemeine Integral $\alpha = c$ in der folgenden Form sich darstelle:

$$\alpha_1 (z - \mu)^m + \alpha_2 = c,$$

worin α_1 und α_2 irgend Funktionen von z und y sind, welche übrigens den Faktor $z - \mu$ nicht mehr enthalten. Wenn nun m wieder eine Beständige ist, so findet sich durch Differentiation die Gleichung:

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dz} z' + \frac{d\alpha_1}{dy}\right)(z - \mu)^m + m\alpha_1 (z - \mu)^{m-1} . (z' - \mu') + \frac{d\alpha_2}{dz} z' + \frac{d\alpha_2}{dy} = 0.$$

Nimmt man an, dass hier $m < 1$ sei, und setzt man $z = \mu$ ein, so kommt der Faktor $\frac{0}{0}$ zum Vorschein. Um diesen zu entfernen, multiplizire man mit $(z - \mu)^{1-m}$, und es entsteht:

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dz} z' + \frac{d\alpha_1}{dy}\right)(z - \mu) + m\alpha_1 (z' - \mu') + \left(\frac{d\alpha_2}{dz} z' + \frac{d\alpha_2}{dy}\right)(z - \mu)^{1-m} = 0$$

Man genügt dieser Differentialgleichung offenbar durch $z = \mu$, weil $1 - m > 0$ ist. Auch hier ist es unmöglich, diese Eigenschaft der Differentialgleichung durch Streichen eines gemeinsamen Faktors aufzuheben. Wenn man also in der aus $\alpha = c$ abgeleiteten Differentialgleichung:

$$\frac{d\alpha}{dz} \frac{dz}{k} + \frac{d\alpha}{dy} \frac{dy}{k} = 0$$

an die Stelle von z den Werth μ bringt, so wird man derselben genügen, sobald das allgemeine Integral Glieder enthält, worin der gemeinsame Faktor $(z - \mu)^m$ vorkommt, und worin $m < 1$ ist.

Die Gleichung $z + \sqrt{z^2 - y^2} = c$ z. B. enthält das Glied $\sqrt{z^2 - y^2}$. Durch Differentiation entsteht:

$$\frac{z dz - y dy}{\sqrt{z^2 - y^2}} + dz = 0,$$

oder auch, wenn man mit $\sqrt{z^2 - y^2}$ multiplizirt, die Differentialgleichung:

$$(z + \sqrt{z^2 - y^2})\, dz - y dy = 0,$$

welche in der That durch $z = \pm y$ befriedigt wird.

Hat man die Gleichung

$$(z+y)^{\frac{1}{2}}-(z-y)^{\frac{1}{2}}=c,$$

so findet man durch Differentiation die Gleichung:

$$(z-y)^{\frac{1}{2}}(dz+dy)=(z+y)^{\frac{1}{2}}(dz-dy),$$

welche durch $z^2=y^2$ befriedigt wird, weil das allgemeine Integral die beiden Glieder $(z+y)^{\frac{1}{2}}$ und $(z-y)^{\frac{1}{2}}$ enthält.

Wenn $z=\mu$ einer Differentialgleichung aus dem zuletzt angegebenen Grunde genügt, so ist dies nicht selten doch wieder ein besonderes Integral dieser Differentialgleichung. Denn wenn der Exponent m, von welchem verlangt worden ist, dass er <1 sei, zugleich <0 ist, so genügt der Werth $z=\mu$ auch dem allgemeinen Integrale

$$\alpha_1(z-\mu)^m+\alpha_2=c,$$

sobald man der willkührlichen Beständigen den besonderen Werth $c=\infty$ giebt. Wenn dagegen der Exponent m zwischen 0 und 1 liegt, dann wäre jeder Versuch vergeblich, der willkührlichen Beständigen einen besonderen Werth zu geben, so dass der Werth $z=\mu$ auch dem allgemeinen Integral

$$\alpha_1(z-\mu)^m+\alpha=c$$

genügt. Wenn der Exponent m zwischen 0 und 1 liegt, so nennt man die Gleichung $z=\mu$ eine besondere Auflösung der Differentialgleichung.

Es werden sich nicht in jeder Differentialgleichung

$$Zdz+Ydy=0$$

besondere Auflösungen vorfinden. Die vorher angestellten Betrachtungen haben aber gezeigt, dass dass Vorhandensein einer besonderen Auflösung aus der Beschaffenheit der Coeffizienten Z und Y leicht erkannt wird. Diejenige Wurzelgrösse, deren Vorkommen in dem allgemeinen Integral die besondere Auflösung zur Folge hat, wird nämlich jederzeit in der entsprechenden Differentialgleichung zurückbleiben. Diese Wurzelgrösse liefert also die besondere Auflösung, noch ehe man zu dem allgemeinen Integral gelangt ist. Wenn solche Wurzelgrössen in der Differentialgleichung durchaus fehlen, so kann es auch keine besonderen Auflösungen geben; und wir werden desshalb, wenn eine Funktion $z=\mu$ bekannt ist, welche einer Differentialgleichung genügt, in solchen Fällen keinen Anstand nehmen, dieselbe ein besonderes Integral zu nennen.

III. Bestimmung des integrirenden Faktors durch Trennung der Veränderlichen.

Es ist schon oben gezeigt worden, dass die Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy = 0$$

aus dem allgemeinen Integral $\alpha = c$ entsteht, wenn man dasselbe differentiirt, und dann einen gemeinsamen Faktor streicht. Die Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy = 0$$

darf also in allen Fällen als identisch angesehen werden mit der Gleichung

$$\frac{d\alpha}{dz}\frac{dz}{k} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{k} = 0.$$

Wenn sie durch blosse Differentiation aus dem allgemeinen Integral $\alpha = c$ entstanden ist, wenn also $k = 1$ gesetzt werden kann, so heisst sie ein vollständiges Differential. Die Bestimmung des allgemeinen Integrals hat in diesem Falle keine weiteren Schwierigkeiten. Die Aufgabe wird dann jedenfalls auf die Quadratur zurückgeführt, wie sich später zeigen wird. Wenn aber die Differentialgleichung kein vollständiges Differential ist, so hat man die Aufgabe, jenen Faktor, welcher aus dem vollständigen Differential weggefallen ist, wieder zu ersetzen. Man hat dies den integrirenden Faktor der Differentialgleichung genannt, weil die Integration jedenfalls gelingt, nachdem man denselben aufgefunden hat.

Die Differentialgleichung

$$Zdz + Ydy = 0$$

heisst eine gesonderte, wenn der Faktor von dz eine blosse Funktion von z, und wenn der Faktor von dy eine blosse Funktion von y ist. Die gesonderte Differentialgleichung kann jedesmal als vollständiges Differential angesehen werden. Das allgemeine Integral hat die Form:

$$\int Zdz + \int Ydy = c.$$

Wenn daher eine Gleichung durch einen Faktor gesondert werden kann, so ist dies zugleich der integrirende Faktor dieser Differentialgleichung. Die allgemeinste Differentialgleichung, welche auf diese Weise eine Sonderung zulässt, ist:

$$Y_1 Z dz + Z_1 Y dy = 0,$$

worin Z und Z_1 Funktionen von z, Y und Y_1 Functionen von y vorstellen. Der integrirende Faktor ist hier $\frac{1}{Y_1 Z_1}$, und man erhält die gesonderte Differentialgleichung:

$$\frac{Zdz}{Z_1} + \frac{Ydy}{Y_1} = 0.$$

Nun ist zwar jene Differentialgleichung

$$Y_1 Zdz + Z_1 Ydy = 0$$

nur eine unbedeutende Spezialität. Allein es gründet sich auf deren Integration ein Verfahren, welches den integrirenden Faktor für sehr viele Differentialgleichungen $Zdz + Ydy = 0$ kennen lehrt, worin Z und Y gemischte Funktionen von z und y sind. Es gelingt nämlich in vielen Fällen, die allgemeinere Gleichung

$$Zdz + Ydy = 0$$

so umzuwandeln, dass sie die vorher angegebene Beschaffenheit hat. Man bringt dies dadurch zuwege, dass man an die Stelle der beiden Veränderlichen z und y neue Veränderliche einsetzt, welche als bestimmte Funktionen der vorigen gedacht werden. Es giebt zwar keine Regel, wodurch man jedesmal die Form derjenigen Funktionen bestimmt, welche an die Stelle von z und y als die neuen Veränderlichen in die Differentialgleichung eingeführt werden müssen, damit diese durch einen Faktor sich trennen lassen. Allein man hat gewisse Kennzeichen für diejenigen Funktionen, deren Gebrauch in der genannten Absicht viel eher einen Erfolg verspricht, als dies für irgend eine andere Funktion der Fall ist. Wenn dann auch eine solche Transformation nicht immer unmittelbar zum Ziel führt, so geschieht es doch gewöhnlich, dass man demselben dadurch näher rückt, und es endlich auch erreicht, wenn man nach einander verschiedene Transformationen anbringt.

Wenn die Differentialgleichung $Zdz + Ydy = 0$ in der Form:

$$Z_1 dz + Y_1 dy + Z_2 dz + Y_2 dy = 0$$

angeschrieben werden kann, so, dass die beiden Gleichungen

$$Z_1 dz + Y_1 dy = 0 \quad \text{und} \quad Z_2 dz + Y_2 dy = 0$$

einzeln ohne Anstand integrirt werden können, weil sich die Veränderlichen durch einen Faktor trennen lassen, so gebraucht man oftmals mit Vortheil als neue Veränderliche diejenigen Funktionen,

welche durch die Integration jener beiden Gleichungen entstehen. Man setzt desshalb die willkührliche Beständige des einen Integrals einer Veränderlichen v, die willkührliche Beständige des andern Integrals einer Veränderlichen u gleich, und gelangt so zu zwei Beziehungen, mit deren Hülfe die beiden Veränderlichen z und y der ursprünglichen Differentialgleichung $Zdz + Ydy = 0$ zu eliminiren sind. Wenn man den integrirenden Faktor der Gleichung $Z_1dz + Y_1dy = 0$ durch μ, den der Gleichung $Z_2dz + Y_2dy = 0$ durch ν vorstellt, so dass also die beiden identischen Gleichungen:

$$(Z_1dz + Y_1dy)\mu = dv \quad \text{und} \quad (Z_2dz + Y_2dy)\nu = du$$

bestehen, so schreibt man, um die verlangte Transformation auszuführen, die ursprüngliche Differentialgleichung in der Form:

$$\nu dv + \mu du = 0.$$

Man hat alsdann noch die Veränderlichen z und y in den Coeffizienten ν und μ durch die neuen Veränderlichen v und u auszudrücken.

1. Es sei nun

$$dz + (Yz + Y_1)dy = 0,$$

worin Y und Y_1 irgend Funktionen von y sind. Zerlegt man diese Gleichung in die beiden:

$$dz + Yzdy = 0 \quad \text{und} \quad dy = 0,$$

so findet man durch Integration:

$$lz + \int Ydy = lc \quad \text{oder} \quad z = ce^{-\int Ydy}, \quad \text{und} \quad y = c$$

Man behalte desshalb die Veränderliche y bei, nehme aber anstatt z die neue Veränderliche x, welche aus $z = xe^{-\int Ydy}$ hervorgeht. Die Differentialgleichung verwandelt sich dann, nachdem man noch mit $e^{\int Ydy}$ multiplizirt hat, in die gesonderte:

$$dx + e^{\int Ydy}.\, Y_1dy = 0.$$

Daraus entsteht, wenn nach vollzogener Integration die ursprüngliche Veränderliche z zurückgebracht wird, das allgemeine Integral:

$$ze^{\int Ydy} + \int e^{\int Ydy}.\, Y_1dy = c.$$

2. Es sei $adz + yz(bdz - dy) = 0$.

Man zerlege diese Gleichung in die beiden $dz=0$ und $bdz-dy=0$. Man erhält durch Integration:

$$z=c \quad \text{und} \quad bz-y=c.$$

Man behalte desshalb die Veränderliche z bei, nehme aber anstatt y die neue Veränderliche $bz-y=x$. Man findet dadurch:

$$adz+(bz-x)zdx=0.$$

Nimmt man noch $z=\frac{1}{v}$, so erhält man die einfachere Gleichung:

$$adv+(xv-b)dx=0,$$

welche als besonderer Fall der Gleichung 1. angesehen werden kann. Man erhält das allgemeine Integral:

$$v.e^{\frac{x^2}{2a}}-\frac{b}{a}.\int e^{\frac{x^2}{2a}}dx=c,$$

worin noch $v=\frac{1}{z}$ und $x=bz-y$ einzuführen sind. Da dann aber weder nach z, noch auch nach y aufgelöst werden könnte, so betrachte man x als die unabhängige Veränderliche, und berechne daraus die jedesmal zusammengehörigen Werthe z und y.

3. Es sei weiter $y^2z^2(dz-bdy)+a(ydz-zdy)=0$.

Man zerlege hier in die beiden:

$$dz-bdy=0 \quad \text{und} \quad ydz-zdy=0.$$

Daraus folgt:

$$z-by=c \quad \text{und} \quad lz-ly=lc \quad \text{oder} \quad \frac{z}{y}=c.$$

Man nehme desshalb anstatt z und y die neuen Veränderlichen $z-by=u$ und $\frac{z}{y}=v$. Dies giebt zunächst:

$$z^2du+adv=0.$$

Nun findet man aber weiter $z(1-\frac{b}{v})=u$, und man erhält desshalb durch die Elimination von z die gesonderte Differentialgleichung:

$$\frac{u^2du}{a}+\frac{(v-b)^2dv}{v^2}=0.$$

Man berechnet daraus das allgemeine Integral:

$$\frac{u^3}{3a}+v-\frac{b^2}{v}-2blv=c,$$

oder auch, wenn man die vorigen Veränderlichen zurückbringt, und die willkührliche Beständige $2blc$ anstatt c schreibt, die Form:

$$\frac{(z-by)^3}{3a}+\frac{z^2-b^2y^2}{yz}=2bl\frac{cz}{y}.$$

4. Es sei noch $z^m y^n.(aydz+a_1zdy)+bydz+b_1zdy=0$.

Man zerlege diese Gleichung in die beiden:

$$aydz+a_1zdy=0 \quad \text{und} \quad bydz+b_1zdy=0.$$

Durch Integration findet man:

$$alz+a_1ly=lc \quad \text{oder} \quad z^a y^{a_1}=c,$$

$$blz+b_1ly=lc \quad \text{oder} \quad z^b y^{b_1}=c.$$

Man nehme desshalb anstatt z und y die neuen Veränderlichen $z^a y^{a_1}=v$, und $z^b y^{b_1}=u$. Man erhält zunächst die Gleichung

$$z^m y^n\frac{dv}{v}+\frac{du}{u}=0.$$

Um aber z und y durch v und u auszudrücken, bilde man:

$$z^{ab_1-a_1b}=v^{b_1}u^{-a_1} \quad \text{und} \quad y^{ab_1-a_1b}=u^a v^{-b}.$$

Daraus folgt dann weiter:

$$z^m y^n=v^{\frac{mb_1-nb}{ab_1-a_1b}}.u^{-\frac{ma_1-na}{ab_1-a_1b}}=v^p.u^{-q},$$

wenn man abkürzend

$$\frac{mb_1-nb}{ab_1-a_1b}=p \quad \text{und} \quad \frac{ma_1-na}{ab_1-a_1b}=q$$

setzt. Die obige Differentialgleichung geht demnach über in:

$$v^{p-1}dv+u^{q-1}du=0,$$

und man findet das allgemeine Integral:

$$qv^p+pu^q=c \quad \text{oder} \quad qz^{ap}y^{a_1p}+pz^{bq}y^{b_1q}=c.$$

Die besonderen Integrale und besonderen Auflösungen der Differentialgleichung $Zdz+Ydy=0$ stehen in naher Beziehung zu

denjenigen Funktionen, welche an die Stelle der Veränderlichen z und y eingeführt werden müssen, damit diese neuen Veränderlichen durch einen Faktor der Differentialgleichung sich trennen lassen. Es lässt sich nachweisen, dass alle besonderen Integrale und besonderen Auflösungen sehr geeignet sind, eine solche Umwandlung herbeizuführen.

Vorerst ist einleuchtend, wenn die Differentialgleichung eine gesonderte ist, dass dann auch das allgemeine Integral in einer Form dargestellt werden kann, worin die Veränderlichen von einander getrennt vorkommen. Wenn nun das allgemeine Integral der Differentialgleichung $Zdz + Ydy = 0$ in der Form $\alpha_1(z-\mu)^m$ vorliegt, worin α_1 irgend eine Function von z und y ist, so dass $z = \mu$ ein besonderes Integral der Differentialgleichung darstellt, so tritt an die Stelle des Faktors $(z-\mu)^m$, welcher gleichzeitig die beiden Veränderlichen z und y enthält, ein anderer Faktor, worin nur die eine Veränderliche x vorkommt, nachdem man eine der ursprünglichen Veränderlichen mittelst $z - \mu = x$ eliminirt hat. Dasselbe geschieht, wenn das allgemeine Integral in der Form $\alpha_1(z-\mu)^m + \alpha_2 = c$ vorliegt, worin α_1 und α_2 irgend Funktionen von z und y sind, und der Exponent m eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist, so dass also $z = \mu$ eine besondere Auflösung der Differentialgleichung darstellt. Wenn also der Werth $z = \mu$ der Differentialgleichung $Zdz + Ydy = 0$ genügt, so wird man durch die Transformation $z - \mu = x$ der Trennung der Veränderlichen in vielen Fällen Vorschub leisten.

Wenn mehrere identisch genügende Funktionen $z = \mu$ vorliegen, welche sich nur durch eine Beständige von einander unterscheiden, indem man die einzelnen Formen

$$z = f(y, a_1), \quad z = f(y, a_2) \ldots .$$

auffindet, so wird man mit besonderem Vortheil die Gleichung $z = f(y, a)$ nach jener Beständigen a auflösen, um den daraus gezogenen Werth $a = \varphi(z, y)$ als neue Veränderliche einzuführen. Denn man darf hier von der Voraussetzung ausgehen, dass der Faktor:

$$(a_1 - \varphi(z, y))^m . (a_2 - \varphi(z, y))^n \ldots ,$$

sei es nun als besonderes Integral oder als besondere Auflösung der Differentialgleichung in dem allgemeinen Integral auftritt. Nachdem man aber die Transformation $x = \varphi(z, y)$ ausgeführt hat, so enthält jener ganze Faktor offenbar nur die eine Veränderliche x.

Um die Elimination von z durch die Gleichung $z=f(y,x)$ auszuführen, bilde man

$$dz=\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy,$$

und die Gleichung $Zdz+Ydy=0$ geht über in:

$$Z\frac{df}{dx}dx+\left(Z\frac{df}{dy}+Y\right)dy=0.$$

5. Es sei

$$dz+(Yz^2+Y_1z+Y_2)\,dy=0,$$

worin Y, Y_1 und Y_2 irgend Funktionen von y vorstellen. Kennt man ein besonderes Integral $z=\mu$ dieser Differentialgleichung, so setze man $z-\mu=x$, und man erhält, weil nach der Annahme

$$d\mu+(Y\mu^2+Y_1\mu+Y_2)dy=0$$

ist, durch die Elimination von z die neue Gleichung:

$$dx+Yx^2dy+(2Y\mu+Y_1)xdy=0.$$

Dieselbe wird noch weiter vereinfacht, wenn man $x=\frac{1}{v}$ setzt. Man erhält dadurch die Gleichung:

$$dv-(2Y\mu+Y_1)vdy-Ydy=0,$$

welche mit der vorher betrachteten Gleichung 1. übereinstimmt.

6. Es sei nun $ydz-zdy+\sqrt{ayz-z^2}\,.\,dy=0$.

Nimmt man $z=my$, so findet sich zur Bestimmung von m die quadratische Gleichung $m^2-am=0$. Man setze desshalb $z=xy$, und erhält durch die Elimination von z:

$$ydx+\sqrt{ax-x^2}\,.\,dy=0,$$

oder, wenn man mit $y.\sqrt{ax-x^2}$ theilt, die gesonderte Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}+\frac{dy}{y}=0.$$

Um das Irrationale wegzubringen, nehme man $\sqrt{ax-x^2}=xv$ Daraus folgt:

$$x=\frac{a}{v^2+1}\quad\text{und}\quad dx=\frac{-2avdv}{(v^2+1)^2},$$

und man behält:

$$\frac{2dv}{v^2+1}=\frac{dy}{y}.$$

Durch Integration findet man $\operatorname{arctg} v = l\sqrt{cy}$, oder $v = \operatorname{tg} l\sqrt{cy}$. Setzt man aber den Werth $v=\sqrt{\frac{a}{x}-1}=\sqrt{\frac{ay}{z}-1}$ ein, so hat man das allgemeine Integral:

$$\frac{ay}{z}-1=\operatorname{tg}^2 l\sqrt{cy}, \quad \text{oder auch} \quad z=ay.\cos^2 l\sqrt{cy}.$$

7. Es sei $2(y^2-a^2)\,dz+(z-y)^2 dy=2(y^2+a^2)\,dy$.

Nimmt man $z=y+m$, so findet man $m^2=4a^2$. Man genügt also durch $z=y\pm 2a$. Desshalb setze man $z-y=x$, und man erhält durch die Elimination von z:

$$2(y^2-a^2)\,dx+(x^2-4a^2)\,dy=0.$$

Wenn man durch $(y^2-a^2)(x^2-4a^2)$ theilt, so entsteht:

$$\frac{2dx}{x^2-4a^2}+\frac{dy}{y^2-a^2}=0.$$

Durch Integration findet man:

$$l\frac{x-2a}{x+2a}+l\frac{y-a}{y+a}=lc, \quad \text{oder} \quad \frac{z-y-2a}{z-y+2a}=c.\frac{y+a}{y-a}.$$

8. Es sei weiter $(z+ay)(dz+bdy)+(c+ey^n)(ydz-zdy)=0$.

Nimmt man $z=my$, so findet sich zur Bestimmung von m die quadratische Gleichung $(m+a)(m+b)=0$. Man genügt also durch $z+ay=0$ und $z+by=0$. Man setze desshalb $z=xy$, und man erhält durch die Elimination von z die Gleichung:

$$(x+a)(x+b)\,dy+(x+a)y\,dx+(c+ey^n)\,y\,dx=0,$$

welche einfacher wird, wenn man $y^n=\frac{1}{v}$ setzt. Es entsteht:

$$(x+a)(x+b)\,dv-((x+a+c)v+e)n\,dx=0,$$

oder, wenn man mit dem Faktor von dv theilt:

$$dv-\frac{(x+a+c)v+e}{(x+a)(x+b)}n\,dx=0.$$

Wenn man dies mit der Gleichung 1. vergleicht, und wenn man zugleich beachtet, dass

$$-\int\frac{(x+a+c)\,dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{c}{a-b}\,l(x+a)+\left(\frac{c}{b-a}-1\right)l(x+b)$$

ist, so gelangt man zu dem allgemeinen Integral:

$$v\,.\,(x+a)^{\frac{cn}{a-b}}\,.\,(x+b)^{\frac{cn}{b-a}-n}=en\,.\int(x+a)^{\frac{cn}{a-b}-1}\,.\,(x+b)^{\frac{cn}{b-a}-n-1}\,.\,dx+k,$$

worin k die willkührliche Beständige vorstellt.

9. Es sei nun $(y^2-a^2)\,dz=(yz+a\sqrt{z^2+y^2-a^2})\,dy$.

Man genügt dieser Gleichung durch $y^2-a^2=0$, und desshalb auch durch $z=\sqrt{z^2+y^2-a^2}$. Man setze nun $z-\sqrt{z^2+y^2-a^2}=x$. Um damit z zu eliminiren, so bilde man nach einander:

$$z=\frac{x^2-y^2+a^2}{2x},\quad \sqrt{z^2+y^2-a^2}=z-x=\frac{-x^2-y^2+a^2}{2x}.$$

Durch Differentiation bilde man weiter:

$$dz=\frac{(x^2+y^2-a^2)\,dx}{2x^2}-\frac{ydy}{x}.$$

Wenn man dies Alles einsetzt, und zugleich den dadurch entstehenden gemeinsamen Faktor $\frac{x^2+y^2-a^2}{2x}$ streicht, so bleibt die Gleichung:

$$(y^2-a^2)\,dx=(y-a)\,xdy.$$

Man theile weiter durch $x(y^2-a^2)$, und man behält die gesonderte Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y+a}.$$

Daraus findet sich das allgemeine Integral in der Form:

$$x=c(y+a)\quad\text{oder}\quad z-\sqrt{z^2+y^2-a^2}=c(y+a).$$

10. Es sei noch $(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dz+a(1-yz)\sqrt{1+z^2}\,.\,dy=0$.

Man genügt dieser Gleichung durch $z=\frac{m-y}{1+my}$, worin m eine Beständige, welche aus der quadratischen Gleichung $a=\sqrt{m^2+1}$

zu berechnen ist. Man bringe desshalb an die Stelle von z die neue Veränderliche x, welche aus $z=\frac{x-y}{1+xy}$ hervorgeht. Daraus folgt:

$$1+z^2=\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+xy)^2} \quad \text{und} \quad 1-yz=\frac{1+y^2}{1+xy}.$$

Man findet weiter durch Differentiation:

$$dz=\frac{(1+y^2)\,dx-(1+x^2)\,dy}{(1+xy)^2}.$$

Wenn man dies einsetzt, und wenn man zugleich den gemeinsamen Nenner $(1+xy)^2$ weglässt, so behält man die Gleichung:

$$(1+y^2)\,dx=(1+x^2-a\sqrt{1+x^2})\,dy,$$

oder, wenn man die beiden Veränderlichen trennt:

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-a)}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

Um das Irrationale zu entfernen, nehme man $\sqrt{1+x^2}=1+xv$. Daraus folgt:

$$x=\frac{2v}{1-v^2} \quad \text{und} \quad 1+xv=\frac{1+v^2}{1-v^2}.$$

Ferner hat man

$$dx=\frac{(1+v^2).2dv}{(1-v^2)^2},$$

und entsteht die neue Gleichung:

$$\frac{2dv}{1+v^2-a(1-v^2)}=\frac{\frac{2dv}{1-a}}{1+\frac{1+a}{1-a}v^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

Man erhält daraus das allgemeine Integral:

$$2\operatorname{arctg}\left(v\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)=\sqrt{1-a^2}\operatorname{arctg}y,$$

oder auch, indem man daraus v entwickelt,

$$v=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}.\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}\operatorname{arctg}y\right).$$

Nachdem man hieraus für ein gegebenes y den Werth v berechnet hat, findet man $x=\frac{2v}{1-v^2}$, und dann auch $z=\frac{x-y}{1+xy}$.

IV. Bestimmung des integrirenden Faktors als gemischte Funktion von z und y.

Man sieht ein, dass das vorhin auseinandergesetzte Rechnungsverfahren, wodurch man die Trennung der Veränderlichen bezweckt, immer nur dann von gutem Erfolg sein wird, wenn diejenigen Funktionen von z und y, welche als neue Veränderliche an die Stelle von z und y eingeführt werden müssen, damit die Trennung möglich werde, durch einfachere Form wesentlich vor dem allgemeinen Integral $\alpha=c$ sich hervorthun. Dass dies immer der Fall sei, darf nicht vorausgesetzt werden. In dem andern Falle wird man vortheilhafter das allgemeine Integral unmittelbar als gemischte Funktion der Veränderlichen bestimmen.

Die Bestimmung des allgemeinen Integrals $\alpha=c$ hat niemals Schwierigkeit, wenn die Differentialgleichung $Zdz+Ydy=0$ ein vollständiges Differential ist, oder wenn sie als identisch mit der Gleichung $\frac{d\alpha}{dz}dz+\frac{d\alpha}{dy}dy=0$ angesehen werden kann. Man hat dann die beiden Beziehungen:

$$\frac{d\alpha}{dz}=Z \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{dy}=Y.$$

Aus der ersteren folgt $\alpha=\int Zdz+\alpha_2$, worin α_2 eine noch unbekannte Funktion von y ist. Um diese Funktion zu bestimmen, nehme man abkürzend $\int Zdz=\alpha_1$. Durch Differentiation der Gleichung $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ bilde man:

$$\frac{d\alpha}{dy}=\frac{d\alpha_1}{dy}+\frac{d\alpha_2}{dy},$$

oder auch, wenn man auf die zweite der obén angeführten Beziehungen Rücksicht nimmt, die Gleichung:

$$\frac{d\alpha_2}{dy}=Y-\frac{d\alpha_1}{dy}.$$

Daraus erhält man durch Integration:

$$\alpha_2 = \int (Y - \frac{d\alpha_1}{dy}) dy;$$

und das allgemeine Integral ist also unter der vorher gemachten Voraussetzung in der Form $\alpha_1 + \alpha_2 = c$ dargestellt.

Ob aber eine vorliegende Differentialgleichung $Zdz + Ydy = 0$ in der That ein vollständiges Differential ist, dies entscheidet sich durch die vorzunehmende Rechnung. Nur dann, wenn jene Voraussetzung richtig ist, wird man nämlich auf dem vorgeschriebenen Wege zu einem Werthe α_2 gelangen, worin die Veränderliche y nicht vorkommt.

1. Es sei

$$\left(\frac{a}{\sqrt{z^2 + y^2 - a^2}} + 1\right) zdz + \left(\frac{a}{\sqrt{z^2 + y^2 - a^2}} - 1\right) ydy = 0.$$

Man findet

$$\alpha_1 = \int \left(\frac{a}{\sqrt{z^2 + y^2 - a^2}} + 1\right) zdz = a\sqrt{z^2 + y^2 - a^2} + \frac{z^2}{2}.$$

Ferner findet man

$$\alpha_2 = \int -ydy = -\frac{y^2}{2}.$$

Man hat also das allgemeine Integral:

$$\sqrt{z^2 + y^2 - a^2} + \frac{z^2 - y^2}{2a} = c.$$

Wenn die Gleichung $Zdz + Ydy = 0$ kein vollständiges Differential ist, so wird dieselbe doch immer dadurch mit der Gleichung $\frac{d\alpha}{dz} dz + \frac{d\alpha}{dy} dy = 0$ identisch, dass man alle Glieder mit einer gewissen Funktion von z und y multiplizirt, welche, wie schon bemerkt worden ist, der integrirende Faktor heisst. Man hat also die beiden Beziehungen:

$$\frac{d\alpha}{dz} = Zk \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{dy} = Yk.$$

Wenn man daraus α eliminirt, so entsteht eine Gleichung, worin nur die Unbekannte k vorkommt. Man wird diese Elimination ausführen, indem man die erstere Beziehung nach y, die andere nach z differentiirt. Aus der Vergleichung dieser beiden Resultate ergiebt sich:

$$\frac{d(Zk)}{dy} = \frac{d(Yk)}{dz},$$

oder auch, wenn man durch k theilt, und zugleich die abkürzenden Bezeichnungen $\frac{dk}{dy} = k_y$ und $\frac{dk}{dz} = k_z$ einführt, die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad Z\frac{k_y}{k} - Y\frac{k_z}{k} + \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0.$$

Jeder Werth k, welcher dieser Gleichung genügt, besitzt die Eigenschaft, die Differentialgleichung $Zkdz + Ykdy = 0$ zu einem vollständigen Differential zu machen. Der Gebrauch der Gleichung (a) beschränkt sich desshalb auf die Bestimmung eines besonderen Integrals. Da aber ein besonderes Integral immer nur durch Probiren ermittelt werden kann, so gebe man der unbekannten Funktion k in Bezug auf das Vorkommen der einen Veränderlichen z versuchsweise eine bestimmte Form. Man setze dieselbe in die Gleichung (a) an die Stelle von k ein, und untersuche alsdann, ob sich das Vorkommen der andern Veränderlichen y so angeben lässt, dass die identische Gleichheit eintritt.

Wenn man aus jenen beiden Beziehungen, welche durch die Vergleichung der Differentialgleichung $Zkdz + Ykdy = 0$ mit dem vollständigen Differential $\frac{d\alpha}{dz}dz + \frac{d\alpha}{dy}dy$ zum Vorschein kommen, die Unbekannte k eliminirt, so erhält man zur Bestimmung von α die Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad Z\frac{d\alpha}{dy} - Y\frac{d\alpha}{dz} = 0.$$

Wenn es gelingt, eine Funktion von z und y anzugeben, welche dieser Gleichung an der Stelle von α genügt, so ist damit das allgemeine Integral $\alpha = c$ bekannt. Man müsste also, um die Funktion α unmittelbar zu bestimmen, ein besonderes Integral der Gleichung (b) aufsuchen. Nun lässt sich aber die Frage, welche von den beiden Gleichungen (a) und (b) bei der Integration der Gleichung $Zdz + Ydy = 0$ benutzt werden solle, leicht beantworten. Denn es folgt aus der Natur der Aufgabe, dass der integrirende Faktor sehr wohl eine wesentlich einfachere Gestalt annehmen kann, als das allgemeine Integral $\alpha = c$ selbst; dass aber niemals umgekehrt das allgemeine Integral wesentlich einfacher sein wird als der integrirende Faktor. Wenn also auch einzelne Fälle denkbar sind, wo man etwa dieselben Rechnungen durchzuführen hätte, um ein besonderes Integral der Gleichung (a) oder ein besonderes

Integral der Gleichung (b) aufzufinden, so wird man doch in den meisten Fällen eher zum Ziel kommen, wenn man den letzteren Weg einschlägt. Auf diese Betrachtung gründet sich der Vorzug, den man jederzeit dem Gebrauch der Gleichung (a) vor dem der Gleichung (b) einräumt, so dass also mit Recht behauptet werden kann, die Integration der Gleichung $Zdz + Ydy = 0$ beruhe im Wesentlichen auf der Bestimmung des integrirenden Faktors.

Die nun folgenden Untersuchungen werden sich auf diejenigen Fälle beschränken, in welchen der integrirende Faktor die Gestalt:

$$k = \lambda(z-\mu)^m (z-\nu)^n \ldots.$$

annimmt, worin λ, μ, ν .... irgend Funktionen von y, die Exponenten m, n .... aber beständige Grössen sind. Wenn man diesen Werth k in die Gleichung (a) einsetzt, so erhält man:

$$\text{(c)} \qquad Z\frac{\lambda'}{\lambda} - m\frac{Z\mu' + Y}{z-\mu} - n\frac{Z\nu' + Y}{z-\nu} - \ldots + \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0.$$

Um die Unbekannten λ, μ, ν .... m, n .... aus dieser Gleichung zu bestimmen, ordne man nach Potenzen und nach den sonst in den Coeffizienten Z und Y vorkommenden Funktionen von z. Man setze alsdann den gemeinsamen Faktor jeder einzelnen Funktion gleich Null, und man erhält auf diese Weise mehrere andere Gleichungen, welche zur Bestimmung der unbekannten Grössen zu benutzen sind. Wenn dieselben so angegeben werden können. dass allen jenen Gleichungen Genüge geschieht, so giebt es in der That einen integrirenden Faktor von der angenommenen Form.

Diese Rechnung lässt sich aber wesentlich vereinfachen, da man im Stande ist, sogleich diejenigen Gleichungen anzugeben, welche auf dem angegebenen Wege zur Bestimmung irgend einer der unbekannten Funktionen μ, ν .... durch die Elimination aller übrigen Unbekannten entstehen. Da nämlich der gemeinsame Faktor jeder einzelnen Funktion von z für sich verschwinden muss, damit man der Gleichung (c) genüge, so behält man auch dann eine richtige Gleichung, wenn man an die Stelle von z irgend eine Funktion von y einsetzt. Setzt man aber die Funktion μ an die Stelle von z ein, so geht die Gleichung (c) über in die einfachere $Z\mu' + Y = 0$, worin nur noch die Unbekannte μ vorkommt. Diese Gleichung unterscheidet sich aber von der zu integrirenden Gleichung $Zz' + Y = 0$ offenbar nur dadurch, dass überall μ anstatt z vorkommt. Wenn also für die Differentialgleichung $Zdz + Ydy = 0$ ein integrirender Faktor in der Form $\lambda(z-\mu)^m(z-\nu)^n$ .... besteht,

so sind die Bestandtheile $z-\mu$, $z-\nu$.... einzeln gleich Null gesetzt jedesmal besondere Integrale oder auch besondere Auflösungen dieser Differentialgleichung. Nachdem man solche Funktionen aufgefunden hat, führe man dieselben an die Stelle von μ, ν.... ein, und der weitere Gebrauch der Gleichung (c) beschränkt sich dann auf die Bestimmung der Funktion λ und der beständigen Exponenten m, n....

Wenn man die Gleichung (c) benutzt, um die übrigen Bestandtheile λ, m, n.... des integrirenden Faktors

$$k = \lambda(z-\mu)^m (z-\nu)^n \ldots.$$

zu bestimmen, so hat man gewisse Operationen vorzunehmen, welche einen wesentlichen Bestandtheil derjenigen Rechnungen ausmachen, wodurch man das vollständige Differential

$$Zkdz + Ykdy = 0$$

integrirt. Nachdem man jene Grössen λ, m, n.... aufgefunden hat, so werden also dieselben Rechnungen theilweise bei der Bestimmung des allgemeinen Integrals wieder vorkommen. Man hat desshalb guten Grund, von der Gleichung (c) keinen weiteren Gebrauch zu machen. Man wird dann die Differentialgleichung $Zdz + Ydy = 0$ sogleich mit dem zum Theil noch unbestimmten k multipliziren, und dann die Integration gerade so ausführen, wie wenn ein vollständiges Differential vorläge. Man geht also aus von den beiden Beziehungen:

$$\frac{d\alpha}{dz} = Zk \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{dy} = Yk.$$

Aus der ersteren erhält man $\alpha = \int Zkdz + \alpha_2$, worin α_2 eine noch unbekannte Funktion von y ist. Die angedeutete Integration nach z kann ausgeführt werden, weil das Vorkommen von z in der Funktion k bekannt angenommen ist. Man setze abkürzend $\alpha_1 = \int Zkdz$, und bilde durch Differentiation die Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\alpha_1}{dy} + \frac{d\alpha_2}{dy}.$$

Wenn man nun die zweite der vorher angegebenen Beziehungen benutzt, um die Unbekannte $\frac{d\alpha}{dy}$ zu eliminiren, so entsteht:

$$\text{(e)} \qquad \frac{d\alpha_2}{dy} = Yk - \frac{d\alpha_1}{dy}.$$

Man ordne diese Gleichung nach Potenzen und nach den sonst

vorkommenden Funktionen von z, und lasse den gemeinsamen Faktor jeder einzelnen Funktion von z für sich verschwinden. Man gelangt auf diesem Wege zu verschiedenen Gleichungen, welche zur Bestimmung von α_2 und der übrigen in k noch vorkommenden Unbekannten zu benutzen sind. Hätte man diese letzteren Unbekannten vorher aus der Gleichung (c) abgeleitet, so wären die jetzt entstehenden Gleichungen von selbst erfüllt, mit Ausnahme einer einzigen, woraus die Unbekannte α_2 hervorgeht.

Wenn auch der zuletzt bezeichnete Weg bei der Bestimmung des integrirenden Faktors nicht gerade überall eingeschlagen werden soll, so wird dies mit Vortheil doch immer dann geschehen, wenn die Exponenten m, n... in dem Werthe $k = \lambda(z-\mu)^m(z-\nu)^n\ldots$ schon bekannt sind, so dass also die Funktion λ als die einzige Unbekannte zurückbleibt. Die einfachste Annahme der Art ist offenbar die, dass der integrirende Faktor eine Funktion der einen Veränderlichen y allein ist, so dass also $k = \lambda$ zu setzen ist.

2. Wendet man dies an auf die schon früher integrirte Gleichung:

$$dz + (Yz + Y_1)dy = 0,$$

worin Y und Y_1 irgend Funktionen von y sind, so findet sich $\alpha_1 = \int \lambda dz = \lambda z$. Die Gleichung (e) nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$\frac{d\alpha_2}{dy} = (Yz + Y_1)\lambda - \lambda' z.$$

Man zerlegt dieselbe in die beiden:

$$\lambda' = Y\lambda \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha_2}{dy} = Y_1 \lambda.$$

Durch Integration entsteht:

$$\lambda = e^{\int Y dy} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \int Y_1 \lambda dy.$$

Man gelangt demnach zu dem allgemeinen Integrale:

$$e^{\int Y dy} \cdot z + \int e^{\int Y dy} \cdot Y_1 dy = c.$$

Wir untersuchen jetzt die Gleichung:

$$\varphi(z, y)\, dz + \psi(z, y)\, dy = 0,$$

für den Fall, dass φ und ψ ganze rationale Funktionen von z sind, so dass also auch die Form:

$$(Zz^{n-1}+Z_1z^{n-2}+\ldots+Z_{n-1})\,dz+(Yz^n+Y_1z^{n-1}+\ldots+Y_n)\,dy=0$$

angeschrieben werden kann, worin $ZZ_1\ldots\; YY_1\ldots$ irgend Funktionen von y vorstellen. Der integrirende Faktor dieser Differentialgleichung lässt sich oftmals in der Form

$$k=\frac{\lambda}{(z-\mu)(z-\nu)(z-\pi)\ldots}$$

ansetzen, worin λ, μ, ν, $\pi\ldots$ irgend Funktionen von y sind. Multiplizirt man damit die Differentialgleichung, so erhält man das vollständige Differential:

$$\frac{\lambda\varphi(z,y)dz}{(z-\mu)(z-\nu)(z-\pi)\ldots}+\frac{\lambda\psi(z,y)dy}{(z-\mu)(z-\nu)(z-\pi)\ldots}=0.$$

Wenn man nun annimmt, dass der Nenner aus n Faktoren bestehe, so entsteht durch die Zerlegung in die partiellen Brüche die Gleichung:

$$\left(\frac{M}{z-\mu}+\frac{N}{z-\nu}+\frac{P}{z-\pi}+\ldots\right)\lambda dz$$
$$+\left(Y+\frac{M_1}{z-\mu}+\frac{N_1}{z-\nu}+\frac{P_1}{z-\pi}+\ldots\right)\lambda dy=0.$$

Nun findet man aber nach bekannten Regeln:

$$M=\frac{\varphi(\mu,y)}{(\mu-\nu)(\mu-\pi)\ldots},\quad M_1=\frac{\psi(\mu,y)}{(\mu-\nu)(\mu-\pi)\ldots},$$

$$N=\frac{\varphi(\nu,y)}{(\nu-\mu)(\nu-\pi)\ldots},\quad N_1=\frac{\psi(\nu,y)}{(\nu-\mu)(\nu-\pi)\ldots},$$

$$P=\frac{\varphi(\pi,y)}{(\pi-\mu)(\pi-\nu)\ldots},\quad P_1=\frac{\psi(\pi,y)}{(\pi-\mu)(\pi-\nu)\ldots}.$$

Wenn man alle diese Werthe einsetzt, und zugleich beachtet, dass $z=\mu$, $z=\nu$, $z=\pi\ldots$ besondere Integrale der Gleichung $\varphi(z,y)\,dz+\psi(z,y)\,dy=0$ sind, dass diese also jedesmal zu einer identischen Gleichung wird, wenn man darin z mit einem der Werthe μ, ν, $\pi\ldots$ vertauscht, so entsteht:

$$(\mathrm{f})\quad \lambda Ydy+\frac{\lambda\varphi(\mu,y)}{(\mu-\nu)(\mu-\pi)\ldots}\,\frac{dz-d\mu}{z-\mu}+\frac{\lambda\varphi(\nu,y)}{(\nu-\mu)(\nu-\pi)\ldots}\,\frac{dz-d\nu}{z-\nu}$$
$$+\frac{\lambda\varphi(\pi,y)}{(\pi-\mu)(\pi-\nu)\ldots}\,\frac{dz-d\pi}{z-\pi}+\ldots=0.$$

Man kann sich mit Hülfe der Gleichung (e) leicht davon überzeugen, dass dies immer nur dann ein vollständiges Differential ist, wenn die Faktoren von $\frac{dz-d\mu}{z-\mu}$, $\frac{dz-d\nu}{z-\nu}$.... alle von y unabhängig sind. Man bestimme desshalb die Funktion λ so, dass irgend einer von diesen Faktoren eine beständige Grösse ist. Wenn dadurch auch die übrigen Faktoren von y unabhängig werden, dann hat der integrirende Faktor in der That die vorhin angesetzte Form, und der Integration der Gleichung

$$\varphi(z, y)\,dz + \psi(z, y)\,dy = 0$$

steht nichts weiter im Wege.

3. Um die Gleichung

$$dz + (Yz + Y_1)\,dy = 0$$

hiernach zu integriren, bedarf man nur eines einzigen besonderen Integrals $z=\mu$. Man verwandelt dieselbe in das vollständige Differential:

$$\frac{\lambda dz + \lambda(Yz + Y_1)\,dy}{z-\mu} = 0.$$

Nimmt man $\lambda = 1$, so behält man:

$$Ydy + \frac{dz-d\mu}{z-\mu} = 0.$$

Man findet daraus das allgemeine Integral:

$$\int Ydy + l(z-\mu) = c \quad \text{oder} \quad e^{\int Ydy}.(z-\mu) = c.$$

4. Es sei $dz + (z + ay^n)dy = 0$.

Setzt man die Reihe $z = my^n + m_1 y^{n-1} + m_2 y^{n-2} + m_3 y^{n-3} + ...$ ein, so behält man:

$$(m+a)y^n + (m_1 + mn)y^{n-1} + (m_2 + m_1(n-1))y^{n-2} + (m_3 + m_2(n-2))y^{n-3}... = 0.$$

Daraus bestimmt man das besondere Integral:

$$z = -ay^n\left(1 - \frac{n}{y} + \frac{n(n-1)}{y^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{y^3} + ...\right).$$

Da nun $Y = 1$ ist, so hat man das allgemeine Integral:

$$e^y(z + ay^n - any^{n-1} + an(n-1)y^{n-2} - an(n-1)(n-2)y^{n-3} + ...) = c.$$

5. Um die Gleichung

$$dz+(Yz^2+Y_1z+Y_2)\,dy=0$$

hiernach zu integriren, bedarf man zweier besonderen Integrale $z=\mu$ und $z=\nu$. Diese geben das vollständige Differential:

$$\frac{\lambda dz+\lambda(Yz^2+Y_1z+Y_2)dy}{(z-\mu)(z-\nu)}=0,$$

oder, wenn man in die partiellen Brüche zerlegt:

$$\lambda Ydy+\frac{\lambda}{\mu-\nu}\cdot\frac{dz-d\mu}{z-\mu}+\frac{\lambda}{\nu-\mu}\cdot\frac{dz-d\nu}{z-\nu}=0.$$

Nimmt man hier $\lambda=\mu-\nu$, so behält man die einfachere Gleichung:

$$(\mu-\nu)Ydy+\frac{dz-d\mu}{z-\mu}-\frac{dz-d\nu}{z-\nu}=0.$$

Daraus entsteht das allgemeine Integral:

$$e^{\int(\mu-\nu)Ydy}.(z-\mu)=c(z-\nu).$$

6. Der Gleichung

$$(a+b)\,dz+(z^2+\frac{ab}{y^2})\,dy=0$$

genügen $z=\frac{a}{y}$ und $z=\frac{b}{y}$. Daraus folgt $\mu-\nu=\frac{a-b}{y}$. Da nun $Y=\frac{1}{a+b}$ ist, so erhält man das allgemeine Integral:

$$y^{\frac{a-b}{a+b}}(z-\frac{a}{y})=c(z-\frac{b}{y}).$$

7. Der Gleichung

$$adz+(z^2-\frac{b^2}{y^4})\,dy=0$$

genügen $z=\frac{a}{y}-\frac{b}{y^2}$ und $z=\frac{a}{y}+\frac{b}{y^2}$. Man hat $\mu-\nu=\frac{-2b}{y^2}$. Da nun $Y=\frac{1}{a}$ ist, so hat man das allgemeine Integral:

$$e^{\frac{2b}{ay}}(z-\frac{a}{y}+\frac{b}{y^2})=c(z-\frac{a}{y}-\frac{b}{y^2}).$$

Es giebt kein Verfahren, wodurch man zu dem allgemeinen

Integral der Gleichung $s'+Ys^2+Y_1s+Y_2=0$ gelangt, und welches zugleich unabhängig ist von der Kenntniss eines besonderen Integrals. Da aber die Integration keine Schwierigkeit mehr hat, wenn ein besonderes Integral bekannt ist, so hat man sich vielfach mit der Bestimmung der besonderen Integrale dieser Differentialgleichung beschäftigt. Die dazu führenden Rechnungen werden aber durch die folgenden Verwandlungen wesentlich vereinfacht. Man bringt an die Stelle von s eine andere Veränderliche x, indem man $Ys=x$ setzt. Man erhält dadurch, nachdem man noch mit Y multiplizirt hat, die Gleichung:

$$x'+x^2+(YY_1-\frac{Y'}{Y})x+YY_2=0,$$

oder auch, um dies einfacher zu schreiben:

$$x'+x^2+Yx+Y_1=0,$$

indem man durch Y und Y_1 andere Funktionen von y vorstellt als vorher. Man setzt nun weiter $x=\frac{v'}{v}$. Daraus folgt

$$x'=\frac{v''}{v}-\left(\frac{v'}{v}\right)^2,$$

und die Differentialgleichung erhält, nachdem man mit v multiplizirt hat, die folgende Gestalt:

$$v''+Yv'+Y_1v=0.$$

Die Bestimmung der besonderen Integrale v hat aber weit weniger Schwierigkeiten als die der besonderen Integrale s. Doch muss man die Bestimmung von v der Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung überlassen. Wenn v bekannt ist, so erhält man s durch die Beziehung $Ys=\frac{v'}{v}$.

8. Der homogenen Differentialgleichung:

$$(az^{n-1}+a_1yz^{n-2}+\ldots+a_{n-1}y^{n-1})ydz+(bz^n+b_1yz^{n-1}+\ldots+b_ny^n)dy$$
$$=0,$$

worin die Summe der Exponenten von z und y in jedem Gliede dieselbe Zahl n ist, genügen offenbar n besondere Integrale von der Form $z=my$. Denn setzt man diesen Werth von z ein, so erhält man zur Bestimmung der Beständigen m die Gleichung:

$$(a+b)m^n+(a_1+b_1)m^{n-1}+\ldots+b_n=0.$$

Man hat desshalb den integrirenden Faktor

$$k = \frac{\lambda}{(a+b)z^n + (a_1+b_1)yz^{n-1} + \ldots + b_n y^n}.$$

Man ersieht aus der Gleichung (f), dass die Coëffizienten aller partiellen Brüche, welche durch diesen Faktor in der Differentialgleichung zum Vorschein kommen, für $\lambda = \frac{1}{y}$ beständige Werthe erhalten. Schreibt man nun aber die homogene Differentialgleichung in der einfacheren Form $Zdz + Ydy = 0$, so hat man den integrirenden Faktor:

$$k = \frac{1}{Zz + Yy}.$$

9. Die Gleichung

$$y^2dz + (z+y)zdy = 0$$

führt demnach auf das vollständige Differential:

$$\frac{y^2dz + (z+y)zdy}{yz(z+2y)} = 0.$$

Wenn man in die partiellen Brüche zerlegt, so entsteht:

$$\frac{dy}{y} + \tfrac{1}{2}\frac{dz}{z} - \tfrac{1}{2}\frac{dz + 2dy}{z+2y} = 0.$$

Man findet daraus das allgemeine Integral:

$$ly^2 + lz - l(z+2y) + lc = 0$$

oder auch:

$$\frac{1}{y^2} + \frac{2}{yz} = c.$$

10. Die Gleichung

$$ay^3dz - (z^2 + 2ay^2)zdy = 0$$

liefert das vollständige Differential:

$$\frac{ay^3dz - (z^2 + 2ay^2)zdy}{yz(z^2 + ay^2)} = 0.$$

Durch Zerlegen in die partiellen Brüche entsteht:

$$-\frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} - \frac{zdz + aydy}{z^2 + ay^2} = 0.$$

Man bildet daraus das allgemeine Integral:

$$-ly^2 + lz^2 - l(z^2 + ay^2) = lc,$$

oder auch:

$$z^2 = cy^2(z^2 + ay^2).$$

11. Man nehme nun die Gleichung:

$$(z + ay + b)dz + ((c + e - a)z + cey + h)dy = 0.$$

Man genügt hier durch $z = my + n$. Denn setzt man dies ein, so entsteht:

$$((m + a)y + n + b)m + ((c + e - a)m + ce)y + (c + e - a)n + h = 0.$$

Zur Bestimmung von m und n hat man also die beiden Gleichungen:

$$m^2 + (c + e)m + ce = 0$$

und

$$(m + c + e - a)n + bm + h = 0.$$

Man findet daraus die beiden besonderen Integrale:

$$z = -cy + \frac{bc - h}{e - a} \quad \text{und} \quad z = -ey + \frac{be - h}{c - a}.$$

Man findet weiter, weil $Y = 0$ ist, das vollständige Differential:

$$\lambda \cdot \frac{a - c}{e - c} \frac{dz + cdy}{z + cy - \frac{bc - h}{e - a}} + \lambda \cdot \frac{a - e}{c - e} \frac{dz + edy}{z + ey - \frac{be - h}{c - a}} = 0.$$

Nimmt man $\lambda = e - c$, so entsteht das allgemeine Integral:

$$\left(z + cy - \frac{bc - h}{e - a}\right)^{a - c} \cdot \left(z + ey - \frac{be - h}{c - a}\right)^{e - a} = K,$$

worin K die willkührliche Beständige ist.

12. Auch die Gleichung:

$$(z + ay)(ydz - zdy) + bydz - ((c + e)z + hy + ce)dy = 0$$

liefert zwei besondere Integrale $z = my + n$. Denn wenn man dies einsetzt, so entsteht:

$$((m + a)y + n)n - bmy + ((c + e)m + h)y + (c + e)n + ce = 0.$$

Zur Bestimmung von m und n hat man also die Gleichungen:

$$(n-b+c+e)m+an+h=0$$

und

$$n^2+(c+e)n+ce=0.$$

Daraus folgen die beiden besonderen Integrale:

$$z=\frac{ac-h}{e-b}y-c \quad \text{und} \quad z=\frac{ae-h}{c-b}y-e.$$

Um das vollständige Integral zu bilden, schreibe man die Differentialgleichung vortheilhafter in der Form:

$$(z+ay+b)ydz-(z^2+(ay+c+e)z+hy+ce)dy=0.$$

Man findet dann, weil $Y=-1$ ist, die Gleichung:

$$-\lambda dy+\lambda y\frac{b-c}{e-c}\cdot\frac{dz-\frac{ac-h}{e-b}dy}{z-\frac{ac-h}{e-b}y+c}+\lambda y\frac{b-e}{c-e}\cdot\frac{dz-\frac{ae-h}{c-b}dy}{z-\frac{ae-h}{c-b}y+e}=0.$$

Nimmt man $\lambda=\frac{e-c}{y}$, so entsteht das allgemeine Integral:

$$\left(z-\frac{ac-h}{e-b}y+c\right)^{b-c}.\left(z-\frac{ae-h}{c-b}y+e\right)^{e-b}=Ky^{e-c},$$

worin K die willkührliche Beständige vorstellt.

Wenn der integrirende Faktor der Gleichung:

$$(Zz^{n-1}+Z_1z^{n-2}+....+Z_{n-1})dz+(Yz^n+Y_1z^{n-1}+....+Y_n)dy=0$$

wieder unter der Gestalt:

$$k=\frac{\lambda}{(z-\mu)(z-\nu)(z-\pi)....}$$

angenommen wird, wenn aber der Nenner dieses Bruches aus weniger als n Faktoren besteht, so treten zwar dieselben Betrachtungen ein wie vorhin: allein es entsteht jetzt durch die Zerlegung in partielle Brüche die Gleichung:

$$\lambda(Vz^{m-1}+V_1z^{m-2}+....+V_{m-1})dz+\lambda(Yz^m+U_1z^{m-1}+....+U_m)dy$$

$$+\frac{\lambda\varphi(\mu,y)}{(\mu-\nu)(\mu-\pi)....}\cdot\frac{dz-d\mu}{z-\mu}+\frac{\lambda\varphi(\nu,y)}{(\nu-\mu)(\nu-\pi)....}\cdot\frac{dz-d\nu}{z-\nu}+....=0,$$

worin $VV_1....YU_1....$ Funktionen von y sind, welche durch die Multiplikation der ursprünglichen Differentialgleichung mit k zum Vorschein kommen. Damit dies ein vollständiges Differential sei, kommen zu den vorigen Bedingungen noch andere hinzu. Nachdem nämlich λ wie früher bestimmt worden ist, und dadurch

die Faktoren von $\frac{dz - d\mu}{z - \mu}$, $\frac{dz - d\nu}{z - \nu}$.... in beständige Grössen übergegangen sind, so muss ausserdem der erste Theil der vorliegenden Differentialgleichung für sich ein vollständiges Differential darstellen.

13. Es sei

$$(1 + yz + y^2)dz + (1 + yz + z^2)dy = 0.$$

Man genügt durch $z + y = 0$. Nimmt man $k = \frac{\lambda}{z + y}$, so entsteht:

$$y\lambda dz + z\lambda dy + \lambda \frac{dz + dy}{z + y} = 0.$$

Nimmt man $\lambda = 1$, so behält man die Gleichung:

$$ydz + zdy + \frac{dz + dy}{z + y} = 0.$$

Das allgemeine Integral ist demnach:

$$yz + l(z + y) = lc, \quad \text{oder} \quad e^{yz}(z + y) = c.$$

14. Es sei noch:

$$(z + y + a + b)ydz - (az - by)dy = 0.$$

Man genügt auch hier durch $z + y = 0$. Nimmt man desshalb $k = \frac{\lambda}{z + y}$, so entsteht:

$$y\lambda dz - a\lambda dy + (a + b)y\lambda \frac{dz + dy}{z + y} = 0.$$

Man hat hier $y\lambda = 1$ zu setzen, und man behält das vollständige Differential:

$$dz - a\frac{dy}{y} + (a + b)\frac{dz + dy}{z + y} = 0.$$

Daraus folgt dann das allgemeine Integral:

$$z - aly + (a + b)l(z + y) = lc, \quad \text{oder} \quad e^z(z + y)^{a+b} = cy^a.$$

Wenn die bisherige Annahme, wonach die Exponenten m, n.... des integrirenden Faktors $k = \lambda(z - \mu)^m(z - \nu)^n$.... gleich -1 zu setzen sind, nicht zum Ziel führt, so wird man dieselben vorerst noch unbestimmt lassen. Da dann aber auch in dem Werthe $\alpha_1 = \int Zkdz$ eine Unbestimmtheit in Bezug auf die durch die an-

gedeutete Integration entstehende Funktion von z vorkommt, was bei dem Gebrauch der Gleichung (e) sehr hinderlich ist, so wird man denn doch hier mit Vortheil zur Gleichung (c) zurückkehren, um nach den zuerst gegebenen Regeln die Grössen λ, m, n.... zu ermitteln. Nachdem man dieselben aufgefunden hat, schreite man zur Integration des vollständigen Differentials $Zkdz+Ykdy=0$.

15. Es sei

$$(z^2-a^2)ydz+(z^2+byz+a^2)czdy=0.$$

Man genügt hier durch $z=0$. Setzt man desshalb $z=\lambda z^m$, so erhält man zur Bestimmung von λ und m die Gleichung:

$$(c)\qquad (z^2-a^2)(y\frac{\lambda'}{\lambda}+1-c)-(m+2)(z^2+byz+a^2)c=0.$$

Daraus folgt $\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{c-1}{y}$, oder $\lambda=y^{c-1}$, und $m+2=0$. Man hat also den integrirenden Faktor $k=\frac{y^{c-1}}{z^2}$. Das vollständige Differential

$$(1-\frac{a^2}{z^2})y^c dz+((z+\frac{a^2}{z})y^{c-1}+by^c).cdy=0$$

liefert das allgemeine Integral in der Form:

$$(z+\frac{a^2}{z})y^c+\frac{bc}{c+1}y^{c+1}=e.$$

16. Es sei nun:

$$(a^2+yz+y^2)dz-(a^2+yz+z^2)dy=0.$$

Man genügt dieser Gleichung durch $z=y$. Setzt man $k=\lambda(z-y)^m$, so ist:

$$(c)\qquad (a^2+yz+y^2)\frac{\lambda'}{\lambda}+(m+3)(z+y)=0.$$

Daraus folgt $\lambda=1$, $m+3=0$, und also $k=\frac{1}{(z-y)^3}$. Das vollständige Differential ist:

$$\frac{(a^2+yz+y^2)dz}{(z-y)^3}-\frac{(a^2+yz+z^2)dy}{(z-y)^3}=0,$$

oder, wenn man in die partiellen Brüche zerlegt,

$$\frac{(a^2+2yz)dz}{(z-y)^3}-\frac{ydz}{(z-y)^2}-\frac{(a^2+2yz)dy}{(z-y)^3}-\frac{zdy}{(z-y)^2}=0.$$

Man findet daraus das allgemeine Integral:

$$\frac{a^2+2yz}{(z-y)^2}=c.$$

17. Die Gleichung:

$$a^2dz-(z^2-y^2+a^2)dy=0$$

kann durch die frühere Annahme integrirt werden, wenn zwei besondere Integrale vorliegen. Nun genügt man durch $z=y$. Es lässt sich aber nicht so leicht ein zweites besonderes Integral angeben. Man nehme desshalb $k=\lambda(z-y)^m$, und man findet zur Bestimmung von λ und m die Gleichung:

$$\text{(c)}\qquad a^2\frac{\lambda'}{\lambda}+m(z+y)+2z=0.$$

Daraus folgt $m+2=0$, und $\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{2y}{a^2}$ oder $\lambda=e^{\frac{y^2}{a^2}}$. Man hat also den integrirenden Faktor $k=e^{\frac{y^2}{a^2}}(z-y)^{-2}$, und das vollständige Differential:

$$\frac{e^{\frac{y^2}{a^2}}a^2dz}{(z-y)^2}-\frac{e^{\frac{y^2}{a^2}}(z^2-y^2+a^2)dy}{(z-y)^2}=0.$$

Daraus entsteht das allgemeine Integral:

$$\frac{a^2e^{\frac{y^2}{a^2}}}{z-y}+\int e^{\frac{y^2}{a^2}}dy=c.$$

18. Es sei noch

$$(y^2-a^2)dz-(yz+a\sqrt{z^2+y^2-a^2})dy=0.$$

Man genügt dieser Gleichung durch $z^2+y^2-a^2=0$. Desshalb nehme man $k=\lambda(z^2+y^2-a^2)^m$. Setzt man dies in die Gleichung (a) ein, so erhält man zur Bestimmung von λ und m:

$$(y^2-a^2)\frac{\lambda'}{\lambda}+(2m+3)y+\frac{(2m+1)az}{\sqrt{z^2+y^2-a^2}}=0.$$

Man genügt durch $2m+1=0$ und $(y^2-a^2)\frac{\lambda'}{\lambda}+(2m+3)y=0$. Man hat also $m=-\frac{1}{2}$, nnd $\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{-2y}{y^2-a^2}$, oder $\lambda=\frac{1}{y^2-a^2}$. Ferner ist $k=\frac{1}{(y^2-a^2)\sqrt{z^2+y^2-a^2}}$, und man gelangt zu dem vollständigen Differential:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+y^2-a^2}}-\frac{yzdy}{(y^2-a^2)\sqrt{z^2+y^2-a^2}}-\frac{ady}{y^2-a^2}=0.$$

Daraus findet man das allgemeine Integral:

$$l(z+\sqrt{z^2+y^2-a^2})-l(y-a)=lc,$$

oder

$$z+\sqrt{z^2+y^2-a^2}=c(y-a).$$

V. Allgemeines Integral, besondere Integrale und besondere Auflösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Veränderlichen.

Die allgemeinste Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit zwei Veränderlichen z und y hat die Form $Z\frac{d^2z}{dy^2}+Y=0$, worin Z und Y irgend Funktionen von z und y und des Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$ sind. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung lässt sich jedesmal in der Form $\alpha=c$ darstellen, worin α eine bestimmte Funktion der drei Veränderlichen z', z und y ist, c aber eine willkührliche Beständige bezeichnet. Denn durch Differentiation findet man:

$$\frac{d\alpha}{dz'}z''+\frac{d\alpha}{dz}z'+\frac{d\alpha}{dy}=0,$$

wenn man abkürzend $\frac{d^2z}{dy^2}=z''$ setzt. Theilt man dies noch mit einem Faktor k, welcher auch wieder eine bestimmte Funktion der drei Veränderlichen z', z und y ist, so entsteht:

$$\frac{d\alpha}{dz'}\frac{z''}{k}+\left(\frac{d\alpha}{dz}z'+\frac{d\alpha}{dy}\right)\frac{1}{k}=0.$$

Aus der Vergleichung mit der allgemeinsten Differentialgleichung $Zz''+Y=0$ ergeben sich die beiden Beziehungen:

$$\frac{d\alpha}{dz'}=Zk \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{dz}z'+\frac{d\alpha}{dy}=Yk,$$

denen man jederzeit genügen kann, weil die beiden daraus zu bestimmenden Funktionen α und k alle Grössen in sich aufnehmen dürfen, welche auch in den Coëfficienten Z und Y vorkommen.

Das allgemeine Integral der Gleichung $Zz'' + Y = 0$, welches auf diese Weise bestimmt worden, ist selbst wieder eine Differentialgleichung der ersten Ordnung. Man nennt dasselbe das erste Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wenn man nun auch das erste Integral $\alpha = c$ der Integration unterwirft, so findet man die endliche Gleichung zwischen den Veränderlichen, welche das zweite Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung heisst. Um diese zweite Integration durch die bisherigen Hülfsmittel auszuführen, wird man, da nun α irgend eine Funktiön von z', z und y vorstellt, die Gleichung $\alpha = c$ nach z' auflösen. Wenn dies $\alpha = c$ in Bezug auf z' eine Gleichung des $n$ten Grades ist, so wird man auf die angegebene Weise zu n verschiedenen Werthen $z' = f_1(z, y)$, $z' = f_2(z, y)\ldots$ gelangen. Durch deren Integration ergeben sich alsdann ebenso viele Integralformen

$$\alpha_1 + c_1 = 0, \ \alpha_2 + c_2 = 0\ldots,$$

von denen jede für sich eine andere willkührliche Beständige aufnimmt. Man kann aber alle diese Gleichungen, welche bezüglich den einzelnen Werthen z' entsprechen, in einer einzigen Gleichung vereinigen, indem man dieselben mit einander multiplizirt, und also $(\alpha_1 + c_1)(\alpha_2 + c_2)\ldots\ldots = 0$ setzt. In dieser Gleichung, welche ausser der durch die erste Integration eingeführten willkührlichen Beständigen c noch n andere willkührliche Beständige c_1, $c_2\ldots$ enthält, darf man weiter die letzteren willkührlichen Beständigen alle einander gleichsetzen. Dadurch geht wenigstens nichts verloren, was nicht jederzeit wieder ersetzt werden könnte. Man erlangt andererseits durch die Annahme $c_1 = c_2 = \ldots$ den Vortheil, dass man anstatt der Integralform $(\alpha_1 + c_1)(\alpha_2 + c_2)\ldots = 0$ eine andere viel einfachere Form hat. Was aber die Wiederherstellung der allgemeinen Integralform betrifft, so bemerke man zunächst, dass man durch die erwähnte Annahme auf eine Gleichung des $n$ten Grades in Bezug auf c_1 geführt wird. Indem man diese Gleichung nach c_1 auflöst, und nachträglich den einzelnen willkührlichen Beständigen c_1 wieder verschiedene Werthe zutheilt, kommt man auf jene Gleichungen $\alpha_1 + c_1 = 0$, $\alpha_2 + c_2 = 0\ldots$ zurück, deren Gesammtheit das allgemeine Integral darstellt. Es ist auch gestattet, um die Integralform $(\alpha_1 + c_1)(\alpha_2 + c_2)\ldots = 0$ noch weiter zu vereinfachen, sich der allgemeineren Annahme $c_1 = \varphi_1(e)$, $c_2 = \varphi_2(e)\ldots$ zu bedienen, worin e eine willkührliche Beständige, und φ_1, $\varphi_2\ldots$ willkührliche Funktionen vorstellen. Denn auch so lassen sich durch die Auflösung nach e jene Integralformen

$$\alpha_1 + c_1 = 0, \ \alpha_2 + c_2 = 0\ldots$$

einzeln wieder auffinden. Eine Differentialgleichung der ersten

Ordnung heisst eine des $n$ten Grades, wenn der Differentialquotient z' auf dem $n$ten Grade darin vorkommt. Unter der vorhin gemachten Beschränkung kann also das allgemeine Integral einer solchen Differentialgleichung als eine Beziehung zwischen den Veränderlichen angesehen werden, welche in Bezug auf die darin vorkommende willkührliche Beständige eine Gleichung des $n$ten Grades darstellt.

Hat man z. B. die Differentialgleichung des zweiten Grades:

$$zz'^2+2yz'=z,$$

so findet man durch die Auflösung nach z' die beiden Werthe

$$zz'+y=\pm\sqrt{z^2+y^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{zz'+y}{\sqrt{z^2+y^2}}=\pm 1.$$

Durch Integration entstehen die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{z^2+y^2}+c_1+y=0 \quad \text{und} \quad \sqrt{z^2+y^2}+c_2-y=0.$$

Diese lassen sich vereinigen in der einzigen:

$$(\sqrt{z^2+y^2}+c_1+y)(\sqrt{z^2+y^2}+c_2-y)=0.$$

Nimmt man darin $c_1+c_2=0$, so hat man die einfachere Gleichung:

$$z^2+y^2-(c_1+y)^2=0, \quad \text{oder} \quad z^2=2c_1y+c_1^2,$$

welche als allgemeines Integral der obigen Differentialgleichung des zweiten Grades angesehen werden darf. Durch die Auflösung nach c_1 erhält man wieder jene beiden ursprünglichen Integralformen, indem man die willkührliche Beständige c_1 in jeder der beiden Lösungen verschieden denkt.

Das bis dahin auseinandergesetzte Verfahren, eine Differentialgleichung der ersten Ordnung und des $n$ten Grades zu integriren, zeigt keine anderen Schwierigkeiten als diejenigen, welche die Auflösung einer algebraischen Gleichung des $n$ten Grades und die früher gegebenen Integrationsverfahren mit sich bringen. Man wird aber die gemachten Bemerkungen gerade hier an der passenden Stelle finden, nachdem man sich überzeugt hat, dass nur die Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung uns in den Stand setzt, das allgemeine Integral einer Differentialgleichung der ersten Ordnung und des $n$ten Grades viel schneller zu erreichen, indem man nicht allein der Mühe überhoben ist, die Wurzeln der Gleichung des $n$ten Grades zu bestimmen, sondern das allgemeine Integral sogar unmittelbar in jener einfacheren Form darstellt, welche

selbst wieder in Bezug auf die willkührliche Beständige eine Gleichung des $n$ten Grades ist. Es stellt sich dabei auch heraus, dass dieses Integrationsverfahren mit nicht geringerem Erfolg auf solche Fälle ausgedehnt wird, für welche das zuerst angegebene Verfahren nicht ausreicht, weil die Differentialgleichung der ersten Ordnung $\alpha = c$ in Bezug auf das Vorkommen von z' von solcher Beschaffenheit ist, dass z' nicht mehr daraus entwickelt werden kann.

Das Integrationsverfahren, welches also jetzt auseindergesetzt werden soll, steht in naher Beziehung zu denjenigen Rechnungen, wodurch man aus dem zweiten Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung $Zz'' + Y = 0$ diese selbst wieder ableitet. Indem wir uns auf die vorhin gemachten Auseinandersetzungen stützen, dürfen wir hier von der Voraussetzung ausgehen, dass das zweite Integral durch irgend eine Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen z und y und zweien willkührlichen Beständigen sich darstellt. Um nun aber von diesem Integral zu der Differentialgleichung der zweiten Ordnung $Zz'' + Y = 0$ überzugehen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Man kann nämlich durch die erste Differentiation ebensowohl die eine willkührliche Beständige c als auch die andere c_1 zum Verschwinden bringen. Wollte man die Beständige c_1, welche in dem zweiten Integral auf dem $n$ten Grade vorkommen mag, zuerst wegbringen, so könnte man vor Allem die verschiedenen Auflösungen $\alpha_1 + c_1 = 0$, $\alpha_2 + c_1 = 0 \ldots$ bestimmen. Durch Differentiation würde man in jeder einzelnen die willkührliche Beständige c_1 entfernen, und man erhielte die der ursprünglichen Integralform entsprechende Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche in Bezug auf z' vom $n$ten Grade ist, indem man jene n Differentialgleichungen des ersten Grades mit einander multiplizirt. Man findet aber dieselbe Differentialgleichung des $n$ten Grades auf einem kürzeren Wege. Man differentiire in dieser Absicht die ursprüngliche Integralform, welche durch $\beta = 0$ vorgestellt sein mag, in der vorliegenden Form, und man erhält

$$\frac{d\beta}{dz} z' + \frac{d\beta}{dy} = 0.$$

Die Elimination der willkührlichen Beständigen c_1 zwischen den beiden Gleichungen $\beta = 0$ und $\frac{d\beta}{dz} z' + \frac{d\beta}{dy} = 0$ führt alsdann zu demselben Resultate, welches man auch durch die vorhin angegebenen Rechnungen erhalten würde. Es ist einleuchtend, dass man dies Verfahren, die Differentialgleichung aus dem allgemeinen Integrale $\beta = 0$ zu bilden, ohne Anstand auch auf diejenigen Fälle aus-

dehat, in welchen die Gleichung $\beta=0$ in Bezug auf das Vorkommen von c_1 von solcher Beschaffenheit ist, dass der Werth c_1 nicht mehr daraus entwickelt werden kann.

Um die Gleichung $z^2=2c_1y+c_1^2$, von der man oben gesehen hat, dass sie das allgemeine Integral der Gleichung $z=2yz'+zz'^2$ darstellt, wieder als Beispiel zu benutzen, so differentiire man dieselbe. Man findet $zz'=c_1$. Wenn man nun aber die willkührliche Beständige c_1 zwischen den beiden Gleichungen:

$$z^2=2c_1y+c_1^2 \quad \text{und} \quad zz'=c_1$$

eliminirt, so kommt man in der That auf die obige Differentialgleichung des zweiten Grades $z=2yz'+zz'^2$ zurück.

Je nachdem nun aber die eine willkührliche Beständige c oder die andere willkührliche Beständige c_1 des zweiten Integrals durch die erste Differentiation entfernt wird, gelangt man zu zwei verschiedenen Differentialgleichungen der ersten Ordnung. Diese beiden Differentialgleichungen führen aber, wenn man durch eine zweite Differentiation die jedesmal noch zurückgebliebene willkührliche Beständige wegschafft, auf ein und dieselbe Differentialgleichung der zweiten Ordnung.

Hat man z. B. die Gleichung $z=cy^a+c_1y^{-a}$, so findet man, wenn man durch Differentiation die Beständige c_1 entfernt, die Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$yz'+az=2acy^a.$$

Wenn man durch eine zweite Differentiation auch die Beständige c entfernt, so entsteht die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y^2z''+yz'=a^2z.$$

Bringt man nun aber durch die erste Differentiation die Beständige c weg, so entsteht die Differentialgleichung der ersten Ordnung:

$$yz'-az=-2ac_1y^{-a},$$

woraus dieselbe Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$y^2z''+yz'=a^2z$$

hervorgeht, wenn man durch die zweite Differentiation die zurückgebliebene Beständige c_1 tilgt.

Dies sind also diejenigen Rechnungen, wodurch man die Dif-

ferentialgleichung der zweiten Ordnung wieder auffindet, wenn deren zweites Integral vorliegt. Der zweifache Weg, auf welchem man zu diesem Ziele gelangt, erklärt zunächst die Thatsache, dass jede Differentialgleichung der zweiten Ordnung von zwei verschiedenen Differentialgleichungen der ersten Ordnung abgeleitet werden kann. Denn wenn man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung durch Integration in eine Differentialgleichung der ersten Ordnung umwandelt, so ist kein Grund vorhanden, warum gerade die eine und nicht ebenso gut die andere der beiden wegfallenden Beständigen zuerst wieder eingeführt werden sollte. Diese beiden ersten Integrale sind aber, wie man jetzt einsieht, in Bezug auf die durch dieselben dargestellte Abhängigkeit zwischen den Veränderlichen nicht wesentlich von einander verschieden. Die zweiten Integrationen liefern ein und dieselbe endliche Gleichung.

Wenn man nun aber die vorhin gegebenen Vorschriften, wonach man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung aus dem zweiten Integral zu bilden hat, bestimmter in's Auge fasst, so liegt der Gedanke nicht fern, dass man das zweite Integral selbst angeben kann, wenn die beiden ersten Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung vorliegen. Die beiden ersten Integrale werden nämlich dadurch aufgefunden, dass man das zweite Integral $\beta = 0$ geradezu differentiirt, und dass man alsdann das einemal die erste, das anderemal die zweite willkührliche Beständige zwischen der Differentialgleichung $\frac{d\beta}{dz} z' + \frac{d\beta}{dy} = 0$ und dem zweiten Integral $\beta = 0$ eliminirt. Jedes der beiden ersten Integrale kann demnach als das Resultat der Elimination derjenigen willkührlichen Beständigen angesehen werden, welche gleichzeitig in dem andern ersten Integrale und in dem zweiten Integrale vorkommt. Man wird desshalb das zweite Integral selbst aus den beiden ersten Integralen auffinden, indem man den Differentialquotienten z' zwischen den beiden ersten Integralen eliminirt.

Es ist vorhin gezeigt worden, dass die Gleichung

$$z = cy^a + c_1 y^{-a}$$

das zweite Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y^2 z'' + yz' = a^2 z$$

darstellt. Die beiden ersten Integrale zeigen sich in den Formen:

$$yz' + az = 2acy^a \quad \text{und} \quad yz' - az = -2ac_1 y^{-a}.$$

Wenn man daraus z' eliminirt, so kommt man in der That zurück auf das zweite Integral:

$$z = cy^a + c_1 y^{-a}.$$

Da man jetzt die Ueberzeugung gewonnen hat, dass man aus den beiden ersten Integralen einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung deren zweites Integral durch die Elimination von z' erhält, so versteht es sich, dass man auch zu dem allgemeinen Integrale irgend einer Differentialgleichung erster Ordnung $\gamma = 0$ gelangt, ohne vorher nach z' aufgelöst zu haben. Man betrachte in dieser Absicht die Gleichung $\gamma = 0$ als das erste Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche durch die Differentiation der Gleichung $\gamma = 0$ wieder zum Vorschein kommt. Unter welche Gestalt man diese Gleichung vor der Differentiation auch immer gebracht haben mag, oder welche Elimination man auch immer zwischen den beiden Gleichungen

$$\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\gamma}{dz'} z'' + \frac{d\gamma}{dz} z' + \frac{d\gamma}{dy} = 0$$

ausführen mag, wenn es gelingt, ein anderes erstes Integral $\gamma_1 = 0$ für die so entstehende Differentialgleichung der zweiten Ordnung anzugeben, so bedarf es nur der Elimination von z' zwischen den beiden Gleichungen $\gamma = 0$ und $\gamma_1 = 0$, um das allgemeine Integral der Gleichung $\gamma = 0$ zu erhalten.

Nachdem man auf diese Weise zur vollständigen Kenntniss des zweiten Integrals einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung gelangt ist, wird man zunächst wieder untersuchen, wie man die besonderen Integrale und die besonderen Auflösungen einer solchen Differentialgleichung auffindet.

Jeder Werth z', welcher aus dem ersten Integral $\alpha = c$ einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung $Zz'' + Y = 0$ entwickelt werden kann, nachdem man der willkührlichen Beständigen c irgend einen besonderen Werth beigelegt hat, genügt auch der Differentialgleichung zweiter Ordnung, und heisst ein besonderes Integral dieser Differentialgleichung. Wenn dagegen eine Funktion von z und y der Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, und wenn diese Eigenschaft der Funktion dem Umstande zugeschrieben werden muss, dass ein Glied des ersten Integrals $\alpha = c$ mit dem Faktor $(z - \mu)^m$ verbunden ist, worin μ jene Funktion von z und y bedeutet, und m eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist, so nennt man dieselbe, dem Früheren analog, eine besondere Auflösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Alle diese besonderen Integrale und besonderen Auflösungen sind durch Differentialgleichungen der ersten Ordnung dargestellt, und haben als solche selbst wieder ihre besonderen Integrale und besonderen Auflösungen. Nun ist einleuchtend, dass jede Funktion von y, welche an der Stelle von z irgend eine dieser Differentialgleichungen der ersten Ordnung befriedigt, auch jener Differentialgleichung der zweiten Ordnung genügen wird. Eine solche Funktion von y muss aber stets wieder als eine besondere Auflösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung angesehen werden, wenn sie aus einer von denjenigen Differentialgleichungen der ersten Ordnung ihren Ursprung nimmt, welche selbst besondere Auflösungen sind. Wenn dagegen die Funktion von y einer Differentialgleichung der ersten Ordnung genügt, welche selbst ein besonderes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so kann dieselbe ebensowohl ein besonderes Integral als auch eine besondere Auflösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung sein. Man sieht übrigens ein, dass alle möglichen Funktionen von y, welche an der Stelle von z die Differentialgleichung der zweiten Ordnung befriedigen, und welche zugleich in die zuletzt besprochene Klasse gehören, indem sie für irgend einen besonderen Werth der willkührlichen Beständigen c auch dem ersten Integral $\alpha = c$ genügen, aus dem zweiten Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung nach den schon bekannten Regeln abgeleitet werden können. Dagegen bedarf man zur Bestimmung aller derjenigen besonderen Auflösungen, welche aus einer Differentialgleichung der ersten Ordnung hervorgehen, welche selbst besondere Auflösung ist, jedesmal auch der Kenntniss des ersten Integrals $\alpha = c$.

Hat man z. B. das erste Integral:

$$yz' = c + \sqrt{y^2z'^2 - z^2},$$

worin c die willkührliche Beständige ist, so erhält man die zugehörige Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$yz'' + z' = \frac{yz'(yz'' + z') - zz'}{\sqrt{y^2z'^2 - z^2}},$$

oder, wenn man den Nenner wegbringt,

$$(yz' - \sqrt{y^2z'^2 - z^2})(yz'' + z') = zz'.$$

oder auch, wenn man noch mit $\frac{yz' + \sqrt{y^2z'^2 - z^2}}{z}$ multiplizirt,

$$z(yz'' + z') = z'(yz' + \sqrt{y^2z'^2 - z^2}).$$

Um das zweite Integral dieser Differenzialgleichung zweiter Ordnung zu bestimmen, entwickle man z' aus dem oben angesetzten ersten Integral. Man erhält:

$$2cyz' = z^2 + c^2, \quad \text{oder} \quad \frac{2cdz}{z^2 + c^2} = \frac{dy}{y},$$

und daraus das zweite Integral:

$$2\,\text{arctg}\frac{z}{c} = l(c_1 y), \quad \text{oder} \quad z = c\,.\,\text{tg}\, l\sqrt{c_1 y}\,.$$

Doch lassen sich hieraus nicht alle Funktionen von y ableiten, welche jener Differentialgleichung der zweiten Ordnung an der Stelle von z genügen. Denn das erste Integral $yz' = c + \sqrt{y^2 z'^2 - z^2}$ liefert ausserdem die beiden besonderen Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$yz' - z = 0 \quad \text{und} \quad yz' + z = 0.$$

Durch deren Integration entsteht:

$$z = c_2 y \quad \text{und} \quad z = \frac{c_3}{y},$$

worin c_2 und c_3 willkührliche Beständige sind.

Um diejenigen besonderen Auflösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung $Zz'' + Y = 0$ zu bestimmen, welche auch dem ersten Integral $\alpha = c$ als solche genügen, wird man das zweite Integral $\beta = 0$, welches irgend eine Funktion von z, y, c und c_1 ist, nach der durch die zweite Integration eingeführten willkührlichen Beständigen auflösen. Wenn dadurch Glieder zum Vorschein kommen, welche mit dem Faktor $(z - \mu)^m$ verbunden sind, und wenn m eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist, so ist bekanntlich $z - \mu = 0$ eine besondere Auflösung des ersten Integrals $\alpha = c$. Man wird aber oftmals vortheilhafter einen anderen Weg einschlagen, welcher auch zu diesen besonderen Auflösungen führt, dabei aber die Auflösung des zweiten Integrals $\beta = 0$ nach der willkührlichen Beständigen c_1 umgeht. Um diesen Weg kennen zu lernen, stelle man das aus der Entwicklung von c_1 entstehende Resultat durch die Gleichung $\alpha_1 = c_1$ vor. Wenn sich nun auf die vorhin bezeichnete Weise eine besondere Auflösung $z = \mu$ findet, so wird das Glied $\frac{d\alpha_1}{dz}$ in dem vollständigen Differential $\frac{d\alpha_1}{dz} z' + \frac{d\alpha_1}{dy}\, dy = 0$ jedenfalls den Werth ∞ annehmen, sobald man darin $z = \mu$ setzt. Wenn nun zwar nicht auch umgekehrt alle diejenigen Werthe z,

für welche jenes Glied $\frac{d\alpha_1}{dz}$ den Werth ∞ annimmt, als besondere Auflösungen des ersten Integrals $\alpha = c$ sich herausstellen werden, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass alle besonderen Auflösungen unter jenen Werthen z sich vorfinden. Wenn man nun weiter die Gleichung $\alpha_1 = c_1$ nach z und c_1 differentiirt, so entsteht

$$\frac{d\alpha_1}{dz} = \frac{dc_1}{dz}.$$

Daraus folgt, dass jenes Glied $\frac{d\alpha_1}{dz}$ des vollständigen Differentials

$$\frac{d\alpha_1}{dz}dz + \frac{d\alpha_1}{dy}dy = 0$$

identisch ist mit dem aus $\alpha_1 = c_1$ gezogenen Differentialquotienten $\frac{dc_1}{dz}$. Man kann desshalb auch sagen, dass alle besonderen Auflösungen des ersten Integrals $\alpha = c$ zum Vorschein kommen, wenn man den aus dem zweiten Integral $\alpha_1 = c_1$ gezogenen Differentialquotienten $\frac{dc_1}{dz}$ den Werth ∞, oder auch, wenn man den Differentialquotienten $\frac{dz}{dc_1}$ den Werth 0 annehmen lässt. Mit diesen Bemerkungen ist aber die vorhin ausgesprochene Behauptung, dass man die besonderen Auflösungen der Differentialgleichung $\alpha = c$ auch bestimmen könne, ohne vorher deren Integral $\beta = 0$ nach der willkührlichen Beständigen c_1 aufgelöst zu haben, gerechtfertigt, da man weiss, dass der Differentialquotient $\frac{dz}{dc_1}$ keineswegs aus der entwickelten Gleichung $\alpha_1 = c_1$ abgeleitet werden muss, sondern auch aus der unentwickelten Form $\beta = 0$ aufgefunden wird. Man differentiirt nämlich die Gleichung $\beta = 0$ auch wieder nach z und c_1. Dadurch entsteht

$$\frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dc_1} + \frac{d\beta}{dc_1} = 0.$$

Man eliminirt c_1 zwischen den beiden Gleichungen

$$\beta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dc_1} + \frac{d\beta}{dc_1} = 0,$$

und man gelangt zu demselben Werthe $\frac{dz}{dc_1}$, welchen man unmittelbar aus der entwickelten Form $\alpha_1 = c_1$ finden würde. Um

also die besonderen Auflösungen der Gleichungen $\alpha = c$ auf diesem Wege zu erhalten, mache man in der Gleichung

$$\frac{d\beta}{dz}\frac{dz}{dc_1} + \frac{d\beta}{dc_1} = 0$$

vor Allem die Annahme $\frac{dz}{dc_1} = 0$. Man eliminire alsdann c_1 zwischen der dadurch entstehenden Gleichung und der Gleichung $\beta = 0$. Das Resultat der Elimination enthält alle besonderen Auflösungen der Gleichung $\alpha = c$.

Um dies auf die schon oben benutzte Differentialgleichung $zz'^2 + 2yz' = z$ anzuwenden, differentiire man deren Integral $z^2 = 2c_1y + c_1^2$ nach z und nach c_1. Man erhält $z\frac{dz}{dc_1} = y + c_1$. Für $\frac{dz}{dc_1} = 0$ hat man $y + c_1 = 0$. Wenn man nun c_1 zwischen $y + c_1 = 0$ und $z^2 = 2c_1y + c_1$ eliminirt, so findet man $z^2 + y^2 = 0$, was in der That eine besondere Auflösung der obigen Differentialgleichung ist.

VI. Reduktion der Differentialgleichung $Zz'' + Y = 0$ auf eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen.

Um die Differentialgleichung der zweiten Ordnung $Zz'' + Y = 0$, worin Z und Y irgend Funktionen der drei Veränderlichen z', z und y sind, aus dem ersten Integral $\alpha = c$ abzuleiten, muss man dies, wie oben gezeigt worden ist, differentiiren, und das vollständige Differential

$$\frac{d\alpha}{dz'}z'' + \frac{d\alpha}{dz}z' + \frac{d\alpha}{dy} = 0$$

mit einer Grösse k theilen, welche selbst wieder eine bestimmte Funktion der drei Veränderlichen z', z und y ist. Wenn $k = 1$ ist, oder wenn die Gleichung $Zz'' + Y = 0$ ein vollständiges Differential darstellt, so kommen bei der Integration keine weiteren Schwierigkeiten vor. Man hat desshalb hier, ebenso wie bei der Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung im Wesentlichen wieder nur die Aufgabe, jenen Faktor k zu ersetzen, welcher die Differentialgleichung zu einem vollständigen Differential macht, und desshalb der integrirende Faktor genannt wird.

In vielen Fällen lässt sich die Differentialgleichung der zwei-

ten Ordnung $Zz''+Y=0$ in eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen umwandeln. Wenn diese Umwandlung gelungen ist, dann ist die Integration nur davon abhängig, dass man nach den früher gegebenen Regeln den integrirenden Faktor der Differentialgleichung erster Ordnung auffindet. Was also in solchen Fällen bei der Integration der Gleichung $Zz''+Y=0$ zu den früheren Untersuchungen noch hinzukommt, ist nichts weiter als die Ausführung der erwähnten Umwandlung. Dies soll denn auch den Gegenstand der folgenden Untersuchungen ausmachen.

Da das erste Integral $\alpha=c$ irgend eine Funktion der drei Veränderlichen z', z und y vorstellt, so bestimmt sich der Differentialquotient z' durch die Differentialgleichung der zweiten Ordnung als Funktion von z und y. Wenn aber z' als Funktion von z und y gedacht wird, so erhält man durch Differentiation, da hierbei z als Funktion von y angesehen werden muss, den Werth

$$z''=\frac{dz'}{dz}z'+\frac{dz'}{dy}.$$

Wenn dies in die Gleichung $Zz''+Y=0$ eingesetzt wird, so geht dieselbe über in die Differentialgleichung der ersten Ordnung:

$$\text{(a)} \qquad Z.\left(\frac{dz'}{dz}z'+\frac{dz'}{dy}\right)+Y=0,$$

worin die drei Veränderlichen z', z und y Platz nehmen. Wenn aber von diesen drei Veränderlichen entweder z oder y in den Coëfficienten Z und Y der Differentialgleichung fehlt, so behält man zur Bestimmung des ersten Integrals $\alpha=c$ jedesmal eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen. Denn wenn die Veränderliche z in der Gleichung (a) nicht vorkommt, so darf man annehmen, dass dieselbe auch in dem ersten Integral fehlt, und desshalb $\frac{dz'}{dz}=0$ setzen. Man behält dann die Gleichung:

$$Zdz'+Ydy=0.$$

Wenn die Veränderliche y in der Gleichung (a) nicht vorkommt, so ist die Annahme $\frac{dz'}{dy}=0$ gestattet und man behält die Gleichung:

$$Zz'dz'+Ydz=0.$$

Wenn die Coëfficienten Z und Y gleichzeitig die drei Verän-

derlichen z', z und y einschliessen, so wird man gewisse Funktionen von z', z und y als neue Veränderliche in die Gleichung

$$(a) \qquad Z\left(\frac{dz'}{dz}z' + \frac{dz'}{dy}\right) + Y = 0$$

einführen. Wenn die dazu benutzten Funktionen die Eigenschaft besitzen, dass das erste Integral $\alpha = c$ selbst nur zwei von den neuen Veränderlichen einschliesst, indem nämlich durch die Elimination von irgend zweien der ursprünglich Veränderlichen z', z und y zugleich die dritte hinaus fällt, dann wird sich durch die erwähnte Transformation nothwendig auch die Differentialgleichung (a) auf eine Weise umgestalten, dass nur zwei Veränderliche darin Platz nehmen. Was nun aber die zu einer solchen Transformation geeigneten Funktionen betrifft, so wird man sich aus den schon in dem Früheren angegebenen Rücksichten jedenfalls mit gutem Erfolg der besonderen Integrale und besonderen Auflösungen der Gleichung $Zz'' + Y = 0$ bedienen, mögen dieselben nun den Differentialquotienten z' als Funktion von z und y ausdrücken, oder mögen dieselben nur eine Abhängigkeit zwischen den beiden Veränderlichen z und y darstellen. Da nämlich jedesmal ein Faktor, oder auch ein mit einem Bruchexponenten behaftetes Glied des ersten Integrals $\alpha - c = 0$ in eine Funktion einer einzigen Veränderlichen übergeht, wenn man ein besonderes Integral oder eine besondere Auflösung zur Elimination einer der ursprünglichen Veränderlichen benutzt, so ist eine solche Funktion jedesmal auch ganz besonders dazu geeignet, bei der Elimination irgend einer der ursprünglichen Veränderlichen zugleich eine zweite aus dem ersten Integral $\alpha = c$ verschwinden zu lassen. Es versteht sich übrigens, dass jede der drei Veränderlichen z', z und y wenigstens in einer von den beiden neuen Veränderlichen vorkommen muss, da nach der Voraussetzung das erste Integral jene drei Veränderliche gleichzeitig einschliesst.

Soll nun in der Gleichung (a) an die Stelle der abhängigen Veränderlichen z' die neue Veränderliche x eintreten, und hat man die Gleichung $z' = f(x, z, y)$, so bilde man durch Differentiation die beiden Werthe:

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dz} + \frac{df}{dz}; \quad \text{und} \quad \frac{dz'}{dy} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dy} + \frac{df}{dy}.$$

Die Gleichung (a) geht dadurch über in:

$$Z\frac{df}{dx}\cdot\left(\frac{dx}{dz}z' + \frac{dx}{dy}\right) + Z\left(\frac{df}{dz}z' + \frac{df}{dy}\right) + Y = 0.$$

woraus x im Allgemeinen als Funktion von z und y hervorgeht, nachdem man noch den Werth $z' = f(x, z, y)$ eingesetzt hat. Wenn aber in den Coëfficienten dieser Gleichung die Veränderliche z nicht mehr vorkommt, nachdem man $\frac{dx}{dz} = 0$ gesetzt hat, oder wenn die Veränderliche y fehlt, nachdem man $\frac{dx}{dy} = 0$ gesetzt hat, so behält man zur Bestimmung des ersten Integrals eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen.

Soll aber eine der unabhängigen Veränderlichen, etwa z, durch die neue Veränderliche v ersetzt werden, welche sich aus der Gleichung $v = f(z, y)$ bestimmt, so setze man, da nun z' nicht mehr als Funktion von z und y, sondern als Funktion von v und y angesehen werden soll,

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{dz'}{dv}\frac{dv}{dz}, \quad \text{und} \quad \frac{dz'}{dy} = \frac{dz'}{dv}\frac{dv}{dy} + \frac{dz'}{dy},$$

und man gelangt zu der neuen Gleichung:

$$Z\left(\frac{dv}{dz}z' + \frac{dv}{dy}\right)\frac{dz'}{dv} + Z\frac{dz'}{dy} + Y = 0,$$

worin noch der obige Werth v einzusetzen ist. Damit dieselbe in eine Differentialgleichung mit nur zwei Veränderlichen übergehe, müssen deren Coëfficienten durch die Annahme $\frac{dz'}{dy} = 0$ von y, oder auch durch die Annahme $\frac{dz'}{dv} = 0$ von v frei werden.

Wenn auch der Differentialquotient z' in derjenigen Veränderlichen Platz nimmt, welche an die Stelle von z oder y in die Gleichung (a) eingeführt werden soll, so schreibt man dieselbe, um diese Transformation auszuführen, vortheilhafter in einer anderen Form. Man bestimmt nämlich die Differentialquotienten $\frac{dz'}{dz}$ und $\frac{dz'}{dy}$ aus dem ersten Integral $\alpha = c$, indem man dasselbe vorerst nach z' und z, sodann nach z' und y differentiirt. Dadurch entstehen die beiden Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dz'}\frac{dz'}{dz} + \frac{d\alpha}{dz} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{dz'}\frac{dz'}{dy} + \frac{d\alpha}{dy} = 0.$$

Setzt man die daraus gewonnenen Werthe $\frac{dz'}{dz}$ und $\frac{dz'}{dy}$ in die Gleichung (a) ein, so hat man die neue Gleichung:

(b) $$Z\left(\frac{d\alpha}{dz}z' + \frac{d\alpha}{dy}\right) - Y\frac{d\alpha}{dz'} = 0.$$

Man bringt hier aber leicht an die Stelle von z oder von y eine neue Veränderliche, welche selbst als Funktion von z', z und y gedacht wird. Gebraucht man z. B. zur Elimination von z die Gleichung $v = f(z', z, y)$, so hat man die folgenden Vertauschungen vorzunehmen:

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\alpha}{dv}\frac{dv}{dz}, \qquad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\alpha}{dv}\frac{dv}{dy} + \frac{d\alpha}{dy},$$

$$\frac{d\alpha}{dz'} = \frac{d\alpha}{dv}\frac{dv}{dz'} + \frac{d\alpha}{dz'}.$$

Man erhält dadurch die neue Gleichung:

$$\left(Z\left(\frac{dv}{dz}z' + \frac{dv}{dy}\right) - Y\frac{dv}{dz'}\right)\frac{d\alpha}{dv} + Z\frac{d\alpha}{dy} - Y\frac{d\alpha}{dz'} = 0,$$

woraus α als Funktion von z', v und y hervorgeht. Wenn man aber irgend einen der vorkommenden Differentialquotienten von α gleich Null setzt, und wenn die entsprechende unabhängige Veränderliche in den übrig gebliebenen Coëffizienten fehlt, so hat man zur Bestimmung des ersten Integrals $\alpha = c$ wieder eine Differentialgleichung der ersten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen.

1. Es sei $yz'^2 = zz' + a$.

Man bildet die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(2yz' - z)z'' = 0, \quad \text{oder auch} \quad z'' = 0.$$

Durch Integration entsteht $z' = c$. Wenn man diesen Werth z' in die ursprüngliche Differentialgleichung einsetzt, so erhält man deren allgemeines Integral in der Form:

$$c^2 y = cz + a.$$

2. Es sei $\frac{1}{z'^2} = \frac{2b}{z'} + ay$.

Durch Differentiation erhält man:

$$\left(\frac{1}{z'^3} - \frac{b}{z'^2}\right) . 2z'' + a = 0.$$

Da hier weder z noch y vorkommt, so darf man bei der Integration ebensowohl $\frac{dz'}{dz} = 0$ als auch $\frac{dz'}{dy} = 0$ annehmen. Die Annahme $\frac{dz'}{dz} = 0$

führt auf die ursprüngliche Differentialgleichung zurück. Nimmt man aber $\frac{dz'}{dy}=0$, so entsteht:

$$\left(\frac{1}{z'^2}-\frac{b}{z'}\right)\cdot 2dz'+adz=0.$$

Man findet durch Integration:

$$az+c=\frac{2}{z'}-2bl\frac{1}{z'}.$$

Um nun z' zwichen den beiden Differentialgleichungen der ersten Ordnung zu eliminiren, entwickele man aus der ersteren den Werth $\frac{1}{z'}=b\pm\sqrt{b^2+ay}$. Man setze denselben in die letztere ein, und man erhält dadurch das allgemeine Integral der ersteren Gleichung in der Form:

$$az+c=2b\pm 2\sqrt{b^2+ay}-2b\,l(b\pm\sqrt{b^2+ay}).$$

3. Es sei nun $y=\frac{a}{\sqrt{1+z'^2}}+\frac{az'.\operatorname{arctg} z'}{\sqrt{1+z'^2}}$.

Durch Differentiation findet man:

$$1=\frac{az''.\operatorname{arctg} z'}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nimmt man hier $\frac{dz'}{dy}=0$, so hat man die Gleichung:

$$dz=\frac{az'dz'.\operatorname{arctg} z'}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man findet durch Integration:

$$z+c=\frac{az'}{\sqrt{1+z'^2}}-\frac{a.\operatorname{arctg} z'}{\sqrt{1+z'^2}}.$$

Um z' zwischen den beiden Differentialgleichungen der ersten Ordnung zu eliminiren, eliminire man vorerst $\operatorname{arctg} z'$. Man erhält:

$$y+(z+c)z'=a\sqrt{1+z'^2}.$$

Wollte man nun aber den daraus entwickelten Werth z' in eine der beiden vorigen Gleichungen einsetzen, so käme eine andere Gleichung zum Vorschein, welche weder nach z noch nach y aufgelöst werden kann. Man denke sich deshalb z' als die unab-

hängige Veränderliche, und berechne für jedes einzelne z' die zusammengehörigen Werthe z und y.

4. Es sei nun $y^2z''+(1-a-b)yz'+abz=0$.

Man genügt dieser Gleichung durch $z'=\frac{mz}{y}$, worin m eine Beständige ist. Denn man hat $z''=\frac{mz'}{y}-\frac{mz}{y^2}$, und erhält zur Bestimmung von m die quadratische Gleichung $m^2-(a+b)m+ab=0$. Man bediene sich desshalb zur Elimination von z' der Gleichung $z'=\frac{xz}{y}$. Daraus folgt:

$$z''=\left(\frac{dx}{dz}z'+\frac{dx}{dy}\right)\frac{z}{y}+\frac{xz'}{y}-\frac{xz}{y^2}=\left(\frac{dx}{dz}\frac{xz}{y}+\frac{dx}{dy}\right)\frac{z}{y}+\frac{x^2z}{y^2}-\frac{xz}{y^2},$$

und man hat die neue Gleichung:

$$xz\frac{dx}{dz}+y\frac{dx}{dy}+x^2-(a+b)x+ab=0.$$

Nimmt man nun $\frac{dx}{dz}=0$, so behält man die gesonderte Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x^2-(a+b)x+ab}=0.$$

Zerlegt man in die Partialbrüche, so entsteht:

$$(a-b)\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x-a}-\frac{dx}{x-b}=0.$$

Daraus folgt das erste Integral:

$$\frac{x-a}{x-b}+cy^{b-a}=0.$$

Um dies abermals zu integriren, entwickle man den Werth

$$x=\frac{a+bcy^{b-a}}{1+cy^{b-a}}=\frac{ay^a+bcy^b}{y^a+cy^b}.$$

Man setze den Werth $x=\frac{yz'}{z}$ wieder ein, und man hat:

$$\frac{z'}{z}=\frac{ay^{a-1}+bcy^{b-1}}{y^a+cy^b}.$$

Man findet daraus das zweite Integral:

$$z = c_1(y^a + cy^b), \quad \text{oder auch} \quad z = c_1 y^a + cy^b.$$

5. In der Gleichung:

$$(a + zz')z'' = (1 + z'^2)z'$$

fehlt die Veränderliche y. Man setze desshalb $\frac{dz'}{dy} = 0$, und man erhält:

$$(a + zz')dz' = (1 + z'^2)dz.$$

Der integrirende Faktor $(1 + z'^2)^{-\frac{3}{2}}$ führt auf das vollständige Differential:

$$\frac{adz'}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{zz'dz'}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dz}{\sqrt{1 + z'^2}}.$$

Daraus findet man das allgemeine Integral:

$$\frac{az'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{z}{\sqrt{1 + z'^2}} - c, \quad \text{oder} \quad z = az' + c\sqrt{1 + z'^2}.$$

Um eine andere Integralform zu erhalten, bildet man hieraus die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$z' = (a + \frac{cz'}{\sqrt{1 + z'^2}})z''.$$

Nimmt man dann $\frac{dz'}{dz} = 0$, so behält man die Gleichung:

$$dy = \left(\frac{a}{z'} + \frac{c}{\sqrt{1 + z'^2}}\right)dz'.$$

Man findet daraus das allgemeine Integral:

$$y + c_1 = alz' + cl(z' + \sqrt{1 + z'^2}).$$

Wenn man nun z' aus der vorigen Integralform entwickelt, und hier einsetzt, so zeigt sich das zweite Integral der obigen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einer vortheilhaften Gestalt, da dann die Veränderliche y unmittelbar aus der Veränderlichen z berechnet werden kann.

6. Es sei nun $(a^2 z'^2 + y^2)z'' = yz'$.

Da hier die Veränderliche z nicht vorkommt, so setze man $\frac{dz'}{dz} = 0$, und man behält:

$$(a^2 z'^2 + y^2)dz' - yz'dy = 0.$$

Diese Gleichung giebt den integrirenden Faktor $\frac{1}{z'^2}$, und zeigt sich als vollständiges Differential in der Form:

$$\left(\frac{a^2}{z'}+\frac{y^2}{z'^3}\right)dz'-\frac{ydy}{z'^2}=0.$$

Daraus findet sich das allgemeine Integral:

$$a^2 . l\left(\frac{z'}{c}\right)^2=\frac{y^2}{z'^2}.$$

Um eine andere Integralform zu bilden, entwickle man:

$$y=az' . \sqrt{l\left(\frac{z'}{c}\right)^2}.$$

Man bringe nun sogleich an die Stelle von z' eine neue Veränderliche x, indem man $l\left(\frac{z'}{c}\right)^2=x^2$ setzt. Daraus folgt $\left(\frac{z'}{c}\right)^2=e^{x^2}$, und $z'=ce^{\frac{x^2}{2}}$. Der Werth y geht dadurch über in

$$y=acxe^{\frac{x^2}{2}}.$$

Differentiirt man dies, so entsteht:

$$1=ace^{\frac{x^2}{2}} . (1+x^2)\left(\frac{dx}{dz}z'+\frac{dx}{dy}\right).$$

Nimmt man aber $\frac{dx}{dy}=0$, so behält man die Gleichung:

$$dz=ac^2 . e^{x^2}(1+x^2)dx.$$

Durch Integration findet man endlich:

$$z=c_1+ac^2 . \int e^{x^2}(1+x^2)dx.$$

Da nun aber die Elimination von x zwischen den beiden ersten Integralen nicht ausführbar ist, so denke man sich x als unabhängige Veränderliche. Man berechnet alsdann für jedes einzelne x aus den beiden ersten Integralen die jedesmal zusammenhängenden Werthe z und y.

7. Es sei nun $ay^2z''=(yz'-z)^2$.

Man genügt hier durch $z=y$. Desshalb nehme man anstatt z die neue Veränderliche $v=\frac{z}{y}$, und man erhält, weil dann

$$z'' = \frac{dz'}{dv}\left(\frac{z'}{y} - \frac{z}{y^2}\right) + \frac{dz'}{dy} = \frac{dz'}{dv}\frac{z'-v}{y} + \frac{dz'}{dy},$$

die neue Gleichung:

$$a(z'-v)\frac{dz'}{dv} + ay\frac{dz'}{dy} = (z'-v)^2.$$

Da man dieser Gleichung durch $z' = v$ genügt, so nehme man weiter anstatt z' die neue Veränderliche $x = z' - v$. Die Elimination von z' giebt:

$$ax\frac{dx}{dv} + ay\frac{dx}{dy} = x^2 - ax.$$

Wenn man das einemal $\frac{dx}{dv} = 0$, das anderemal $\frac{dx}{dy} = 0$ setzt, so behält man die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{adx}{x^2 - ax} = \frac{dy}{y} \quad \text{und} \quad dv = \frac{adx}{x-a}.$$

Man bildet daraus die beiden ersten Integrale:

$$\frac{x}{x-a} = \frac{c}{y} \quad \text{und} \quad v + al\frac{c_1}{x-a} = 0.$$

Die Elimination von z', welche hier mit der Elimination von x zusammenfällt, liefert das zweite Integral. Man bilde vorerst $\frac{a}{x-a} = \frac{c}{y} - 1$. Wenn man damit x eliminirt, so entsteht:

$$\frac{z}{y} + al\frac{c_1}{a}\left(\frac{c}{y} - 1\right) = 0, \quad \text{oder auch} \quad \frac{z}{y} + al\left(\frac{c_1}{y} + c\right) = 0.$$

8. Es sei noch $a\sqrt{y^2+z^2}.z'' = (1+z'^2)^{\frac{3}{2}}$.

Man genügt hier durch $y^2 + z^2 = 0$. Man bringe an die Stelle von z und y die neuen Veränderlichen $v = \frac{y}{z}$, und $u = \sqrt{y^2+z^2}$. Dies giebt:

$$z'' = \frac{dz'}{dv}\left(\frac{1}{z} - \frac{yz'}{z^2}\right) + \frac{dz'}{du}\frac{y+zz'}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{dz'}{dv}\frac{1-vz'}{z} + \frac{dz'}{du}\frac{v+z'}{\sqrt{1+v^2}},$$

und man erhält die Gleichung:

$$\sqrt{1+v^2}.(1-vz')\frac{dz'}{dv} + \frac{v+z'}{\sqrt{1+v^2}}u\frac{dz'}{du} = \frac{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{a}.$$

Man wird vor Allem die irrationalen Grössen wegbringen, indem

man $v = \text{tg}\, r$ und $z' = \text{tg}\, s$ einsetzt. Die Gleichung geht dadurch über in die einfachere:

$$\cos(r+s) \cdot \frac{ds}{dr} + \sin(r+s) \cdot u \frac{ds}{du} = \frac{1}{a}.$$

Man genügt durch $r + s = m$, wo m eine Beständige ist, welche sich aus $\cos m = \frac{1}{a}$ berechnet. Man führe desshalb die Veränderliche $t = r + s$ ein. Um damit r zu eliminiren, schreibe man die Gleichung vorerst in der Form:

$$\text{(b)} \qquad \cos(r+s) \cdot \frac{d\alpha}{dr} + \sin(r+s) \cdot u \frac{d\alpha}{du} + \frac{1}{a} \frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Durch die erwähnte Transformation entsteht dann die Gleichung:

$$(1 + a\cos t) \cdot \frac{d\alpha}{dt} + a\sin t \cdot u \frac{d\alpha}{du} + \frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Nimmt man das einemal $\frac{d\alpha}{ds} = 0$, das anderemal $\frac{d\alpha}{du} = 0$, so hat man die beiden gesonderten Differentialgleichungen:

$$\frac{du}{u} = \frac{a\sin t \cdot dt}{1 + a\cos t} \quad \text{und} \quad ds = \frac{dt}{1 + a\cos t}.$$

Durch Integration findet sich:

$$u = \frac{c}{1 + a\cos t} \quad \text{und} \quad s = \int \frac{dt}{1 + a\cos t}.$$

Wenn man t als die unabhängige Veränderliche betrachtet, so ergeben sich hieraus die beiden Werthe u und s. Um aber die ursprünglichen Veränderlichen z und y zu erhalten, hat man die beiden Gleichungen:

$$\frac{y}{z} = v = \text{tg}\, r = \text{tg}(t - s) \quad \text{und} \quad \sqrt{y^2 + z^2} = u.$$

Man entwickelt daraus die beiden Werthe:

$$y = u \cdot \sin(t - s) \quad \text{und} \quad z = u \cdot \cos(t - s).$$

VII. Bestimmung des integrirenden Faktors als Funktion der drei Veränderlichen z, y und z'.

Man ist oftmals veranlasst, das erste Integral $\alpha = c$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung $Zz'' + Y = 0$ unmittelbar als

Funktion der drei Veränderlichen z, y und z' zu bestimmen, da sich nicht immer mit Vortheil zwei neue Veränderliche von solcher Beschaffenheit angeben lassen, dass das erste Integral als Funktion dieser beiden Veränderlichen dargestellt werden kann. Wenn die Differentialgleichung $Zz''+Y=0$ ein vollständiges Differential darstellt, dann hat die Bestimmung des ersten Integrals $\alpha=c$ als Funktion der drei Veränderlichen z, y und z' keine Schwierigkeit. Denn man erhält dann durch die Vergleichung mit dem vollständigen Differential

$$\frac{d\alpha}{dz'}z''+\frac{d\alpha}{dz}z'+\frac{d\alpha}{dy}=0$$

die beiden Gleichungen:

$$1. \qquad \frac{d\alpha}{dz'}=Z,$$

$$2. \qquad \frac{d\alpha}{dz}z'+\frac{d\alpha}{dy}=Y.$$

Aus der ersteren folgt $\alpha=\int Zdz'+\alpha_2$, worin α_2 eine noch unbekannte Funktion von z und y ist. Um diese Funktion zu erhalten, setze man abkürzend $\int Zdz'=\alpha_1$. Man hat dann die Gleichung $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$; und durch Differentiation entsteht:

$$\frac{d\alpha}{dz}z'+\frac{d\alpha}{dy}=\frac{d\alpha_1}{dz}z'+\frac{d\alpha_1}{dy}+\frac{d\alpha_2}{dz}z'+\frac{d\alpha_2}{dy},$$

oder auch, wenn man dies mit der Gleichung 2. verbindet, um das unbekannte $\frac{d\alpha}{dz}z'+\frac{d\alpha}{dy}$ zu eliminiren, zur Bestimmung von α_2 die Gleichung:

$$\frac{d\alpha_2}{dz}z'+\frac{d\alpha_2}{dy}=Y-\frac{d\alpha_1}{dz}z'-\frac{d\alpha_1}{dy}.$$

Da nun die Veränderliche z' in α_2 nicht vorkommt, so schreibt sich die letzte Gleichung jedenfalls in der Form:

$$\frac{d\alpha_2}{dz}z'+\frac{d\alpha_2}{dy}=Z_1z'+Y_1,$$

worin Z_1 und Y_1 irgend Funktionen von z und y sind. Die Werthe $\frac{d\alpha_2}{dz}$ und $\frac{d\alpha_2}{dy}$ sind dadurch einzeln gegeben, und die Funktion α_2 bestimmt sich nach bekannten Regeln.

Ob nun die Gleichung $Zz''+Y=0$ ein vollständiges Diffe-

rential ist, dies lässt sich an gewissen Beziehungen erkennen, welche dann jedesmal zwischen den Coëfficienten Z und Y stattfinden. Man überzeugt sich von dem Vorhandensein dieser Beziehungen durch den Erfolg der vorzunehmenden Rechnung. Dabei muss nämlich die identische Gleichung:

$$Y-\frac{d\alpha_1}{dz}z'-\frac{d\alpha_1}{dy}=Z_1z'+Y_1.$$

zum Vorschein kommen, worin Z_1 und Y_1 Funktionen von z und y sind; und ausserdem muss $Z_1dz+Y_1dy=0$ ein vollständiges Differential darstellen.

1. Für die Gleichung:

$$\frac{yz^2z''}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2yzz'^2}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{yz^3}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

findet man

$$\alpha_1=\int\frac{yz^2dz'}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{yz^2z'}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Man erhält daraus durch Differentiation die beiden Werthe:

$$\frac{d\alpha_1}{dz}=\frac{2yzz'}{\sqrt{1+y^2}},\ \text{und}\ \frac{d\alpha_1}{dy}=\frac{z^2z'}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{y^2z^2z'}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z^2z'}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dies führt auf die Gleichung:

$$\frac{d\alpha_2}{dz}z'+\frac{d\alpha_2}{dy}=-\frac{z^2z'}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{yz^3}{(1+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Man findet daraus nach den früheren Regeln:

$$\alpha_2=-\frac{z^3}{3(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das allgemeine Integral zeigt sich demnach in der Form:

$$\frac{yz^2z'}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{z^3}{3(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}=c,$$

oder auch

$$3yz^2z'=\frac{z^3}{1+y^2}+c\sqrt{1+y^2}.$$

Wenn aber die Gleichung $Zz''+Y=0$ kein vollständiges Differential ist, so hat man die beiden Gleichungen:

3. $$\frac{d\alpha}{dz'} = Zk,$$

4. $$\frac{d\alpha}{dz}z' + \frac{d\alpha}{dy} = Yk,$$

worin k den integrirenden Faktor der Gleichung $Zz'' + Y = 0$ vorstellt.

Mag man nun α, oder mag man k daraus eliminiren, man kommt jedesmal auf Gleichungen, woraus die zurückgebliebene Unbekannte als besonderes Integral versuchsweise ermittelt werden muss. Nun ist aber leicht einzusehen, dass der integrirende Faktor in vielen Fällen durch eine wesentlich einfachere Funktion ausgedrückt werden kann als das erste Integral $\alpha = c$ selbst; während doch niemals der umgekehrte Fall eintreten wird. Man nimmt desshalb keinen Anstand, jedesmal nur auf die Bestimmung des integrirenden Faktors sein Augenmerk zu richten. Die Elimination von α aus den Gleichungen 3. und 4. giebt übrigens zu weitläuftigen Rechnungen Veranlassung. Man vermeidet desshalb diese Elimination, und schlägt bei der Bestimmung des integrirenden Faktors den folgenden Weg ein. Nachdem man versuchsweise eine Funktion k angenommen hat, worin das Vorkommen der Veränderlichen z' festgestellt ist, während das Vorkommen der beiden anderen Veränderlichen z und y vorerst noch unbestimmt bleibt, so setze man dieselbe sogleich in die Gleichungen 3. und 4. ein, und benutze alsdann diese beiden Gleichungen ganz ebenso, wie vorhin unter der Voraussetzung, dass die Gleichung $Zz'' + Y = 0$ ein vollständiges Differential sei, die Gleichungen 1. und 2. benutzt worden sind. Man bilde also aus der Gleichung 3. den Werth

$$\alpha = \int Zkdz' + \alpha_2,$$

worin α_2 eine noch unbestimmte Funktion von z und y vorstellt. Die angedeutete Integration kann hierbei ausgeführt werden, da das Vorkommen von z' in k bekannt ist. Man setze nun abkürzend $\int Zkdz' = \alpha_1$, so dass also $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ist, und es entsteht dann:

$$\frac{d\alpha}{dz}z' + \frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\alpha_1}{dz}z' + \frac{d\alpha_1}{dy} + \frac{d\alpha_2}{dz}z' + \frac{d\alpha_2}{dy}.$$

Wenn man daraus das unbekannte $\frac{d\alpha}{dz}z' + \frac{d\alpha}{dy}$ mittelst der Gleichung 4. eliminirt, so behält man die Gleichung:

(a) $$\frac{d\alpha_2}{dz}z' + \frac{d\alpha_2}{dy} = Yk - \frac{d\alpha_1}{dz}z' + \frac{d\alpha_1}{dy}.$$

Weil die Veränderliche z' in α_2 nicht vorkommt, desshalb hat man hier nach den verschiedenen Potenzen und nach den sonst noch vorkommenden Funktionen von z' zu ordnen, um den gemeinsamen Faktor jeder einzelnen Funktion für sich verschwinden zu lassen. Die Gleichung (a) zerfällt auf diese Weise in mehrere andere Gleichungen, welche zur Bestimmung von α_2 und der übrigen in k noch vorkommenden unbestimmten Funktionen von z und y zu benutzen sind. Wenn alle diese Gleichungen befriedigt werden können, so erweist sich die zum Grunde gelegte Form des integrirenden Faktors als zulässig, und man hat dann zugleich das erste Integral der Gleichung $Zz''+Y=0$ in der Form $\alpha_1+\alpha_2=c$ aufgefunden.

Um einige Beispiele für dies Integrationsverfahren vor Augen zu haben, beschäftigen wir uns mit der Integration der Gleichung:

$$z''+Yz'^2+Y_1z'+Y_2=0,$$

worin Y, Y_1 und Y_2 irgend Funktionen von z und y vorstellen. Man kann hier von mancherlei Voraussetzungen ausgehen in Bezug auf das Vorkommen von z' in dem integrirenden Faktor k, von denen übrigens jede für sich ganz besondere Beziehungen zwischen den Funktionen Y, Y_1 und Y_2 voraussetzt.

Wir beginnen mit der möglichst einfachen Annahme, wir setzen nämlich $k=\lambda$, wo λ eine blosse Funktion von z und y ist. Man hat dann das vollständige Differential:

$$\lambda z''+Y\lambda z'^2+Y_1\lambda z'+Y_2\lambda=0.$$

Daraus folgt $\alpha=\lambda z'+\alpha_2$, und zur Bestimmung von α_2 und λ die Gleichung:

$$\text{(a)}\qquad \frac{d\alpha_2}{dz}z'+\frac{d\alpha_2}{dy}=Y\lambda z'^2+Y_1\lambda z'+Y_2\lambda-\frac{d\lambda}{dz}z'^2-\frac{d\lambda}{dy}z'.$$

Wenn man nach z' ordnet, so erhält man zur Bestimmung der beiden Unbekannten die drei Gleichungen:

$$1.\qquad \frac{d\lambda}{dz}=Y\lambda,$$

$$2.\qquad \frac{d\alpha_2}{dz}=Y_1\lambda-\frac{d\lambda}{dy},$$

$$3.\qquad \frac{d\alpha_2}{dy}=Y_2\lambda.$$

Die Unbekannte λ bestimmt sich, insoweit sie Funktion von z ist, aus der Gleichung 1. Man erhält durch Integration:

$$1'. \qquad \lambda = \mu . e^{\int Y dz},$$

worin μ eine noch unbekannte Funktion von y ist. Die Integration der Gleichung 2. liefert:

$$2'. \qquad \alpha_2 = \int (Y_1 \lambda - \frac{d\lambda}{dy}) dz + \nu,$$

wovon ν eine zweite unbestimmte Funktion von y ist, und worin die angedeutete Integration ausgeführt werden kann, nachdem man den vorher aufgefundenen Werth λ eingesetzt hat. Wenn man auf diese Weise λ und α_2 bestimmt hat, so setze man dieselben in die Gleichung 3. ein. Wenn dann die beiden Unbekannten μ und ν als Funktionen von y sich so angeben lassen, dass dieser Gleichung Genüge geschieht, so erhält die obige Annahme $k = \lambda$ ihre Rechtfertigung, und das allgemeine Integral der vorliegenden Differentialgleichung ist in der Form $\lambda z' + \alpha_2 = c$ aufgefunden.

2. Es sei z. B. $zz'' = az'^2 + \frac{bzz'}{\sqrt{1+y^2}}$.

Man hat hier $Y = -\frac{a}{z}$. Desshalb ist $\lambda = \mu z^{-a}$. Da ferner $Y_1 = \frac{-b}{\sqrt{1+y^2}}$ ist, so erhält man aus der Gleichung 2'. den Werth:

$$\alpha_2 = -\int \left(\frac{b\mu}{\sqrt{1+y^2}} + \mu'\right) z^{-a} dz = -\left(\frac{b\mu}{\sqrt{1+y^2}} + \mu'\right) \frac{z^{1-a}}{1-a} + \nu.$$

Setzt man dies in die Gleichung 3. ein, so finden sich, weil $Y_2 = 0$ ist, durch Ordnen nach z die beiden Beziehungen $\nu = 0$, und

$$\frac{b\mu}{\sqrt{1+y^2}} + \mu' = 0 \quad \text{oder} \quad \mu = (y + \sqrt{1+y^2})^{-b}.$$

Man erhält dadurch das allgemeine Integral:

$$z' = cz^a (y + \sqrt{1+y^2})^b.$$

Wir gehen über zu einer zweiten Annahme. Wir setzen nämlich $k = \frac{\lambda}{(z' - \mu)^2}$, worin λ und μ Funktionen von z und y sind. Man bildet das vollständige Differential:

$$\frac{\lambda z''}{(z' - \mu)^2} + \frac{Y \lambda z'^2 + Y_1 \lambda z' + Y_2 \lambda}{(z' - \mu)^2} = 0,$$

und erhält $\alpha = \frac{-\lambda}{z' - \mu} + \alpha_2$. Zur Bestimmung von α_2 und der beiden Grössen λ und μ besteht die Gleichung:

(a)

$$\frac{d\alpha_2}{dz}z' + \frac{d\alpha_2}{dy} = \frac{Y\lambda z'^2 + Y_1\lambda z' + Y_2\lambda}{(z'-\mu)^2} + \frac{\lambda\left(\frac{d\mu}{dz}z' + \frac{d\mu}{dy}\right)}{(z'-\mu)^2} + \frac{\frac{d\lambda}{dz}z' + \frac{d\lambda}{dy}}{z'-\mu},$$

oder auch, wenn man die Nenner wegbringt, die Gleichung:

$$(z'-\mu)^2\left(\frac{d\alpha_2}{dz}z' + \frac{d\alpha_2}{dy}\right)$$

$$= Y\lambda z'^2 + Y_1\lambda z' + Y_2\lambda + \lambda\left(\frac{d\mu}{dz}z' + \frac{d\mu}{dy}\right) + (z'-\mu)\left(\frac{d\lambda}{dz}z' + \frac{d\lambda}{dy}\right).$$

Wenn man nach z' ordnet, so ergeben sich zwischen den drei Unbekannten die folgenden vier Gleichungen:

1. $$\frac{d\alpha_2}{dz} = 0,$$

2. $$\frac{d\lambda}{dz} + Y\lambda = -2\mu\frac{d\alpha_2}{dz} + \frac{d\alpha_2}{dy},$$

3. $$\lambda\frac{d\mu}{dz} - \mu\frac{d\lambda}{dz} + Y_1\lambda = \mu^2\frac{d\alpha_2}{dz} - 2\mu\frac{d\alpha_2}{dy} - \frac{d\lambda}{dy},$$

4. $$\lambda\frac{d\mu}{dy} - \mu\frac{d\lambda}{dy} + Y_2\lambda = \mu^2\frac{d\alpha_2}{dy}.$$

Aus der Gleichung 1. folgt, dass α_2 eine blosse Funktion von y ist. Die Gleichung 2. kommt unter die einfachere Gestalt:

2. $$\frac{d\lambda}{dz} + Y\lambda = \frac{d\alpha_2}{dy}.$$

Durch Integration findet man:

2'. $$\lambda e^{\int Y dz} = \frac{d\alpha_2}{dy}\int e^{\int Y dz}dz + \nu,$$

worin ν eine noch unbestimmte Funktion von y ist. Die Funktion μ bestimmt sich vortheilhaft durch diejenige Gleichung, welche durch die Elimination von $\frac{d\alpha_2}{dy}$ aus den Gleichungen 2. und 3. entsteht, nämlich durch die Gleichung:

$$3'. \qquad \lambda\frac{d\mu}{dz}+\mu\frac{d\lambda}{dz}+2\mu Y\lambda=-(Y_1\lambda+\frac{d\lambda}{dy}).$$

Durch Integration findet man:

$$3''. \qquad \lambda\mu e^{2\int Y dz}=-\int e^{2\int Y dz}.(Y_1\lambda+\frac{d\lambda}{dy})dz+\varrho,$$

worin ϱ eine zweite unbestimmte Funktion von y vorstellt.

Um nun auch die Funktionen $\frac{d\alpha_2}{dy}$, ν und ϱ zu bestimmen, multiplizire man die Gleichung 2. mit μ^2, die Gleichung 3. mit z, und addire alsdann beide zu der Gleichung 4. Dadurch entsteht:

$$4'. \qquad \mu\frac{d\mu}{dz}+\frac{d\mu}{dy}+Y\mu^2+Y_1\mu+Y_2=0,$$

woraus man ersieht, dass $z'=\mu$ ein besonderes Integral der vorliegenden Differentialgleichung ist. Wenn sich die Grössen $\frac{d\alpha_2}{dy}$, ν und ϱ als Funktionen von y so angeben lassen, dass die Gleichung 4'. befriedigt wird, so ist die vorhin angenommene Form k gerechtfertigt, und das allgemeine Integral bekannt.

Schliesslich kann noch bemerkt werden, dass, da hier das allgemeine Integral jedenfalls die Form $\frac{\lambda}{z'-\mu}=\alpha_2+c$ hat, der besondere Fall $\frac{d\alpha_2}{dy}=0$, wonach α_2 eine Beständige ist, auf die Integralform $\lambda z'+\alpha_2=c$ hinweist, worin λ und α_2 irgend Funktionen von z und y sind, und welche auch durch die frühere Annahme $k=\lambda$ zum Vorschein kommt.

3. Es sei z. B. $zz''+bz+b^2=\frac{(y+a).4az^2}{(y^2-1)^2}$.

Man hat hier $Y=0$, und desshalb $\lambda=\frac{d\alpha_2}{dy}z+\nu$. Setzt man abkürzend $\frac{d\alpha_2}{dy}=\sigma$, und nimmt man, weil dadurch die weitere Untersuchung abgekürzt wird, sogleich $\nu=0$, so bleibt $\lambda=\sigma z$. Die Gleichung 3''. kommt dann, weil $Y_1=\frac{b}{z}$ ist, unter die Gestalt:

$$\sigma\mu z=-\int(b\sigma+\sigma' z)dz=-b\sigma z-\sigma'\frac{z^2}{2}+\varrho.$$

Nimmt man weiter auch $\varrho=0$, so bleibt $\mu=-b-\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{z}{2}$; und die Gleichung 4'. ist:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \frac{(y+a).4a}{(y^2-1)^2} = 0.$$

Man genügt aber dieser Gleichung durch:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{4a}{y^2-1}, \quad \text{oder} \quad \sigma = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2a}.$$

Das allgemeine Integral ist demnach:

$$\sigma z = (z' + b + \frac{\sigma'}{\sigma}\frac{z}{2})(\alpha_2 + c),$$

oder, wenn man die Werthe σ und α_2 einsetzt,

$$\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2a} . z = (z' + b + \frac{2az}{y^2-1})\left(\int\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2a} dy + c\right).$$

Man kann dem integrirenden Faktor der Gleichung

$$z'' + Yz'^2 + Y_1 z' + Y_2 = 0$$

auch die Form $k = 2\lambda(\lambda z' + \mu)$ geben, worin λ und μ Funktionen von z und y sind. Dies führt auf das vollständige Differential:

$$2\lambda(\lambda z' + \mu)z'' + 2\lambda(\lambda z' + \mu)(Yz'^2 + Y_1 z' + Y_2) = 0.$$

Man erhält $\alpha = (\lambda z' + \mu)^2 + \alpha_2$. Zur Bestimmung der drei Unbekannten λ, μ und α_2 aber hat man die Gleichung:

$$\text{(a)} \quad \frac{d\alpha_2}{dz} + \frac{d\alpha_2}{dy}$$

$$= 2(\lambda z' + \mu)(\lambda(Yz'^2 + Y_1 z' + Y_2) - \frac{d\lambda}{dz}z'^2 - \left(\frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\mu}{dz}\right)z' - \frac{d\mu}{dy}).$$

Wenn man nach z' ordnet, so zerfällt dieselbe in die folgenden Gleichungen:

1. $$\frac{d\lambda}{dz} = Y\lambda,$$

2. $$\frac{d\mu}{dz} = Y_1\lambda - \frac{d\lambda}{dy},$$

3. $$\frac{d\alpha_2}{dz} = 2\lambda(Y_2\lambda - \frac{d\mu}{dy}),$$

4. $$\frac{d\alpha_2}{dy}=2\mu\left(Y_2\lambda-\frac{d\mu}{dy}\right).$$

Aus der Gleichung 1. bestimmt sich λ. Man erhält:

1'. $$\lambda=\nu.e^{\int Ydz},$$

worin ν eine noch zu bestimmende Funktion von y ist. Aus der Gleichung 2. folgt:

2'. $$\mu=\int\left(Y_1\lambda-\frac{d\lambda}{dy}\right)dz+\varrho,$$

worin ϱ eine zweite unbestimmte Funktion von y ist. Die Gleichung 3. liefert:

3'. $$\alpha_2=\int 2\lambda\left(Y_2\lambda-\frac{d\mu}{dy}\right)dz+\sigma,$$

wenn σ auch wieder eine unbestimmte Funktion von y ist. Nachdem man λ, μ und α_2 auf diese Weise bestimmt hat, so setze man dieselben in die Gleichung 4. ein; und wenn dann die Grössen ν, ϱ und σ als Funktionen von y so angegeben werden können, dass dieser Gleichung Genüge geschieht, so ist der integrirende Faktor $k=2\lambda(\lambda z'+\mu)$ in der That zulässig, und zugleich das allgemeine Integral der vorliegenden Differentialgleichung bekannt.

Bemerkenswerth ist, dass, da das allgemeine Integral hier jedesmal die Form $(\lambda z'+\mu)^2+\alpha_2=c$ annimmt, die Gleichung $\lambda z'+\mu=0$ niemals eine besondere Auflösung der Differentialgleichung $z''+Yz'^2+Y_1z'+Y_2=0$ darstellt; dass dieselbe aber nur dann ein besonderes Integral dieser Differentialgleichung darstellt, wenn α_2 eine Beständige ist. Man sieht aber ein, dass man in diesem Falle auch wieder durch die erste Annahme $k=\lambda$, worin λ eine Funktion von z und y ist, zum Ziel kommen würde.

4. Es sei nun z. B. $z''=\dfrac{bz}{(z^2+y^2+a)^2}$.

Man hat hier $Y=0$, und desshalb $\lambda=\nu$. Da auch $Y_1=0$ ist, so bleibt:

2'. $$\mu=-\int\nu'dz+\varrho=-\nu'z+\varrho.$$

Nimmt man sogleich $\varrho=0$, so liefert die Gleichung 3'. den Werth

$$3'. \qquad \alpha_2=\int 2v\left(\frac{-bvz}{(z^2+y^2+a)^2}+v''z\right)dz+\sigma.$$

Durch Integration erhält man:

$$\alpha_2=\frac{bv^2}{z^2+y^2+a}+vv''z^2+\sigma.$$

Setzt man die Werthe $\lambda=v$, $\mu=-v'z$ und α_2 in die Gleichung 4. ein, so entsteht:

$$4. \qquad \frac{2bv((y^2+a)v'-yv)}{(z^2+y^2+a)^2}+(vv'''+3v'v'')z^2+\sigma'=0.$$

Man genügt dieser Gleichung durch $v=\sqrt{y^2+a}$, und $\sigma=0$; und man gelangt so zu dem allgemeinen Integral:

$$(vz'-v'z)^2+vv''z^2+\frac{bv^2}{z^2+y^2+a}=c,$$

oder, wenn man auch den Werth v einsetzt, und zugleich nach Potenzen von z' ordnet:

$$(y^2+a)z'^2-2yzz'+z^2+\frac{b(y^2+a)}{z^2+y^2+a}=c.$$

Bei dem Gebrauch des integrirenden Faktors $k=2\lambda(\lambda z'+\mu)$ hat sich ergeben, dass, wenn $z'-\mu$ ein Faktor von k ist, und μ irgend eine Funktion von z und y bezeichnet, dann nicht nothwendig $z=\mu$ ein besonderes Integral oder eine besondere Auflösung der vorliegenden Differentialgleichung darstellt. Dasselbe zeigt sich, wenn der integrirende Faktor der Differentialgleichung $z''+Yz'^2+Y_1z'+Y_2=0$ die allgemeinere Form $k=3\lambda(\lambda z'+\mu)^2+v$ annimmt, worin λ, μ und v irgend Funktionen von z und y sind. Man hat dann das vollständige Differential:

$$3\lambda(\lambda z'+\mu)^2z''+vz''+(3\lambda(\lambda z'+\mu)^2+v)(Yz'^2+Y_1z'+Y_2)=0.$$

Daraus folgt

$$\alpha=(\lambda z'+\mu)^3+vz'+\alpha_2.$$

Zur Bestimmung der vier Funktionen λ, μ, v und α_2 hat man die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\alpha_2}{dz}z' + \frac{d\alpha_3}{dy}$$

$$= 3(\lambda z' + \mu)^2\left(\lambda(Yz'^2 + Y_1z' + Y_2) - \frac{d\lambda}{dz}z'^2 - \left(\frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\mu}{dz}\right)z' - \frac{d\mu}{dy}\right)$$

$$+ \nu(Yz'^2 + Y_1z' + Y_2) - \frac{d\nu}{dz}z'^2 - \frac{d\nu}{dy}z'.$$

Durch Ordnen nach z' entstehen die folgenden fünf Gleichungen:

$$1. \qquad \frac{d\lambda}{dz} = Y\lambda,$$

$$2. \qquad \frac{d\mu}{dz} = Y_1\lambda - \frac{d\lambda}{dy},$$

$$3. \qquad \frac{d\nu}{dz} = Y\nu + 3\lambda^2\left(Y_2\lambda - \frac{d\mu}{dy}\right),$$

$$4. \qquad \frac{d\alpha_2}{dz} = Y_1\nu - \frac{d\nu}{dy} + 6\lambda\mu\left(Y_2\lambda - \frac{d\mu}{dy}\right),$$

$$5. \qquad \frac{d\alpha_3}{dy} = Y_2\nu + 3\mu^2\left(Y_2\lambda - \frac{d\mu}{dy}\right).$$

Aus der Gleichung 1. findet man:

$$1'. \qquad \lambda = \varrho e^{\int Y dz},$$

worin ϱ eine noch zu bestimmende Funktion von y ist. Aus der Gleichung 2. folgt:

$$2'. \qquad \mu = \int\left(Y_1\lambda - \frac{d\lambda}{dy}\right)dz = \sigma,$$

worin σ eine zweite unbestimmte Funktion von y vorstellt. Aus der Gleichung 3. findet man:

$$3'. \qquad e^{-\int Y dz}.\nu = \int 3e^{-\int Y dz}.\lambda^2\left(Y_2\lambda - \frac{d\mu}{dy}\right)dz + \tau,$$

worin τ eine dritte noch zu bestimmende Funktion von y ist. Die Gleichung 4. endlich giebt:

$$4'. \qquad \alpha_2 = \int\left(Y_1\nu - \frac{d\nu}{dy} + 6\lambda\mu\left(Y_2\lambda - \frac{d\mu}{dy}\right)\right)dz + \xi,$$

wenn ξ eine vierte noch zu bestimmende Funktion von y ist. Nachdem man auf diese Weise die vier Unbekannten λ, μ, ν und α_2 berechnet hat, setze man deren Werthe in die Gleichung 5. ein.

Wenn dann die Unbekannten ϱ, σ, τ und ξ als Funktionen von y so angegeben werden können, dass diese Gleichung befriedigt wird, so ist der integrirende Faktor $k = 3\lambda(\lambda z' + \mu)^2 + \nu$ zulässig und zugleich das allgemeine Integral bekannt.

Es sei z. B.

$$z^2 z'' + zz'^2 + az + by = 0.$$

Man hat hier

$$Y = \frac{1}{z}, \quad Y_1 = 0 \text{ und } Y_2 = \frac{az + by}{z^2}.$$

Desshalb findet man $\lambda = \varrho z$. Nimmt man aber, weil die Rechnung dadurch merklich abgekürzt wird, sogleich $\varrho = 1$, so hat man $\lambda = z$, und man findet weiter $\mu = \sigma$. Nun ist aber:

$$3'. \qquad \frac{\nu}{z} = \int 3(az + by - \sigma' z)dz + \tau.$$

Wenn die Integration ausgeführt wird, so erhält man:

$$\nu = \tfrac{3}{2}(a - \sigma')z^3 + 3byz^2 + \tau z.$$

Die Gleichung 4'. kommt dann in die Form:

$$4'. \qquad \alpha_2 = \int (\tfrac{3}{2}\sigma'' z^3 - 3bz^2 - \tau' z + 6\sigma(az + by - \sigma' z))dz + \xi,$$

und man findet durch Integration den Werth:

$$\alpha_2 = \tfrac{3}{8}\sigma'' z^4 - bz^3 - \tau' \frac{z^2}{2} + 3\sigma(a - \sigma')z^2 + 6b\sigma yz + \xi.$$

Um endlich die Grössen σ, τ und ξ als Funktionen von y zu bestimmen, hat man die Gleichung:

$$5'. \qquad \frac{d\alpha_2}{dy} = \frac{az + by}{z}(\tfrac{3}{2}(a - \sigma')z^2 + 3byz + \tau + 3\sigma^2) - 3\sigma^2\sigma'.$$

Da der gemeinsame Faktor jeder einzelnen Potenz von z verschwinden muss, damit man dieser Gleichung genüge, so stellt sich heraus, nachdem auch der Werth α_2 eingesetzt ist, dass $\sigma''' = 0$ und $\tau + 3\sigma^2 = 0$ zu nehmen ist. Durch die Elimination von τ erhält man die folgende Gleichung:

$$5. \quad 3a\sigma' z^2 + 6b(\sigma + y\sigma')z + \xi' = (az + by)(\tfrac{3}{2}(a - \sigma')z + 3by) - 3\sigma^2\sigma'.$$

Daraus ergeben sich weiter die drei Beziehungen:

$$3\sigma' = a, \quad 5y\sigma' + 4\sigma = 3ay, \quad \xi' = 3b^2y^2 - 3\sigma^2\sigma'.$$

Man genügt denselben durch $\sigma = \frac{ay}{3}$, und durch $\xi = b^2y^3 - \frac{a^2y^3}{27}$; und man behält demnach den Werth:

$$\alpha_2 = -bz^3 + a^2yz^2 + 2aby^2z + (b^2 - \frac{a^3}{27})y^3.$$

Das allgemeine Integral aber erhält die Form:

$$(zz' + \frac{ay}{3})^3 + (az^2 + 3byz - \frac{a^2y^2}{3})zz' - bz^3 + a^2yz^2 + 2aby^2z$$

$$+ (b^2 - \frac{a^3}{27})y^3 = c,$$

oder auch, wenn man nach Potenzen von z' ordnet, die Form:

$$z^3z'^3 + ayz^2z'^2 + (az + 3by)z^2z' - bz^3 + a^2yz^2 + 2aby^2z - b^2y^3 = c.$$

II.

Vorschule der neuern Geometrie, insbesondere eine elementare Darstellung der Verwandtschaft und der Kegelschnitte enthaltend.

Von

Herrn *Ernst Essen*,

Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stargard.

Allgemeine Erklärungen und von der Congruenz.

§. 1. *Erklärung.* Mehrere Punkte in einer Ebene, deren gegenseitige Lage und Entfernung vollkommen bestimmt ist, bilden zusammen ein ebenes System. Liegen sämmtliche Punkte auf einer Geraden, so heissen sie eine Punktreihe, ist dies aber nicht der Fall, eine Figur. Eine Figur, in welcher niemals drei Punkte auf einer Geraden liegen, heisst ein Vieleck, und zwar je nach der Anzahl der gegebenen Punkte ein Dreieck, Viereck u. s. w. Werden die Punkte, welche ein Vieleck bilden, so mit einander verbunden, dass die Verbindungslinien eine in sich selbst zurückkehrende gebrochene Linie bilden, so entsteht ein geschlossenes Vieleck oder eine Figur im engern Sinne.

§. 2. *Erklärung.* Mehrere Gerade, die sämmtlich durch einen und denselben Punkt O gehen (Fig. 1.) oder die sämmtlich einander parallel sind, wie die Geraden MN, PQ, RS (Fig. 2.), nennt man einen Strahlenbüschel und zwar im erstern Fall einen Centralbüschel, im letztern einen Parallelbüschel. Derjenige Punkt O, durch welchen sämmtliche Strahlen eines Centralbüschels hindurchgehen, heisst das Centrum desselben. Von einem Parallelbüschel pflegt man zu sagen, sein Centrum liege in unendlicher Entfernung.

§. 3. *Erklärung.* Zwei Systeme heissen congruent, wenn

sie sich so auf einander legen lassen, dass sie mit allen ihren Punkten zusammenfallen.

Folgerung. Zwei Systeme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ (Fig. 3.) sind offenbar congruent, wenn je zwei entsprechende Punkte durch congruente in ihrer Lage übereinstimmende Dreiecke bestimmt werden, also wenn man hat $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ und $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. Zwei geschlossene Vielecke sind auch bekanntlich congruent, wenn ihre Seiten und Winkel der Reihe nach übereinstimmen.

§. 4. *Erklärung.* Die Congruenz zweier Figuren ist ein besonderer Fall der homologen Verwandtschaft. Man nennt nämlich zwei Figuren homolog verwandt, wenn jedem Punkt des einen Systems ein bestimmter Punkt des andern entspricht. In zwei homolog verwandten Systemen nennen wir gerade Linien, die durch entsprechende Punkte gehen, entsprechende Gerade, insofern dieselben als unbegrenzt gedacht werden. Betrachten wir aber auf entsprechenden Geraden solche Stücke, die von entsprechenden Punkten begrenzt werden, so heissen dieselben entsprechende Strecken.

Anmerkung. Der homologen Verwandtschaft steht die reciproke Verwandtschaft gegenüber, bei welcher einem Punkte des einen Systems eine Linie in dem andern entspricht.

§. 5. *Lehrsatz.* Zieht man durch sämmtliche Punkte eines Systems $ABCD$ (Fig. 3.) Parallellinien und trägt von jedem Punkte nach einer bestimmten Seite hin eine und dieselbe Entfernung auf, so bilden die Endpunkte der aufgetragenen Strecken ein dem gegebenen congruentes System $A'B'C'D'$.

Denn es ist, wie leicht einzusehen, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ und $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. — Lägen die drei Punkte A, B, C in gerader Linie, so würden auch A', B', C' in gerader Linie liegen.

§. 6. *Erklärung.* Die beiden auf diese Weise erhaltenen Figuren liegen so, dass je zwei entsprechende Strecken wie AB und $A'B'$ ein Parallelogramm bestimmen. Wir nennen daher diese ihre gegenseitige Lage, die parallelogrammatische Lage. Es ist leicht einzusehen, dass zwei verwandte Figuren, um in parallelogrammatische Lage gebracht werden zu können, nothwendig congruent sein müssen.

§. 7. *Lehrsatz.* Verbindet man (Fig. 4.) sämmtliche Punkte eines Systems $ABCD$ mit einem Punkt O und verlängert jede

der Verbindungslinien um sich selbst, so bilden die Endpunkte der Verlängerungen ein dem gegebenen congruentes System.

Denn, wie leicht einzusehen, ist:

1) $$\triangle OAB \cong \triangle OA'B',$$
$$AB = A'B';$$

2) $$\triangle OAC \cong \triangle OA'C',$$
$$AC = A'C';$$

3) $$\triangle OBC \cong \triangle OB'C',$$
$$BC = B'C';$$

folglich auch $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Lägen A, B, C in gerader Linie, so würden auch A', B', C' in gerader Linie liegen, weil ja AB und $A'B'$, sowie BC und $B'C'$ einander parallel werden.

§. 8. *Erklärung.* Liegen zwei verwandte Figuren so, dass erstens die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten durch einen und denselben Punkt gehen, und zweitens je zwei entsprechende Strecken einander parallel sind, so soll diese ihre gegenseitige Lage die Aehnlichkeitslage heissen.

Später wird gezeigt werden, dass zwei Figuren in Aehnlichkeitslage sein können, ohne congruent zu sein, und dass alsdann auch ein Fall eintreten kann, der bei congruenten Figuren nicht möglich ist, nämlich dass der Punkt O, in welchem sich die Verbindungslinien entsprechender Strecken schneiden, nicht zwischen den entsprechenden Punkten, sondern ausserhalb derselben liegt.

§. 9. *Lehrsatz.* Fällt man von sämmtlichen Punkten eines Systems $ABCD$ (Fig. 5.) Lothe auf eine feste Gerade XY und verlängert die Lothe über die Fusspunkte hinaus um sich selbst, so bilden die Endpunkte der Verlängerungen ein dem gegebenen congruentes System $A'B'C'D'$ und es schneiden sich je zwei entsprechende Gerade auf der Linie XY, wenn sie ihr nicht etwa beide parallel sind.

Sind l und m die Fusspunkte der von A und B gefällten Lothe, so ist das Paralleltrapez $AlmB \cong A'lmB'$, also der Winkel $ABm = A'B'm$. Schneiden sich nun die beiden Geraden AB und $A'B'$ in p, so ist das Dreieck $BB'p$ gleichschenklig; folglich muss XY durch p gehen. Gleiches gilt von den übrigen entsprechenden Geraden. Ueberdies zeigt sich, dass das Dreieck $ABC \cong A'B'C'$ sei u. s. f.

Lägen A, B, C in gerader Linie, so würde dasselbe mit A', B', C' der Fall sein, weil alsdann $A'B'$ und $B'C'$ durch einen und denselben Punkt der Linie XY gehen müssten.

§. 10. *Erklärung.* Diejenige Lage zweier verwandten Figuren, worin die Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel sind und sich zwei entsprechende Gerade auf einer festen Geraden schneiden, soll die Affinitätslage heissen. Später wird gezeigt werden, dass die Affinitätslage auch bei andern als congruenten Figuren Statt finden kann und dass alsdann die feste Gerade XY nicht jedesmal zwischen zwei entsprechenden Punkten liegt.

§. 11. *Erklärung.* Gehen die Linien, welche entsprechende Punkte verwandter Systeme paarweise verbinden, sämmtlich durch einen und denselben Punkt, oder sind sie alle einander parallel; so sagt man, die beiden verwandten Figuren seien in perspectivischer Lage oder lägen in Perspective.

Man unterscheidet demgemäss Centralperspective und Parallelperspective. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte heissen Projectionsstrahlen, der feste Punkt, durch welchen sie bei der Centralperspective gehen, heisst Projectionscentrum. Bei der Parallelperspective pflegt man zu sagen, dass das Projectionscentrum in unendlicher Entfernung liege.

Liegen zwei verwandte Systeme so, dass sich je zwei entsprechende Gerade auf einer festen geraden Linie XY schneiden, wofern sie ihr nicht beide parallel sind, so sagt man, die beiden Systeme liegen axial. Die feste Gerade heisst die Verwandtschaftsaxe.

Auch diejenige Lage, wo je zwei entsprechende Gerade einander parallel sind, wird als axiale Lage angesehen, und man pflegt sich hier des Ausdrucks zu bedienen, die Axe läge in unendlicher Entfernung.

Bei zwei Punktreihen kann von perspectivischer Lage, aber nicht von axialer Lage die Rede sein. Dagegen findet dieser Ausdruck sehr wohl Anwendung bei Strahlenbüscheln. So sind z. B. (Fig. 6.) die beiden Strahlenbüschel O,ABC und P,ABC in axialer Lage, wenn die Punkte A, B, C, in denen sich ihre Strahlen paarweise schneiden, in gerader Linie liegen.

§. 12. *Folgerungen.* Die parallelogrammatische Lage ist die perspectivische und axiale Lage, in welcher Projectionscentrum und Axe in unendlicher Entfernung liegen. Die Aehnlichkeitslage ist die perspectivische und zugleich axiale Lage, wo das

Centrum im endlichen Raume, dagegen die Axe in unendlicher Entfernung liegt. Die Affinitätslage ist die perspectivische und zugleich axiale Lage, bei welcher die Axe in endlicher, das Centrum in unendlicher Entfernung liegt.

§. 13. *Erklärung.* Bei der Aehnlichkeitslage pflegt man die Projectionsstrahlen auch Aehnlichkeitsstrahlen und das Centrum den Aehnlichkeitspunkt zu nennen. Dem entsprechend benennt man bei der Affinitätslage die Projectionsstrahlen und die Axe bezüglich mit den Worten Affinitätsstrahlen und Affinitätsaxe.

Der Aehnlichkeitspunkt heisst ein innerer, wenn er, wie bei der Aehnlichkeitslage congruenter Figuren, jedesmal zwischen zwei entsprechenden Punkten liegt, sonst aber ein äusserer. Nach demselben Gesichtspunkte unterscheidet man eine innere und eine äussere Affinitätsaxe.

Von der proportionalen Verwandtschaft der Figuren.

§. 14. *Lehrsatz.* Durchschneidet man (Fig. 7.) zwei sich einander in A schneidende Linien durch mehrere Parallelen BB', CC', DD', so entstehen zwei Punktreihen $DABC$ und $D'AB'C'$ mit dem gemeinsamen Punkt A. Von diesen beiden Punktreihen sagen wir, sie befinden sich in Affinitätslage, und es ist bekannt, dass in zwei solchen Reihen je zwei Paare entsprechender Strecken in Proportion stehen, d. h. es verhält sich bekanntlich

$$AB:AB' = BC:B'C'$$

u. s. f.

§. 15. *Zusatz.* Auch ist bekannt, dass, wenn man zwischen den Schenkeln eines Winkels A zwei parallele Querlinien zieht, BB' und CC', sich diese Parallelen verhalten wie die Abstände ihrer Endpunkte von Scheitel A, d. h. es verhält sich

$$AB:AC = BB':CC'.$$

§. 16. *Erklärung.* Zwei Punktreihen $ABCD$ und $A'B'C'D'$, deren Punkte sich paarweise entsprechen, heissen proportional, wenn sie erstens in derselben Weise auf einander folgen, und wenn zweitens je zwei Paare entsprechender Strecken in Proportion stehen.

§. 17. *Lehrsatz.* Je zwei proportionale Punktreihen $ABCD$ und $AB'C'D'$ mit einem gemeinsamen Punkt A sind in Affinitätslage.

§. 18. *Lehrsatz.* Durchschneidet man (Fig. 8.) einen Centralbüschel mit dem Centrum O durch zwei einander parallele Linien bezüglich in A, B, C und in A', B', C', so entstehen zwei Punktreihen in Aehnlichkeitslage. Je zwei solcher Punktreihen sind proportional. Denn es verhält sich

$$AB:A'B' = OB:OB'$$

und auch

$$BC:B'C' = OB:OB'.$$

§. 19. *Lehrsatz.* Je zwei proportionale Punktreihen sind in Aehnlichkeitslage, sobald ihre Richtungen parallel sind.

Voraussetzung. In den beiden parallelen Punktreihen ABC und $A'B'C'$ verhält sich

$$AB:A'B' = BC:B'C'.$$

Behauptung. Die drei Geraden AA', BB', CC' gehen durch einen und denselben Punkt.

Beweis. Es sei O der Durchschnitt der beiden Geraden AA' und BB' (Fig. 9.). Ginge nun die Linie CC' nicht durch den Punkt O, so würde die Verlängerung der Linie CO die Richtung $A'B'C'$ in einem vierten Punkte X schneiden. Dann aber verhält sich der Annahme nach

$$AB:A'B' = BC:B'C',$$

aber nach dem vorigen Paragraphen auch

$$AB:A'B' = BC:B'X,$$

welche beiden Proportionen nicht zu gleicher Zeit richtig sein können.

§. 20. *Lehrsatz.* Ist ein beliebiges System $ABCD....$ gegeben (Fig. 10.), so erhält man ein mit ihm in Aehnlichkeitslage befindliches System $A'B'C'D'$, wenn man die Punkte A, B, C, D sämmtlich mit einem und demselben Punkte O verbindet und zu jedem gegebenen Punkte A den entsprechenden Punkt A' dergestalt bestimmt, dass die Strecken OA und OA' ein constantes Verhältniss zu einander haben. Dabei ist zu beachten, dass der Punkt O entweder jedesmal ausserhalb, oder statt dessen auch jedesmal wie in Fig. 4. innerhalb zweier entsprechender Punkte liegen muss.

Beweis. Verhält sich $OA:OA' = OB:OB' = OC:OC'$, so ist $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ u. s. w. nach §. 17.

§. 21. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Bei je zwei in Aehnlich-

keitslage befindlichen Figuren haben die Entfernungen entsprechender Punkte vom Aehnlichkeitspunkt ein constantes Verhältniss zu einander, welches man das Aehnlichkeitsverhältniss nennt.

Anmerkung. Sind zwei congruente Figuren in Aehnlichkeitslage, so ist der Aehnlichkeitspunkt ein innerer und das Aehnlichkeitsverhältniss gleich Eins.

Anmerkung. 1) Man kann jeden Punkt in einer Ebene auf eine in derselben gegebene Figur als ihr zugehörig beziehen. Es sei (Fig. 12.) das Aehnlichkeitsverhältniss $=m$, so dass, wenn A, B, C Punkte der ersten, A', B', C' die entsprechenden Punkte der zweiten Figur sind, man habe

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}=m.$$

Sieht man aber jetzt den Punkt A' als der ersten Figur angehörig an, so wird der ihm in der zweiten Figur entsprechende Punkt X dergestalt zu bestimmen sein, dass man hat:

$$\frac{OA'}{OX}=m.$$

Im Allgemeinen wird nun der Punkt X nicht mit dem Punkte A zusammenfallen: nur bei der Aehnlichkeitslage congruenter Figuren wird dieser Fall eintreten. Es wird diese Lage durch das Wort „involutorische Lage" bezeichnet. Man sagt überhaupt von zwei Figuren, dass sie involutorisch liegen, wenn zwei nicht entsprechenden Punkten, die in einander fallen, wiederum zwei zusammenfallende Punkte entsprechen.

2) Sieht man den Aehnlichkeitspunkt als Punkt irgend einer der beiden Figuren an, so fällt der ihm entsprechende Punkt mit ihm zusammen.

§. 22. *Lehrsatz.* Zwei Dreiecke sind in Aehnlichkeitslage, wenn sie in Centralperspective liegen und zwei Paare entsprechender Seiten parallel sind.

Beweis. Denn ist $AB \parallel A'B'$ und $AC \parallel A'C'$ (Fig. 10.), so verhält sich

$$OA:OA'=OB:OB',$$

und auch

$$OA:OA'=OC:OC';$$

folglich

$$OB:OB' = OC:OC',$$

mithin ist auch $BC \| B'C'$.

§. 23. *Lehrsatz.* Zwei Dreiecke mit paarweise parallelen Seiten sind in Aehnlichkeitslage, wofern sie nicht parallelogrammatisch liegen.

Beweis. Denn ginge (Fig. 11.) die Gerade CC' nicht durch den Punkt O, in welchem sich die Geraden AA' und BB' schneiden, so würde die Verlängerung von OC auf der Geraden $A'C'$ einen dritten Punkt X treffen. Dann aber wäre nach dem vorigen Paragraphen auch $A'X \| AC$, was unmöglich ist.

§. 24. *Lehrsatz.* Man erhält zu einer gegebenen Figur $ABCD$ eine mit ihr in Affinitätslage befindliche, wenn man durch sämmtliche Punkte der gegebenen Figur Parallellinien zieht (Fig. 13.), sodann eine feste Gerade XY annimmt, welche die gezogenen Strahlen bezüglich in l, m, n, p durchschneidet, und auf jedem Strahl zu einem gegebenen Punkte A den entsprechenden A' dergestalt bestimmt, dass die Strecken Al und $A'l$ zu einander ein constantes Verhältniss haben. Dabei muss die Affinitätsaxe XY für alle Punkte entweder eine äussere oder eine innere sein. (Fig. 13. a.)

Voraussetzung. Es verhält sich

$$Al : C'l = Bm : B'm = Cn : C'n \text{ u. s. f.}$$

Behauptung. Die Geraden AB und $A'B'$, AC und $A'C'$ u. s. w. schneiden einander auf der Axe XY.

Beweis. Da die beiden proportionalen Punktreihen AlA' und BmB' parallel sind, so sind sie in Aehnlichkeitslage und es schneiden sich die Geraden AB, $A'B$, lm in einem und demselben Punkte.

Fällt ein Punkt des gegebenen Systems in die Axe, so fällt der ihm entsprechende Punkt mit ihm zusammen.

Zusatz. Ein anderes Verfahren ist das folgende: Man nimmt (Fig. 15.) die Affinitätsaxe XY den Affinitätsstrahlen parallel, bestimmt sodann den einen Punkt des zweiten Systems, etwa den Punkt A', willkürlich auf dem betreffenden Affinitätsstrahl. Jeder folgende Punkt B' wird nun so bestimmt, dass sich die Strecken AA' und BB' zu einander verhalten, wie ihre senkrechten Abstände von der Axe. Dabei wird man von B zu B' nach derselben Seite hin fortgehen, wie von A zu A', wenn A und B auf derselben Seite der Axe XY liegen, sonst nach der entgegengesetzten Seite, wie dies in der Figur beim Punkte C geschehen ist.

Beweis. Ist p der Punkt, in welchem die Gerade AB die Axe XY trifft, so wird auch $A'B'$ durch diesen Punkt gehen müssen. Angenommen, es läge B' nicht auf der Geraden $A'p$, sondern ein anderer Punkt der Richtung BB', etwa X, so verhält sich $AP:BP = Al:A'm = AA':BX$. Aber der Annahme nach verhält sich auch

$$Al:A'm = AA':BB',$$

welche Proportionen nicht zusammen bestehen können.

§. 25. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Bei je zwei in Affinitätslage gegebenen Figuren haben die beiden Strecken eines Affinitätsstrahls, welche zwischen der Axe und zwei entsprechenden Punkten liegen, ein constantes Verhältniss zu einander. Man nennt dasselbe das Affinitätsverhältniss. Ebenso gilt die Umkehrung des vorstehenden Zusatzes.

Anmerkung. Ist bei innerer Affinitätsaxe das Affinitätsverhältniss gleich Eins, so liegen die beiden Figuren involutorisch. Ist die Richtung der Affinitätsstrahlen der Axe parallel, so wird das Affinitätsverhältniss ebenfalls gleich Eins gerechnet, insofern man die Durchschnittspunkte der Strahlen und der Axen als in unendlicher Entfernung liegend ansieht.

§. 26. *Lehrsatz.* Zwei Dreiecke in Parallelperspective liegen auch allemal axial und sind daher in Affinitätslage.

Beweis. Es sei p der Durchschnittspunkt der entsprechenden Geraden AB und $A'B'$ (Fig. 13. a.), q derjenige der Geraden AC und $A'C'$; ferner seien l, m, n die Punkte, in welchen die gegebenen Projectionsstrahlen von der Geraden pq getroffen werden. Alsdann sind einmal die Reihen AlA' und BmB' in Aehnlichkeitslage in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt p, andererseits auch die Reihen AlA' und CnC' in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt q. Mithin verhält sich

$$Al:A'l = Bm:B'm = Cn:C'n.$$

Da nun aber die beiden parallelen Punktreihen BmB' und CnC' proportional sind, so sind sie ebenfalls in Aehnlichkeitslage, d. h. es schneiden sich die Geraden BC, $B'C'$ und mn in einem und demselben Punkte r.

§. 27. *Lehrsatz.* Zwei axial liegende Dreiecke, bei denen überdies zwei Paare entsprechender Punkte in Parallelperspective liegen, sind in Affinitätslage. (Fig. 13. a.)

Voraussetzung. Die Punkte p, q, r, in denen sich die

Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gehörig verlängert einander schneiden, liegen in gerader Linie, und es ist überdies $AA' \parallel BB'$.

Behauptung. Es ist auch CC' parallel AA'.

Beweis. Angenommen, die durch C mit AA' gezogene Parallele ginge nicht durch C', sondern träfe die Gerade $B'C'$ in X, so müsste nach dem vorigen Paragraphen die Richtung $A'X$ durch q gehen, also mit $A'C'$ zusammenfallen.

§. 28. *Lehrsatz.* Sind zwei Systeme in Affinitätslage gegeben, so bleiben sie in derselben, wenn man eins dieser Systeme in der Richtung der Affinitätsstrahlen parallel mit sich selbst fortrücken lässt.

Beweis. Denn betrachtet man zuerst drei Paare entsprechender Punkte A, B, C, so bleiben sie in Affinitätslage, weil sie in Parallelperspective bleiben. Mithin schneiden sich die Geraden BC und $B'C'$ auf derselben Geraden, auf welcher AB und AC die ihnen entsprechenden Geraden treffen. Ebenso sind dann ABD und $A'B'D'$, so wie auch BCD und $B'C'D'$ in Affinitätslage; mithin treffen auch die Geraden AD und BD die ihnen entsprechenden Linien auf eben derselben Axe und so fort.

§. 29. *Zusatz.* Es ist auch leicht zu zeigen, dass bei der parallelen Verrückung der Systeme die Affinitätsaxe ihre Richtung nicht ändert.

Voraussetzung. Dreieck ABC mit $A'B'C'$ in Affinitätslage; Dreieck $A'B'C'$ mit $\alpha\beta\gamma$ in parallelogrammatischer Lage und zwar zwischen denselben Projectionsstrahlen. (Fig. 14.)

Behauptung. Die Affinitätsaxe zwischen ABC und $A'B'C'$ ist der Affinitätsaxe zwischen ABC und $\alpha\beta\gamma$ parallel.

Beweis. Bezeichnen wir durch p und q, sowie durch p' und q' die Punkte, in welchen die Affinitätsaxen von zwei Paaren entsprechender Linien getroffen werden, so liegen die beiden Dreiecke $pB'q$ und $p'\beta q'$ in Centralperspective, insofern man B als Projectionscentrum ansieht. Dabei sind zwei Paare entsprechender Seiten parallel, mithin auch $pq \parallel p'q'$, was zu beweisen war.

§. 30. *Erklärung.* Zwei verwandte Systeme, die zu einander in Aehnlichkeitslage gebracht werden können, sollen ähnlich genannt werden. Zwei Systeme, die in Affinitätslage gebracht werden können, sollen affin heissen. Auch sollen zwei Figuren als in mittelbarer Affinität stehend angesehen werden, wenn es eine dritte giebt, welche dem einen der gegebenen Systeme affin, dem andern ähnlich ist, wofern es nämlich nicht möglich sein sollte, diese selber in Affinitätslage zu bringen.

Zusatz. Hiernach können zwei proportionale Punktreihen sowohl ähnlich, als auch affin genannt werden. Doch wollen wir in Bezug auf diese lieber den Ausdruck proportional beibehalten.

Von den Eigenschaften, welche ähnlichen und affinen Systemen gemeinsam zukommen.

§. 31. *Lehrsatz.* In zwei ähnlichen, sowie in zwei affinen Systemen entspricht einem Paar von Parallellinien des einen Systems wiederum ein Paar von Parallellinien in dem andern Systeme.

a) Beweis für ähnliche Systeme. Denkt man sich beide Systeme in Aehnlichkeitslage gebracht, so müssen alle vier Gerade einander parallel laufen.

b) Beweis für affine Systeme. (Fig. 16.)

Voraussetzung. $AB \parallel CD$.

Behauptung. $A'B' \parallel C'D'$.

Es seien p, q, r die Punkte, in welchen die Geraden AB, CD und AC die ihnen entsprechenden Geraden auf der Affinitätsaxe treffen. Alsdann liegen die beiden Dreiecke pAA' und qCC' perspectivisch in Bezug auf das Centrum r. Zwei Paare entsprechender Seiten in beiden Dreiecken sind aber parallel, nämlich ausser Ap und Cq noch die Affinitätsstrahlen AA' und CC'. Mithin ist auch $A'p \parallel C'q$, was zu beweisen war.

§. 32. *Lehrsatz.* Die Durchschnittspunkte von entsprechenden Geraden in ähnlichen, sowie in affinen Systemen sind wiederum entsprechende Punkte.

a) Beweis für ähnliche Systeme. Es sei O der Aehnlichkeitspunkt und es verhält sich (Fig. 10.):

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'};$$

alsdann behaupten wir, dass der Punkt F, in welchem sich die Geraden AB und CD schneiden, dem Durchschnitt der entsprechenden Geraden F' entsprechend sei. Es haben aber die beiden Dreiecke ADF und $A'D'F'$ paarweise parallele Seiten, folglich geht die Linie FF' durch O, und es verhält sich

$$OF : OF' = OA : OA'.$$

b) Beweis für affine Systeme. (Fig. 13.)

Voraussetzung. Die Linien AA', BB', CC', DD' sind parallel und werden von der Axe XY bezüglich in l, m, n, p dergestalt geschnitten, dass man hat:

$$\frac{Al}{A'l} = \frac{Bm}{B'm} = \frac{Cn}{C'n} = \frac{Dp}{D'p}.$$

Behauptung. Die Punkte F und F', in denen sich einerseits AB und CD, andererseits $A'B'$ und $C'D'$ durchschneiden, liegen auf einer den gegebenen Affinitätsstrahlen AA', BB' parallelen Linie, und die Strecke FF' wird von der Axe XY in q so durchschnitten, dass man hat:

$$\frac{Fq}{F'q} = \frac{Al}{A'l}.$$

Beweis. Die beiden Dreiecke ACF und $A'C'F'$ liegen nach §. 24. axial, überdies ist $AA' \parallel CC'$; folglich muss auch $FF' \parallel AA'$ sein. (§. 27.) Das Uebrige leuchtet von selbst ein.

Zusatz. Jeder Aehnlichkeits- oder Affinitätsstrahl trifft entsprechende Gerade in entsprechenden Punkten.

§. 33. *Lehrsatz.* Liegen in ähnlichen oder in affinen Systemen drei Punkte des einen Systems in gerader Linie, so ist dieses auch mit den entsprechenden Punkten des andern Systems der Fall.

a) **Beweis für ähnliche Systeme.** Es ist allemal in der Aehnlichkeitslage (Fig. 8.) $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. Fallen also AB und BC in eine und dieselbe Richtung, so müssen auch $A'B'$ und $B'C'$ in eine Gerade fallen.

b) **Beweis für affine Systeme.** (Fig. 17.) Gehen die Geraden AB und BC durch einen und denselben Punkt p der Axe, so müssen auch $A'B'$ und $B'C'$ durch diesen Punkt gehen, d. h. es muss $B'C'$ in die Richtung von $A'B'$ fallen.

§. 34. *Lehrsatz.* Gehen in ähnlichen oder in affinen Systemen drei Gerade des einen Systems durch einen und denselben Punkt, so ist dieses auch mit den entsprechenden Geraden des andern Systems der Fall.

Beweis. Angenommen, die Gerade $A'B'$ ginge nicht durch den Punkt H', in welchem sich die Geraden $C'D'$ und $F'G'$ schneiden, während sich die entsprechenden Geraden sämmtlich im Punkte F durchschneiden, so würde dem Punkte F nicht bloss der Punkt F', sondern auch der Durchschnittspunkt der Geraden $A'B'$ mit $C'D'$ und mit $F'G'$ entsprechen, was offenbar absurd ist.

Eigenschaften ähnlicher Figuren.

§. 35. *Lehrsatz.* In je zwei ähnlichen Systemen schliessen zwei Gerade des einen Systems allemal denselben Winkel ein, wie die entsprechenden Geraden des andern.

§. 36. *Lehrsatz.* In zwei ähnlichen Figuren haben je zwei entsprechende Strecken dasselbe Verhältniss zu einander, und zwar ist dieses Verhältniss dem Aehnlichkeitsverhältniss gleich.

Beweis. Fallen (Fig. 19.) die beiden entsprechenden Strecken AB und $A'B'$ in die Richtung eines Projectionsstrahls, und ist O der Aehnlichkeitspunkt, so verhält sich

$$OA : OB = OA' : OB',$$

mithin

$$OA - OB : OA' - OB' = OA : OA'.$$

Fallen aber AB und $A'B'$ nicht in die Richtung eines Projectionsstrahls (Fig. 10.), so leuchtet ohne Weiteres ein, dass sich verhält:

$$AB : A'B' = OA : OA'.$$

§. 37. *Lehrsatz.* In je zwei ähnlichen Systemen haben entsprechende Flächenräume ein constantes Verhältniss zu einander, welches dem Quadrat des Aehnlichkeitsverhältnisses gleich kommt.

Denn man hat bekanntlich (Fig. 10.):

$$\frac{\Delta\, ABC}{\Delta\, A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Setzt man nun das Aehnlichkeitsverhältniss $\frac{OA}{OA'}$ gleich m, so ist auch $\frac{AB}{A'B'} = m$, und also

$$\frac{\Delta\, ABC}{\Delta\, A'B'C'} = m^2.$$

Hat man zwei beliebige geschlossene Vielecke, so wird man dieselben auf entsprechende Art in ähnliche Dreiecke zerlegen, und es folgt dann aus der Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{\Delta\, ABC}{\Delta\, A'B'C'} = \frac{\Delta\, BCD}{\Delta\, B'C'D'} = m^2,$$

dass man auch habe

$$\frac{\Delta\, ABC + \Delta\, BCD}{\Delta\, A'B'C' + \Delta\, B'C'D'} = m^2.$$

Bemerkung. Zwei Dreiecke mit paarweise gleichen Winkeln sind nach unserer Definition ähnlich, weil sie sich so legen lassen, dass ihre Seiten paarweise parallel laufen, wodurch sie zugleich in Centralperspective kommen. Zwei beliebige Vielecke $ABCD$.... und $A'B'C'D'$.... sind offenbar ähnlich, wenn der dritte, vierte und jeder folgende Punkt des einen Vielecks in Bezug auf die beiden ersten Punkte durch Dreiecke bestimmt werden, welche den entsprechenden Dreiecken des andern Systems ähnlich sind und die bestimmenden Dreiecke in beiden Vielecken übereinstimmende Lage gegen einander haben. Denn legt man die Vielecke so, dass ein Paar entsprechender Dreiecke in Aehnlichkeitslage kommt, so werden auch alle übrigen Dreiecke in Aehnlichkeitslage sein, und weil das Projectionscentrum durch zwei Strahlen bestimmt ist, so werden sämmtliche Projectionsstrahlen durch einen und denselben Punkt gehen.

Die übrigen Sätze von der Aehnlichkeit können wir füglich übergehen.

Von den Eigenschaften affiner Figuren.

§. 38. *Lehrsatz.* In zwei affinen Systemen werden entsprechende Strecken durch entsprechende Punkte proportional getheilt.

Beweis. Fallen (Fig. 20.) die beiden entsprechenden Punktreihen A, B, C und A', B', C' in die Richtung eines Affinitätsstrahls, und ist m der Durchschnitt desselben mit der Axe, so hat man

$$\frac{Am}{A'm} = \frac{Bm}{B'm} = \frac{Cm}{C'm},$$

mithin

$$\frac{Am - Bm}{A'm - B'm} = \frac{Bm - Cm}{B'm - C'm}.$$

Sollte die Axe dem Affinitätsstrahl parallel sein, so würde, wie leicht einzusehen ist, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ sein.

Fallen aber die beiden Punktreihen A, B, C und A', B', C' nicht in die Richtung eines Affinitätsstrahls, so bedarf es nur einer Betrachtung von Fig. 17., um die Richtigkeit des Behaupteten einzusehen.

Bemerkung. In ähnlichen Systemen stehen jedesmal zwei Paare entsprechender Strecken in Proportion, in affinen Systemen nur dann, wenn je zwei Strecken, die demselben Systeme ange-

hören, in eine Gerade fallen. Hat man aber in einem von zwei affinen Systemen zwei parallele Strecken, so stehen diese ebenfalls mit den entsprechenden Strecken in Proportion.

Denn es seien (Fig. 16.) AB und CD zwei parallele Strecken des einen Systems, p und q die Punkte, in denen die Richtungen derselben die entsprechenden Richtungen auf der Axe treffen. Alsdann verhält sich

$$AB : A'B' = Ap : A'p,$$
$$CD : C'D' = Cq : C'q.$$

Nun aber sind die beiden Dreiecke $AA'p$ und $CC'q$ einander ähnlich, weil ihre Seiten paarweise parallel laufen; mithin verhält sich

$$Ap : A'p = Cq : C'q$$

und

$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

§. 39. *Lehrsatz.* In affinen Systemen haben entsprechende Flächen ein constantes Verhältniss zu einander, welches dem Affinitätsverhältniss gleich ist.

Beweis. Es seien ABC und $A'B'C'$ (Fig. 21.) zwei entsprechende Dreiecke in Figuren, die sich in Affinitätslage befinden, D und D' die Punkte, in welchen der Strahl BB' die Seiten AC und $A'C'$ durchschneidet. Alsdann hat man, wofern m das Affinitätsverhältniss bezeichnet,

$$\frac{Bq}{B'q} = \frac{Dq}{D'q} = m,$$

also auch

$$\frac{Bq - Dq}{B'q - D'q}, \text{ d. h. } \frac{BD}{B'D'} = m.$$

Weil nun die beiden Dreiecke ABD und $A'B'D'$ zwischen denselben Parallelen liegen, so hat man

$$\frac{\Delta ABD}{\Delta A'B'D'} = \frac{BD}{B'D'} = m,$$

und ebenso ist auch

$$\frac{\Delta CBD}{\Delta C'B'D'} = \frac{BD}{B'D'} = m;$$

mithin auch

$$\frac{\Delta ABD + \Delta BCD}{\Delta A'B'D' + \Delta B'C'D'} = m.$$

Hat man zwei beliebige entsprechende Flächen, so wird man dieselben in paarweise einander entsprechende Dreiecke zerlegen. Da nun je zwei entsprechende Dreiecke dasselbe Verhältniss zu einander haben, so wird auch die Summe der einen Gruppe zur Summe der andern in demselben Verhältnisse stehen. Hat man aber drei Figuren, von denen die erste der zweiten affin, der dritten ähnlich ist, und sind dann F_1, F_2, F_3 entsprechende Flächen in diesen Figuren, so hat man

$$\frac{F_1}{F_2} = m, \quad \frac{F_1}{F_3} = n^2,$$

indem man das Affinitätsverhältniss durch m, das Aehnlichkeitsverhältniss durch n bezeichnet. Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{n^2}{m}.$$

Zusatz. Sind die Affinitätsstrahlen der Axe parallel, so sind je zwei entsprechende Flächenräume einander gleich.

In Fig. 22. ist, wie leicht einzusehen, $DB = D'B'$, also Dreieck $ADB = A'D'B'$ und $DBC = D'B'C'$.

§. 40. *Lehrsatz.* Je zwei Dreiecke können als affine Figuren angesehen werden.

Beweis. Man nehme im Dreieck ABC (Fig. 25.) in der Richtung AB einen willkürlichen Punkt D an und verbinde D mit C. Sodann bestimme man im Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 25. a.) in der Richtung $\alpha\beta$ den Punkt δ dergestalt, dass derselbe zu α und β dieselbe Lage hat, wie D zu A und B, und dass sich verhält

$$AD : BD = \alpha\delta : \beta\delta;$$

endlich construire man über CD ein dem Systeme $\alpha\beta\gamma\delta$ ähnliches System $A'B'CD$. Dann sind die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C$ in Parallelperspective. Denn da sich verhält

$$AD : BD = \alpha\delta : \beta\delta = A'D : B'D,$$

so sind die Geraden AA' und BB' parallel. Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist aber dem Dreieck $A'B'C$ ähnlich; folglich stehen ABC und $\alpha\beta\gamma$, wenn nicht in unmittelbarer, doch in mittelbarer Affinität.

§. 41. *Lehrsatz.* Ist ein Viereck $ABCD$ gegeben (Fig. 23.), so sind durch dasselbe zunächst sechs Gerade und somit deren Durchschnittspunkte bestimmt.

Zwei Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ (Fig. 23. und Fig. 23. a.) sind affin, wenn sich in denselben zwei Paare proportionaler Punktreihen entsprechen.

Voraussetzung. Bei übereinstimmender Aufeinanderfolge der auf einander bezogenen Punkte verhält sich

$$1)\quad AF:A'F' = FC:F'C',$$

$$2)\quad BF:B'F' = FD:F'D'.$$

Behauptung. Die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sind affin.

Beweis. Man construire ein dem Dreieck $A'B'C'$ ähnliches Dreieck abc, welches mit ABC in Affinitätslage ist, und ergänze darauf abc zu einem dem Viereck $A'B'C'D'$ ähnlichen Vierecke $abcd$. Dann lässt sich beweisen, dass $abcd$ mit $ABCD$ in Affinitätslage ist.

Es verhält sich

$$af:fc = A'F':F'C' = AF:FC,$$

folglich ist Ff parallel mit Aa und Cc. Für's Zweite verhält sich

$$bf:fd = B'F':F'D' = BF:FD,$$

also sind auch Dd und Ff parallel. Da die beiden Dreiecke ABF und abf in Parallelperspective liegen, so schneiden sich BF und bf auf derselben Geraden, auf der sich einerseits AB und ab, andererseits AF und af einander treffen. Weiter werden sich dann AD und ad, sowie auch CD und cd, auf derselben Geraden schneiden, auf der AC und FB die ihnen entsprechenden Geraden treffen u. s. f.; folglich liegen die beiden Vierecke $ABCD$ und $abcd$ nicht bloss perspectivisch, sondern auch axial.

Zusatz. 1) Je zwei Parallelogramme sind affin, weil sich ihre Diagonalen gegenseitig halbiren.

2) Zwei Paralleltrapeze sind affin, wenn ihre parallelen Seiten in Proportion stehen.

Voraussetzung. In den Paralleltrapezen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ (Fig. 24. und Fig. 24. a.) verhält sich:

$$AB:CD = A'B':C'D'.$$

Behauptung. Die beiden Figuren sind affin.

Beweis. Es seien F und F' die Durchschnittspunkte der nicht parallelen Seiten. Dann verhält sich:

$$1)\quad AB:CD = AF:DF = BF:CF,$$

$$2)\quad A'B':C'D' = A'F':D'F' = B'F':C'F';$$

mithin

$$AF:A'F' = DF:D'F',$$

$$BF:B'F' = CF:C'F'.$$

§. 42. *Lehrsatz.* Zwei beliebige Vielecke sind affin, wenn der vierte, fünfte und jeder folgende Punkt des ersten in Bezug auf die drei ersten Punkte durch ein Viereck bestimmt ist, welches dem entsprechenden Vierecke des andern Systems affin ist.

Construirt man zuerst ein Dreieck abc, welches dem Dreiecke $A'B'C'$ ähnlich und mit ABC in Affinitätslage ist, und ergänzt sodann das Dreieck abc zu einem dem System $A'B'C'D'E'$.... ähnlichen System $abcde$...., so ist klar, dass dieses letztere mit $ABCDE$.... in Affinitätslage sein wird.

§. 43. *Lehrsatz.* Sind zwei Dreiecke in Affinitätslage gegeben und die Richtung der Affinitätsstrahlen senkrecht auf der Affinitätsaxe, so ist das kleinere dieser Dreiecke das kleinste und das grössere das grösste unter allen ähnlichen Dreiecken, welche mit dem andern in Parallelperspective gebracht werden können.

Beweis. Man denke sich (Fig. 26.) die beiden gegebenen Dreiecke mit zwei entsprechenden Ecken in A zusammengerückt. Schneiden sich dann die entsprechenden Seiten BC und $B'C'$ in D, so ist AD die Affinitätsaxe. Halten wir nun die beiden folgenden Bedingungen fest: erstens, dass die beiden Dreiecke ABC und $AB'C'$ in Parallelperspective bleiben sollen; zweitens, dass die Seite $B'C'$ durch den bestimmten Punkt D der Richtung BC gehen soll, — so lässt sich zeigen, dass das Dreieck $AB'C'$ in kein anderes ihm ähnliches verwandelt werden kann, ohne die gestellten Bedingungen zu verletzen.

Die Bedingung der perspectivischen Lage bestimmt das Verhältniss $DB' : B'C'$, da sich verhalten muss:

$$DB' : B'C' = DB : BC.$$

Die Bedingung der Aehnlichkeit bestimmt einmal den Winkel $DB'A$ und für's Zweite das Verhältniss $B'C' : B'A$; mithin ist zufolge der voranstehenden Proportion auch das Verhältniss $DB' : B'A$ bestimmt. Da nun überdies die Seite AD gegeben ist, so ist das Dreieck $AB'D$ durch die gegebenen Bedingungen vollkommen bestimmt.

Zieht man aber nun FF' parallel BB', so verhält sich

$$BF : CF = B'F' : C'F'.$$

Construirt man also über AF ein dem System $AB'C'F'$ ähnliches System, so wird dieses mit ABC in Affinitätslage sein. Dann fallen aber nicht mehr in D, sondern in F zwei entsprechende Punkte zusammen.

Aus dem Vorstehenden geht also hervor, dass, wenn zwei ähnliche Dreiecke mit einem dritten in Affinitätslage gebracht werden, dieses letztere niemals dieselben Punkte mit beiden als entsprechende Punkte gemein haben kann.

Es sei also einmal D, das andere Mal F derjenige Punkt, welcher mit dem ihm entsprechenden Punkte zusammenfällt und im erstern Falle BB' und CC' senkrecht auf AD; G aber sei der Durchschnittspunkt der Geraden AD und FF', von denen letztere, wie erwähnt, mit BB' parallel ist.

Es verhält sich

$$\triangle ABC : \triangle AB'C' = FG : F'G;$$

ist also $AB'C'$ kleiner als ABC, so ist auch $F'G$ kleiner als FG und mithin die Hypotenuse AF' kleiner als die Hypotenuse AF; folglich ist ein über AF construirtes, dem Systeme $AB'C'D'$ ähnliches System grösser als dieses, während es im Gegentheil grösser sein wird, sobald $F'G$ grösser ist als FG.

Zusatz. 1) Unter allen ähnlichen Dreiecken, welche mit einem gegebenen Dreiecke in Affinitätslage gebracht werden können, kann es nur zwei geben, bei denen die Richtung der Affinitätsstrahlen senkrecht auf der Affinitätsaxe ist, nämlich das grösste und das kleinste dieser Dreiecke.

2) Es seien zwei Dreiecke in Affinitätslage gegeben (Fig. 22.) und die Richtung der Affinitätsstrahlen senkrecht auf der Axe AD. Construirt man nun ein Dreieck, welches kleiner als das kleinere der gegebenen Dreiecke $AB'C'$, aber demselben ähnlich ist, so steht dieses dritte Dreieck zu ABC nur in mittelbarer Affinität. Eben so wird ein Dreieck, welches dem grösseren Dreiecke ABC ähnlich und grösser als dasselbe ist, mit $AB'C'$ in mittelbarer Affinität stehen.

Von den harmonischen Strahlenbüscheln und den harmonischen Punktreihen.

Bemerkung. In dem nun folgenden Abschnitte werden wir die Regel beobachten, dass wir an die Strahlen eines gegebenen Strahlenbüschels grosse Buchstaben setzen. Durch die entsprechenden kleinen Buchstaben werden diejenigen Punkte bezeichnet werden, in welchen diese Strahlen von irgend einer Transversale geschnitten werden.

§. 44. *Erklärung.* Verbindet man den Mittelpunkt eines

Parallelogramms $aca'c'$ (Fig. 27.) mit den Ecken desselben und mit den Mitten der Seiten, so bilden je vier auf einander folgende der vom Mittelpunkt O auslaufenden Strahlen einen harmonischen Büschel und werden auch vier Harmonikalen genannt.

Ein harmonischer Büschel ist also ein solcher, dessen Centrum O zum Mittelpunkte eines Parallelogramms gemacht werden kann, in welchem zwei der gegebenen Strahlen durch benachbarte Ecken, die beiden andern durch die Mitten zweier zusammenstossender Seiten gehen.

Verbindet man in dem gegebenen Parallelogramm $aca'c'$ die Mitten der Seiten unter einander, so entsteht ein neues Parallelogramm $bdb'd'$, in welchem diejenigen Strahlen durch die Ecken gehen, welche vorhin durch die Mitten der Seiten gingen und umgekehrt.

In einem harmonischen Büschel heissen der erste und dritte Strahl, sowie der zweite und vierte zugeordnete Strahlen.

§. 45. *Lehrsatz.* Durchschneidet man drei von vier gegebenen Harmonikalen durch eine dem vierten Strahl parallele Transversale, so ist der mittlere Durchschnittspunkt von den beiden äusseren gleich weit entfernt. (Fig. 27.)

In der That ist $\alpha\beta\gamma$ parallel mit OD und also auch mit abc, so ist $\alpha\beta = \beta\gamma$.

§. 46. *Zusatz.* Durch drei gegebene Strahlen ist allemal der vierte harmonische Strahl bestimmt. (Fig. 27.)

Denn gäbe es zwischen OA und OC ausser dem Strahl OB noch einen andern, welcher mit OA, OC, OD einen harmonischen Büschel bildete, so müsste jede mit OD parallele Transversale nicht bloss von OB, sondern auch von jenem andern Strahl halbirt werden.

§. 47. *Zusatz.* Man erhält allemal einen harmonischen Büschel, wenn man einen beliebigen Punkt O mit den Endpunkten einer Strecke ac und mit deren Mitte b verbindet. (Fig. 27.)

Denn macht man $Oa' = Oa$, $Oc' = Oc$, so wird $a'c'$ gleich und parallel mit ac, also $aca'c'$ ein Parallelogramm, in welchem OA und OC durch zwei benachbarte Ecken, OB und OD durch die Mitten zweier Seiten gehen.

§. 48. *Lehrsatz.* Halbirt man (Fig. 27.) einen Winkel AOC durch OB und errichtet darauf im Scheitel O ein Loth OD auf der Halbirungslinie, so erhält man vier Harmonikalen.

Beweis. Denn zieht man die Transversale abc parallel mit OD, so ist $\triangle Oba \cong Obc$; mithin $ab = bc$.

§. 49. *Zusatz.* 1) Stehen in einem harmonischen Büschel zwei zugeordnete Strahlen auf einander senkrecht, so wird der Winkel, welchen die beiden andern zugeordneten Strahlen mit einander bilden, durch den zwischenliegenden Strahl halbirt. Denn sonst würde die Halbirungslinie dieses Winkels ebenfalls eine vierte Harmonikale zu den drei andern Strahlen sein.

2) Wird in einem harmonischen Büschel der von zwei zugeordneten Strahlen gebildete Winkel durch den zwischenliegenden Strahl halbirt, so stehen die beiden andern zugeordneten Strahlen senkrecht auf einander.

§. 50. *Erklärung.* Man sagt, die Strecke ac (Fig. 27. a.) werde von den beiden Punkten b und d harmonisch getheilt, wenn die Abstände des Punktes b von a und c sich eben so zu einander verhalten, wie die Abstände des Punktes d von eben diesen Punkten, also wenn man hat:

$$ab : cb = ad : cd.$$

Wird die Strecke ac in b und d harmonisch getheilt, so wird auch bd in a und c harmonisch getheilt; denn aus der obigen Proportion folgt durch Umstellung der Mittelglieder:

$$ba : da = bc : dc.$$

Die Punkte a, b, c, d heissen vier harmonische Punkte oder eine harmonische Punktreihe; a und c, sowie andererseits b und d, heissen zugeordnete Punkte.

§. 51. *Lehrsatz.* Ein harmonischer Büschel wird von jeder Transversale in vier harmonischen Punkten durchschnitten. (Fig. 27. a.)

Beweis. Man ziehe durch den Punkt c eine Parallele $b'd'$ mit Oa. Dann ist das Dreieck Oab ähnlich dem Dreieck $b'cb$ und ebenso $\triangle Oad \sim \triangle d'cd$. Es verhält sich also:

$$Oa : cb' = ab : cb,$$

$$Oa : cd' = ad : cd:$$

nun aber ist $b'c = cd'$, also hat man:

$$ab : cb = ad : cd.$$

§. 52. *Lehrsatz.* Verbindet man sämmtliche Punkte einer harmonischen Punktreihe mit irgend einem Punkte O, so bilden die Verbindungslinien allemal einen harmonischen Büschel. (Fig. 27. a.)

Voraussetzung. Es verhält sich

$$ab : cb = ad : cd.$$

Behauptung. OA, OB, OC, OD sind vier Harmonikalen.

Beweis. Zieht man $b'cd'$ parallel mit Oa, so verhält sich

$$Oa : b'c = ab : cb,$$

$$Oa : cd' = ad : cd;$$

mithin ist wegen der Voraussetzung:

$$Oa : b'c = Oa : cd',$$

$$b'c = cd'.$$

§. 53. *Lehrsatz.* Werden in einem harmonischen Büschel von zwei beliebigen Punkten, die auf zwei zugeordneten Strahlen liegen, Lothe auf die beiden andern zugeordneten Strahlen gefällt, so stehen die vier gefällten Lothe in Proportion. (Fig. 27. a.)

Beweis. Um zu beweisen, dass sich verhält

$$bk : dk' = bl : dl',$$

ziehe man durch b und d eine Transversale $abcd$. Alsdann verhält sich

$$ab : ad = cb : cd;$$

nun aber ist $\triangle abk \sim \triangle adk'$ und $\triangle bcl \sim \triangle dcl'$, mithin verhält sich

$$bk : dk' = ab : ad,$$

$$bl : dl' = cb : cd;$$

woraus sogleich das Behauptete hervorgeht.

Zusatz. Ist umgekehrt die Proportion

$$bk : dk' = bl : dl'$$

gegeben, so leitet man wiederum daraus ab:

$$ab : ad = cb : cd;$$

mithin sind vier Strahlen harmonisch, wenn die Entfernungen eines Punktes im zweiten Strahl vom ersten und dritten Strahl sich ebenso zu einander verhalten, wie die Entfernungen eines Punktes im vierten Strahl von denselben Strahlen.

§. 54. *Lehrsatz.* Sind auf einer Geraden zwei feste Punkte a und b gegeben, so ist die Lage jedes dritten Punktes c vollkommen bestimmt, wenn zuerst bekannt ist, ob dieser Punkt zwischen den Punkten a und b oder ausserhalb derselben liegt, und wenn zweitens das Verhältniss der Abstände des Punktes c von den Punkten a und b gegeben ist. (Fig. 28.)

Beweis. Liegt c zwischen a und b, so nimmt das Verhältniss $\frac{ac}{bc}$ zu, wenn sich c dem Punkte b nähert, dagegen ab, wenn c näher an a rückt. Ist zweitens d ein Punkt in der Verlängerung von ab, so kann es auf derselben Seite von ab keinen Punkt x geben, welcher die Bedingung

$$\frac{ax}{bx} = \frac{ad}{bd}$$

erfüllte; denn alsdann wäre auch

$$\frac{ax-ad}{bx-bd}, \text{ d. h. } \frac{dx}{dx} = \frac{ad}{bd},$$

was offenbar ungereimt ist.

§. 55. *Zusatz.* Durch drei gegebene Punkte auf einer geraden Linie ist allemal der vierte harmonische bestimmt, wenn noch bekannt ist, welche beiden der gegebenen Punkte zugeordnete sein sollen.

§. 56. *Aufgabe.* Die Strecke ac harmonisch zu theilen, wenn noch einer der Theilpunkte gegeben ist.

Auflösung. Man schlage über ac einen Halbkreis. Ist nun der Punkt b zwischen a und c als der eine Theilpunkt gegeben, so errichte man in b das Loth bx bis zur Peripherie, ziehe in x eine Tangente an den Halbkreis und verlängere dieselbe, bis sie die Richtung ac in d durchschneidet. Dann ist der Punkt d der gesuchte vierte harmonische Punkt. Wäre d gegeben und b gesucht, so würde man von d aus eine Tangente ziehen und vom Berührungspunkt x ein Loth auf ac fällen.

Beweis. Verbindet man x mit a und c, so ist W. bxd = W. bax = W. bxc, dabei ist W. $axc = R$; folglich x das Centrum eines harmonischen Büschels. (§. 48.)

Fällt b in die Mitte von ac, so wird die Tangente in x parallel mit ac; der vierte harmonische Punkt zu a, b, c liegt alsdann in unendlicher Entfernung, oder, genauer ausgedrückt, es giebt keinen vierten harmonischen Punkt.

Die beiden Punkte b und d liegen immer auf derselben Seite der Mitte von ac. Fällt b mit a oder c zusammen, so fällt d jedesmal in denselben Punkt.

Denkt man sich den Punkt a in unendliche Entfernung gerückt, so fällt c in die Mitte von bd.

Anmerkung. Die Betrachtungsweise, nach welcher Paral-

lellinien einen Durchschnittspunkt haben, welcher in unendlicher Entfernung liegt, ist für den Vortrag des hier behandelten Gegenstandes von grosser Wichtigkeit.

Denkt man sich einen Strahlenbüschel von einer Transversale durchschnitten, so entspricht jedem Punkte der Transversale ein bestimmter Strahl; dem unendlich entfernten Punkte entspricht derjenige Strahl, welcher der Transversale parallel läuft. Da es aber nur einen Parallelstrahl giebt, sò ist der unendlich entfernte Punkt der Transversale gleichsam ein vollkommen bestimmter Punkt, und es ist dabei gleichgültig, nach welcher Seite hin man denselben versetzt. Mehrere unter einander parallele Linien werden hiernach ebenfalls so angesehen, als schnitten sie sich in demselben Punkte.

§. 56. *Lehrsatz.* Halbirt man in einem Dreiecke ABC den Winkel A, so bildet die Halbirungslinie auf der gegenüberliegenden Seite Abschnitte, die sich verhalten, wie die anliegenden Seiten, nämlich:

$$BD : DC = BA : DA.$$

§. 57. *Lehrsatz.* Der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke über einer gegebenen Grundlinie BC, in denen die beiden andern Seiten ein constantes Verhältniss zu einander haben, ist eine Kreislinie, deren Mittelpunkt auf der Geraden BC liegt und durch welche die Strecke BC harmonisch getheilt wird.

Beweis. Es sei AD die Halbirungslinie des Winkels A. Ist nun das Verhältniss der Seiten AB und AC gegeben, so ist zugleich das Verhältniss $BD : DC$ gegeben und somit der Punkt D bestimmt. Errichtet man nun in A ein Loth auf AD, so trifft dieses Loth nach §. 48. den vierten harmonischen Punkt E zu B, D, C; mithin ist der Punkt E ebenfalls bestimmt. Da nun aber der Winkel DAE ein Rechter ist, so liegt der Punkt A in der Peripherie eines Kreises, welcher die Strecke DE zum Durchmesser hat.

§. 58. *Erklärung.* Man sagt, zwei Kreise stehen senkrecht auf einander, wenn im Durchschnittspunkte die Tangenten beider Kreislinien senkrecht auf einander stehen. Es leuchtet sogleich ein, dass, wenn dies in einem der Schnittpunkte der Fall ist, es auch im andern Statt finden muss. Zwei Radien des einen Kreises sind alsdann Tangenten des andern.

§. 59. *Lehrsatz.* Zieht man durch zwei zugeordnete von vier harmonischen Punkten eine beliebige Kreislinie, durch die

beiden andern aber eine solche, deren Mittelpunkt mit denselben in gerader Linie liegt, so stehen die beiden Kreise senkrecht auf einander. (Fig. 31.)

Beweis. Es seien A, B, C, D vier harmonische Punkte, die Strecke AC Sehne eines Kreises, die Strecke BD der Durchmesser eines zweiten, F der Durchschnittspunkt beider Kreise; alsdann behaupte ich, dass der Radius FG des Kreises, welcher durch B und D geht, eine Tangente des andern Kreises sei. Die Strahlen FA, FB, FC, FD sind vier Harmonikalen, der Strahl FD steht aber senkrecht auf FB; folglich ist W. AFB = W. BFC. Nun ist

$$\text{W. } FBG = \text{W. } BFG = BFC + CFG,$$

aber als Aussenwinkel des Dreiecks AFB ist auch

$$\text{W. } FBG = FAB + AFB;$$

mithin

$$BFC + CFG = FAB + AFB.$$

Hebt man die beiden gleichen Winkel BFC und AFB gegen einander auf, so bleibt

$$\text{W. } CFG = \text{W. } FAB.$$

Die Linie FG fällt also mit der Tangente in F zusammen, da der Winkel, den eine Sehne mit einer Tangente im Berührungspunkte bildet, dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitt gleich ist.

§. 60. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Stehen zwei Kreise senkrecht auf einander, so wird jeder Durchmesser des einen durch die Peripherie des andern harmonisch getheilt. (Fig. 31.)

Beweis. Ist der Radius FG des einen Kreises eine Tangente des andern, so ist W. GFC = W. FAC. Nun aber ist

$$\text{W. } AFB = FBC - FAC,$$

$$\text{W. } CFB = FBC - GFC;$$

folglich W. AFB = W. CFB. Da nun FD senkrecht steht auf FB, so sind FA, FB, FC, FD vier Harmonikalen.

Zusatz. Bekanntlich ist (Fig. 31.):

$$\overline{FG}^2 = AG \times CG.$$

Da nun $FG = FB$ und $= FD$ ist, so hat man folgenden sehr bemerkenswerthen Satz:

Halbirt man in einer harmonischen Punktreihe die Strecke zwischen zwei zugeordneten Punkten, so ist die erhaltene Hälfte die mittlere Proportionale aus den Entfernungen des Halbirungspunktes von den beiden andern zugeordneten Punkten.

§. 61. *Lehrsatz.* Zwei harmonische Punktreihen liegen perspectivisch, so bald sie einen gemeinsamen Punkt haben, und zwar in Bezug auf zwei Projectionscentra. (Fig. 32.)

Beweis. Man verbinde zuerst diejenigen beiden Punkte c und c', welche von dem gemeinsamen Punkte a durch je einen zwischenliegenden Punkt getrennt sind. Ist alsdann O der Durchschnittspunkt der beiden Geraden bb' und cc', so behaupte ich, dass auch dd' durch diesen Punkt gehen muss. Denn angenommen, es wäre nicht der Fall, so würde die Gerade Od' in der Richtung der Reihe $abcd$ einen fünften Punkt, etwa den Punkt x, treffen. Dann wäre der Annahme nach einmal d der vierte harmonische Punkt zu a, b, c; der Punkt x aber wäre ebenfalls der vierte harmonische Punkt zu a, b, c, weil die Strahlen Oa, Ob', Oc', Od' vier Harmonikalen sind. Dies aber ist nicht möglich, da durch drei gegebene Punkte, von denen zwei bestimmte einander zugeordnet sind, der vierte harmonische Punkt bestimmt ist. (§. 55.) Sollte bb' parallel mit cc' sein, so würde, wie leicht einzusehen, auch dd' parallel cc' sein.

Ist P der Durchschnittspunkt der Geraden bd' und cc', so beweiset man auf ganz ähnliche Art, dass auch $b'd$ durch den Punkt P gehen muss.

Zusatz. Zwei harmonische Punktreihen liegen auch perspectivisch, so bald sie mit drei Paaren ihrer Punkte perspectivisch liegen. (Fig. 33.)

§. 62. *Lehrsatz.* Zwei harmonische Büschel liegen axial, wenn sie einen gemeinschaftlichen Strahl haben, d. h. wenn ein Strahl von jedem Büschel durch das Centrum des andern geht. (Fig. 34.)

Beweis. Es sei d der Durchschnitt derjenigen beiden Strahlen, die von dem gemeinschaftlichen Strahl OP durch einen zwischenliegenden getrennt sind. Ist nun c der Durchschnittspunkt der Strahlen OC und PC', so wird behauptet, dass der Punkt a, in welchem sich die Strahlen OA und PA' durchschneiden, mit c und d in gerader Linie liegt.

Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so würde die Richtung cd, welche den gemeinsamen Strahl OP in b schneiden mag,

auf dem Strahl OA einen Punkt x, welcher nicht mit a zusammenfiele, und auf dem Strahl PA' einen Punkt y treffen. Dann wären aber sowohl $xbcd$ als $ybcd$ harmonische Punktreihen, was nicht möglich ist.

Ebenso leicht zeigt man, dass, wenn von den drei Linien OA, PA' und cd zwei parallel sind, auch die dritte ihnen parallel ist, weil alsdann b in der Mitte zwischen c und d liegen wird.

Zusatz. Zwei harmonische Büschel liegen auch axial, wofern sie mit drei Paaren ihrer Strahlen axial liegen.

Einige vorläufige Erklärungen und Lehrsätze über Conformität.

§. 63. *Erklärung.* Wir sagen, zwei Punktreihen seien in Conformitätslage, wenn sie in Centralperspective liegen und ihre Richtungen nicht parallel sind. Zwei Punktreihen, welche zu einander in Conformitätslage gebracht werden können, heissen conform.

Hiernach kann man zwei beliebige Punktreihen von je drei Punkten, welche weder proportional, noch congruent sind, als conform ansehen. Werden sie nämlich in eine solche Lage gebracht, dass sie einen gemeinsamen Punkt a haben (Fig. 36.), so werden sich die Geraden bb' und cc' in irgend einem Punkte O durchschneiden. Denkt man sich also noch den Punkt a mit O verbunden, so sind die beiden Punktreihen in Centralperspective. Fügt man aber den drei Punkten a, b, c noch einen vierten Punkt d hinzu, so trifft der Strahl Od einen bestimmten Punkt d' in der andern Reihe, welcher dem Punkte d entspricht. Es wird gezeigt werden, dass man immer denselben Punkt d' erhält, unter welchem Winkel man auch die Reihen abc und $a'b'c'$ zusammenlegen mag. Zunächst mag folgende Bemerkung genügen:

Zwei harmonische Punktreihen sind im Allgemeinen conform; sie können aber auch proportional und auch congruent sein nach §. 61.

§. 64. *Erklärung.* Man sagt von zwei Figuren, sie seien in Conformitätslage, wenn dieselben perspectivisch und axial liegen, und sowohl das Projectionscentrum, als auch die Axe im endlichen Raume liegt.

§. 65. *Lehrsatz.* Zwei verwandte Figuren, welche in Centralperspective liegen, sind in Conformitätslage, wenn diejenige Strecke eines jeden Projectionsstrahls, welche zwischen dem

Centrum und einer festen Geraden liegt, von je zwei entsprechenden Punkten harmonisch getheilt wird. (Fig. 37.)

Beweis. Es seien k und l die Durchschnittspunkte zweier Projectionsstrahlen mit der festen Geraden XY und $Oaka'$, sowie $Oblb'$ harmonische Punktreihen, so werden sich die Geraden ab, $a'b'$, kl in einem und demselben Punkte schneiden oder einander parallel sein, da beide Reihen den gemeinsamen Punkt O haben.

Der vorstehende Lehrsatz enthält nicht die einzige Bedingung, unter welcher Figuren in Conformitätslage gedacht werden können. Im gegenwärtigen Falle liegen übrigens die beiden Figuren involutorisch; denn sieht man den Punkt a' als Punkt des ersten Systems an, so wird der ihm entsprechende Punkt in a fallen.

§. 66. *Erklärung.* Für diejenigen Punkte eines Systems, welche in der Mitte zwischen Conformitätspunkt und Axe liegen, giebt es keine entsprechenden Punkte in dem andern Systeme; sie liegen in unendlicher Entfernung. Ein Punkt eines Systems, für welchen es keinen entsprechenden Punkt in dem andern System giebt, heisst ein Gegenpunkt. Im gegenwärtigen Falle liegen die Gegenpunkte beider Systeme auf einer Geraden, welche der Axe parallel ist und von dieser und dem Centrum gleichen Abstand hat. Sie heisst die gemeinsame Gegenaxe beider Systeme.

Nicht immer haben Figuren in Conformitätslage eine gemeinsame Gegenaxe.

§. 67. *Folgerungen.* 1) Jede Gerade des einen Systems ist dem Projectionsstrahl parallel, welcher durch den Gegenpunkt der entsprechenden Geraden geht. (Fig. 38.)

Beweis. Es sei m der Durchschnittspunkt der Geraden ap mit der Gegenaxe UV, n der Durchschnittspunkt des Projectionsstrahls Om mit der Conformitätsaxe XY.

Die Gerade $a'p$ kann den Strahl Om nicht schneiden, weil der Durchschnittspunkt der vierte harmonische Punkt zu Omn sein würde.

2) Schneiden sich zwei Gerade des einen Systems auf der Gegenaxe in m, so sind die entsprechenden Geraden parallel, und umgekehrt:

Sind die Geraden $a'p$ und $b'q$ parallel, so schneiden sich die entsprechenden Geraden ap und bq auf der Gegenaxe. Nur wenn zwei Gerade beide der Conformitätsaxe parallel sind, so entsprechen wiederum zwei Gerade, die einander und der Conformitätsaxe parallel sind.

§. 68. *Folgerungen.* Aus dem Vorstehenden ergiebt sich:

1) Durchschnittspunkte von entsprechenden Geraden sind entsprechende Punkte. (Fig. 37.)

Werden die Punkte p und q, in denen die Geraden ab und cd den ihnen entsprechenden Geraden auf der Conformitätsaxe begegnen, mit dem Centrum O verbunden, so werden dieselben Centra von zwei harmonischen Büscheln, welche den Strahl pq gemein haben und daher axial liegen müssen. Demnach liegen die Durchschnittspunkte f und f' mit dem Centrum O in gerader Linie, und wenn man den Strahl Off' zieht, so wird diejenige Strecke desselben, welche zwischen Centrum und Axe liegt, in f und f' harmonisch getheilt. Folglich sind f und f' entsprechende Punkte.

2) Liegen die Punkte afb in gerader Linie, so liegen auch die ihnen entsprechenden Punkte des andern Systems $a'f'b'$ in gerader Linie.

3) Schneiden sich drei Gerade des einen Systems in einem einzigen Punkt, welcher nicht auf der Gegenaxe liegt, so schneiden sich auch die ihnen entsprechenden Geraden in einem und demselben Punkte.

4) Vier harmonischen Punkten des einen Systems entsprechen wiederum vier harmonische Punkte.

Fallen die beiden Punktreihen nicht in die Richtung eines Projectionsstrahls, so folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar aus der perspectivischen Lage beider Systeme.

Fallen aber (Fig. 39.) die beiden Reihen in die Richtung eines Projectionsstrahls, so ziehe man einen zweiten Projectionsstrahl durch den beliebigen Punkt n der Axe und theile denselben in f und f' harmonisch, so dass man also f und f' als entsprechende Punkte ansehen kann. Dann werden die Geraden af, bf, cf, df die ihnen entsprechenden Geraden auf der Axe XY bezüglich in α, β, γ, δ treffen. Sind nun $abcd$ vier harmonische Punkte, so ist auch die Reihe $\alpha\beta\gamma\delta$ harmonisch und folglich auch $a'b'c'd'$.

Liegt einer der vier harmonischen Punkte $abcd$ (Fig. 40.), etwa der Punkt a, auf der Gegenaxe, und ist c der ihm zugeordnete Punkt, so liegt der dem letztern entsprechende Punkt c' in der Mitte zwischen b' und d'.

Denn die vier Strahlen Oa, Ob, Oc, Od bilden einen harmonischen Büschel, die Transversale $b'c'd'$ ist parallel dem Strahl Oa nach §. 67., folglich ist c' die Mitte zwischen b' und d'. Läge

in Fig. 39. der Punkt a auf der Gegenaxe, so würde af' als entsprechend mit af dem Strahl Oa nach §. 67. parallel sein. In Bezug auf den harmonischen Büschel, dessen Centrum f' ist, würde also $b'c'd'$ eine dem Strahl af' parallele Transversale sein, woraus wiederum folgt, dass c' die Mitte zwischen b' und d' sein müsste.

5) Einem harmonischen Büschel entsprechen wiederum vier Harmonikalen. Die Behauptung folgt für Strahlenbüschel, deren Centrum nicht auf der Conformitätsaxe liegt, unmittelbar aus der axialen Lage.

Fallen aber die beiden Centra in einen Punkt der Conformitätsaxe, so ziehe man vom Centrum O einen beliebigen Projectionsstrahl. Derselbe schneidet je zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel in entsprechenden Punkten. Ist also die eine Reihe von zusammengehörigen Punkten harmonisch, so wird es auch die andere sein; folglich sind auch die Strahlen, welche durch diese Punkte hindurch gehen, harmonisch.

Anmerkung. Das Projectionscentrum ist als ein gemeinsamer Punkt der beiden Systeme, die Axe als eine Reihe gemeinsamer Punkte anzusehen.

Anstatt weiter zu gehen, wollen wir das bisher Vorgetragene durch eine Reihe von Anwendungen erläutern.

Vom Kreise.

§. 69. *Lehrsatz.* Zwei Kreise sind allemal ähnliche Figuren; jede Lage derselben ist eine Aehnlichkeitslage und zwar in Bezug auf zwei Aehnlichkeitspunkte. (Fig. 41. und Fig. 41. a.)

Beweis. Man ziehe die Centrale cc' und sodann zwei parallele Halbmesser ca und $c'a'$, entweder wie in Fig. 41. nach einer und derselben Seite, oder wie in Fig. 41. a. nach entgegengesetzten Seiten. Verbindet man nun die Punkte a und a', so zeigt sich

1) dass die Gerade aa' durch einen bestimmten Punkt der Centrale O geht;

2) dass das Verhältniss $Oa:Oa'$ unveränderlich ist.

Es verhält sich nämlich:

$$aO:a'O = ac:a'c' = cO:c'O.$$

Durch das constante Verhältniss $cO:c'O$ ist aber der Punkt O vollkommen bestimmt.

Der Punkt O in Fig. 41. ist ein äusserer, der Punkt O in Fig. 41. a. ein innerer Aehnlichkeitspunkt. Der innere und der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise theilen, wie man sieht, die Centrale cc' harmonisch.

Liegen die beiden gegebenen Kreise ausser einander, so liegen die beiden Aehnlichkeitspunkte ausserhalb beider Kreise. Berühren sich die beiden Kreise von aussen (Fig. 42.), so liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt ausserhalb beider Kreise, der innere fällt mit dem Berührungspunkt zusammen.

Wenn beide Kreise sich durchschneiden (Fig. 43.), so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt in demjenigen Flächenstück, welches beide Kreise gemein haben. Berühren sich zwei Kreise von innen, so ist der Berührungspunkt der innere Aehnlichkeitspunkt; wofern aber der eine Kreis ganz innerhalb des andern liegt, liegen beide Aehnlichkeitspunkte innerhalb beider Kreise (Fig. 44. und Fig. 45.). Wenn endlich die beiden Kreise concentrisch sind, so fallen beide Aehnlichkeitspunkte in den gemeinsamen Mittelpunkt.

Die Mittelpunkte beider Kreise sind allemal entsprechende Punkte, sowie zwei parallele Durchmesser entsprechende Gerade sind.

Zusatz. Fällt man von den Mittelpunkten zweier Kreise Lothe cd und $c'd'$ auf einen Aehnlichkeitsstrahl, so verhalten sich diese Lothe wie die Radien der beiden Kreise:

$$cd : c'd' = cO : c'O = ac : a'c'.$$

§. 70. *Lehrsatz.* Betrachtet man zwei Kreise als in Aehnlichkeitslage befindlich, so sind je zwei Tangenten an entsprechende Punkte parallel. (Fig. 46.)

Beweis. Es seien bc und $b'c'$ Stücke eines und desselben Aehnlichkeitsstrahls, welche von den beiden Kreislinien um a und a' abgeschnitten werden. Zieht man nun in b und b' die Tangenten bd und $b'd'$, so ist der W. $cbd = \frac{1}{2}$W. cab, W. $c'b'd' = \frac{1}{2}$W. $c'a'b'$. Da aber die Winkel cab und $c'a'b'$ von entsprechenden Geraden gebildet werden, so sind sie gleich, und folglich auch W. cbd = W. $c'b'd'$, also $bd \parallel b'd'$.

§. 71. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Die Berührungspunkte paralleler Tangenten sind allemal entsprechende Punkte, und zwar in Bezug auf den innern oder den äussern Aehnlichkeitspunkt, jenachdem sie auf verschiedenen Seiten der Centrale oder auf derselben Seite liegen.

Der Beweis ist leicht indirect zu führen, insofern es in einem jeden der Kreise auf derselben Seite der Centrale nicht zwei parallele Tangenten geben kann.

§. 72. *Zusatz.* **Die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise gehen allemal durch einen Aehnlichkeitspunkt. (Fig. 47.)**

Beweis. Sind b und b' die Berührungspunkte einer Tangente, welche die beiden Kreise um c und c' gemein haben, O der Durchschnittspunkt derselben mit der Centrale, so verhält sich

$$Oc : Oc' = cb : c'b';$$

mithin ist O der Aehnlichkeitspunkt.

§. 73. *Erklärung.* Zwei Punkte in zwei verschiedenen Kreisen, welche auf demselben Aehnlichkeitsstrahle liegen, ohne entsprechende Punkte zu sein, nennt man inverse Punkte. In Fig. 46. sind b und c', sowie b' und c inverse Punkte des äusseren Aehnlichkeitspunktes.

§. 74. *Lehrsatz.* **Tangenten an inverse Punkte sind von ihrem Durchschnittspunkte bis zu ihren Berührungspunkten gerechnet einander gleich. (Fig. 46.)**

Beweis. Es seien b und c' inverse Punkte. Zieht man in den Punkten b, b' und c' Tangenten, so ist der Winkel $d'c'b' = d'b'c' = dbc$. Verlängert man also die beiden Tangenten db und $d'c'$, bis sie sich in f schneiden, so ist das Dreieck bfc' gleichschenklig.

§. 75. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Sind zwei Tangenten an verschiedene Kreise von ihrem Durchschnittspunkt bis zu ihren Berührungspunkten gerechnet einander gleich, so sind ihre Berührungspunkte allemal inverse Punkte des innern oder äussern Aehnlichkeitspunktes. (Fig. 46.)

Beweis. Man verbinde die Berührungspunkte der beiden gleichen Tangenten fb und fc', die Verbindungslinie bc' möge den Kreis um a' zum zweiten Mal in b' durchschneiden. Zieht man nun in b' eine neue Tangente, so ist W. $d'b'c' = d'c'b' = fc'b = fbc'$. Folglich ist $bd \parallel b'd'$, und es muss daher die Linie bb' nach §. 71. durch einen Aehnlichkeitspunkt gehen.

§. 76. *Anmerkung.* Vom Punkte f in Fig. 46. lässt sich an jeden Kreis noch eine zweite Tangente ziehen, so dass vom Punkte f im Ganzen vier gleiche Tangenten auslaufen: fb, fc', fg, fk'. Gehen nun die Geraden bc' und gh' durch den äussern Aehnlichkeitspunkt, so werden bh' und gc' durch den innern Aehnlichkeitspunkt gehen.

§. 77. *Lehrsatz.* **Wenn zwei Kreise einander berühren, so hat die gemeinsame Tangente die Eigenschaft, dass, wenn man von**

einem Punkt derselben Tangenten an beide Kreise zieht, diese beide Tangenten, von ihrem Durchschnittspunkt bis zu ihren Berührungspunkten gerechnet, einander gleich sind.

§. 78. *Lehrsatz.* Schneiden einander zwei Kreise (Fig. 48.) in c und d, so hat die gemeinsame Sekante die im vorigen Paragraphen bezeichnete Eigenschaft. Denn man hat

$$\overline{fb}^2 = \overline{fb'}^2 = fc \times fd.$$

§. 79. *Lehrsatz.* Theilt man einen Durchmesser eines Kreises harmonisch in c und d (Fig. 49.), und errichtet in der Mitte von cd ein Loth, so hat dieses Loth XY die Eigenschaft, dass, wenn man von einem seiner Punkte f eine Tangente an den Kreis zieht, diese Tangente allemal so gross ist, wie die Linien, welche den Punkt f mit c und d verbinden.

Beweis. Beschreibt man vom Punkte f einen Kreis, welcher durch c und d geht, so steht dieser auf dem gegebenen Kreise senkrecht. Die Tangente fh muss also durch einen Durchschnittspunkt der beiden Kreise gehen, folglich ist

$$fh = fc = fd.$$

§. 80. *Lehrsatz.* Zieht man in zwei Kreisen durch zwei inverse Punkte Tangenten, so hat ein vom Durchschnitt derselben auf die Centrale gefälltes Loth die in §. 78. bezeichnete Eigenschaft. (Fig. 49.)

Beweis. Erster Fall (Fig. 49.). Liegen die beiden Kreise ausser einander, so befinden sich zwei inverse Punkte des innern Aehnlichkeitspunkts h und k' auf verschiedenen Seiten der Centrale. Beschreibt man nun vom Durchschnittspunkt der beiden Tangenten fh und fk' mit dem Radius $fh = fk'$ einen Kreis, so wird dieser die Centrale in zwei Punkten c und d durchschneiden. Der Kreis um f steht aber senkrecht auf den beiden gegebenen Kreisen; folglich werden die beiden Durchmesser ab und $a'b'$ in c und d harmonisch getheilt. Fällt man nun von f ein Loth auf cd, so geht dieses durch die Mitte von cd, also ergiebt sich das Uebrige aus dem vorigen Paragraphen.

Zweiter Fall. Liegt einer der beiden Kreise ganz innerhalb des andern, so liegen (Fig. 50.) zwei inverse Punkte des äussern Aehnlichkeitspunktes auf verschiedenen Seiten der Centrale, so dass man den so eben geführten Beweis wiederholen kann.

§. 81. *Erklärung.* Eine Linie von der im §. 78. angegebenen Beschaffenheit heisst die Potenzenlinie der beiden gegebe-

nen Kreise, welcher Name auch in dem Falle des §. 80. angewendet wird, wo der eine Kreis in einen Punkt übergegangen ist.

§. 82. *Lehrsatz.* Es kann nur eine Potenzenlinie für zwei Kreise geben (Fig. 48.).

Beweis. Es sei g ein Punkt ausserhalb der Potenzenlinie XY, f der Punkt, in welchem die Potenzenlinie XY von einer durch den Punkt g an den Kreis um a gezogenen Tangente gb durchschnitten wird.

Zieht man vom Punkte f die beiden Tangenten fb' und fm' an den Kreis um a', so ist $fb' = fm' = fb$; mithin sind b' und m' inverse Punkte zu b. Liessen sich nun vom Punkte g an den Kreis um a' zwei Tangenten gp' und gq' ziehen, welche gleich gb wären, so würden p' und q' ebenfalls inverse Punkte zu b sein. Dies ist aber nicht möglich, da es zu einem Punkte nur zwei inverse Punkte geben kann, einen in Bezug auf den innern, den andern in Bezug auf den äussern Aehnlichkeitspunkt.

Die Potenzenlinie steht allemal senkrecht auf der Centrale und ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche die beiden gegebenen Kreise senkrecht durchschneiden. Liegen die beiden gegebenen ganz ausser einander, so fällt die Potenzenlinie zwischen beide Kreise; liegt ein Kreis innerhalb des andern, so liegt die Potenzenlinie ausserhalb beider Kreise.

Durchschneidet man zwei gegebene Kreise durch einen dritten und zieht die gemeinsamen Sekanten ab und $a'b'$ (Fig. 51.), so ist deren Durchschnitt d ein Punkt der Potenzenlinie.

Denn man hat alsdann

$$da \times db = da' \times db'.$$

Zieht man von d die Tangenten df und df' an beide Kreise, so ist

$$\overline{df}^2 = da \times db, \quad \overline{df'}^2 = da' \times db',$$

folglich

$$df = df'.$$

Zusatz. Auch für einen Kreis und einen Punkt kann es nur eine Potenzenlinie geben.

Denn wäre (Fig. 49.) $lh = lc$, so müsste, da $fc = fh$ ist, $cf = lc + lf$ sein. Wäre $mc = mh$, so müsste $mf = mc + fc$ sein, was nicht möglich ist.

§. 83. *Erklärung.* Ein in einen Kreis beschriebenes Vier-

eck von der Beschaffenheit, dass das Product aus zweien seiner Gegenseiten so gross ist, wie das Product aus den beiden andern, heisst ein harmonisches Viereck, und seine Ecken sind vier harmonische Punkte der Kreislinie.

Ist $ABCD$ (Fig. 52.) ein harmonisches Viereck, so wird man haben:

$$AB \times CD = AD \times BC,$$

oder es wird sich verhalten

$$AB : OB = AD : CD.$$

Vier Punkte einer Kreislinie sind harmonische Punkte, wenn die Abstände des Punktes B von A und C sich eben so zu einander verhalten, wie die Abstände des Punktes D von denselben Punkten. Vergleiche §. 50.

Zieht man in einem Kreise einen Durchmesser und eine darauf senkrechte Sehne, so sind die Endpunkte derselben vier harmonische Punkte der Kreislinie.

§. 84. *Lehrsatz.* Zieht man vom Durchschnitt eines Tangentenpaars eine Sekante durch den Kreis, so sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten und die Durchschnittspunkte der Sekante vier harmonische Punkte der Kreislinie. (Fig. 52.)

Beweis. Man verbinde die Durchschnittspunkte der Sekante B und D mit den Berührungspunkten der Tangenten OA und OC.

Es ist

$$\triangle AOB \backsim \triangle DOB,$$

mithin verhält sich

$$AD : AB = DO : AO.$$

Ebenso verhält sich

$$CD : CB = DO : CO.$$

Folglich verhält sich wegen $AO = CO$:

$$AD : AB = CD : CB,$$

und es ist

$$AD \times CB = AB \times CD.$$

§. 86. *Lehrsatz.* Zieht man durch den einen von vier harmonischen Punkten einer Kreislinie eine Tangente, so ist diese Tangente die vierte Harmonikale zu den drei Sehnen, welche

ihren Berührungspunkt mit den drei übrigen Punkten verbinden. (Fig. 52.)

Beweis. Man fälle von den beiden Punkten B und D Lothe auf die Tangente und die mittlere Sehne AC. Diese Lothe seien Bk, Dl, Bm, Dn.

Es ist

$$\triangle BAk \backsim \triangle BCm,$$

also verhält sich

$$Bk : Bm = BA : BC.$$

Ebenso ist

$$\triangle DAl \backsim \triangle DCn,$$

und es verhält sich daher

$$Dl : Dn = DA : DC.$$

Der Annahme nach aber verhält sich

$$BA : BC = DA : DC,$$

folglich auch

$$Bk : Bm = Dl : Dn,$$

woraus hervorgeht, dass AD, AC, AB, AO vier Harmonikalen sind.

Bemerkung. Von den vier Ecken eines harmonischen Vierecks heissen je zwei gegenüberstehende zugeordnete Punkte.

§. 86. *Lehrsatz.* Verbindet man irgend einen Punkt einer Kreislinie mit vier harmonischen Punkten auf derselben, so entsteht ein harmonischer Büschel. (Fig. 53.)

Beweis. Es seien $ABCD$ vier harmonische Punkte der Kreislinie, M ein fünfter willkürlicher Punkt. Zieht man an einen der Nachbarpunkte von M, etwa an C, eine Tangente GF, so ist dieselbe die vierte Harmonikale zu CD, CA, CB. Nun aber ist W. BCF = W. BMC, W. ACB = W. AMB u. s. w.; folglich sind auch MA, MB, MC, MD vier Harmonikalen.

§. 87. *Erklärung.* Eine Sehne, welche die Berührungspunkte zweier Tangenten eines Kreises mit einander verbindet, heisst die Berührungssehne des Tangentenpaares. Die Linie, welche den Durchschnitt eines Tangentenpaares mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, heisst die Berührungscentrale, und eine durch den Durchschnittspunkt eines Tangentenpaares parallel mit der

Berührungssehne gezogene Linie nennen wir die Berührungsparallele. Endlich soll eine vom Durchschnittspunkt eines Tangentenpaars gezogene Sekante eine Berührungssekante heissen.

Berührungssehne und Berührungsparallele stehen senkrecht auf der Berührungscentrale.

§. 88. *Lehrsätze.* 1) Jede Berührungssekante wird vom Tangentendurchschnitt und von der Berührungssehne harmonisch getheilt.

2) Zieht man durch die Durchschnittspunkte einer Berührungssekante Tangenten, so schneiden sich dieselben auf der Verlängerung der Berührungssehne.

Beweis zu 1). (Fig. 54.) Die Linien AB, AO, AF, AG sind vier Harmonikalen, folglich $GJFO$ vier harmonische Punkte.

Beweis zu 2). (Fig. 54.) Ist GF eine zu dem Tangentenpaar AO, BO gehörige Berührungssekante, so sind $GAFB$ vier harmonische Punkte der Kreislinie. Werden nun in F und G Tangenten an den Kreis gezogen und beide Punkte noch mit A und B verbunden, so sind F und G Centra zweier harmonischer Büschel, welche den Strahl FG gemein haben. Die beiden Büschel liegen also axial und der Durchschnitt der beiden Tangenten K fällt in die Verlängerung von AB.

§. 89. *Zusätze.* 1) Zieht man vom Durchschnitt eines Tangentenpaars zwei Sekanten, so schneiden sich die Linien, welche die Schnittpunkte derselben verbinden, auf der Berührungssehne oder deren Verlängerung. (Fig. 55.)

Denn da $Oama'$ und $Obnb'$ zwei harmonische Punktreihen sind, die den Punkt O gemein haben, so schneiden sich sowohl die Geraden aa' und bb', als auch ab' und $a'b$, auf der Geraden mn.

2) Zwei Linien, welche den Tangentendurchschnitt mit den Endpunkten einer Sehne verbinden, die durch die Mitte der Berührungssehne geht, bilden mit der Berührungscentrale gleiche Winkel. (Fig. 56.)

Es sei m die Mitte der Berührungssehne AB, ab eine zweite durch den Punkt m gezogene Sehne.

Man verbinde den Punkt b mit dem Tangentendurchschnitt O; die Verbindungslinie möge die Berührungssehne in n, die Kreislinie zum zweiten Mal in b' durchschneiden. Da nun $bnb'O$ vier harmonische Punkte sind, so wird der Punkt m, wenn man ihn noch mit b' verbindet, das Centrum eines harmonischen Büschels. Nun aber steht die Berührungscentrale mO senkrecht auf mn;

folglich wird der Winkel *amb'* durch *mO* halbirt. Dabei ist *ma* $= mb'$, wovon man sich sogleich überzeugt, wenn man *a* und *b'* mit dem Mittelpunkte verbunden denkt und die Congruenz der entstehenden Dreiecke in Erwägung zieht. Folglich ist $\triangle amO \cong \triangle b'mO$ und daher W. $aOm =$ W. $b'Om$.

§. 90. *Lehrsatz.* Jede durch die Mitte einer Berührungssehne gezogene Sehne wird von der Berührungssehne und der Berührungsparallele harmonisch getheilt. (Fig. 56.)

Beweis. Man verbinde die Endpunkte der Sehne *ab* mit dem Tangentendurchschnitt *O*. Alsdann ist W. $aOm =$ W. bOm, die Berührungsparallele *XY* steht aber im Punkte *O* senkrecht auf der Centrale *Om*; folglich ist *O* das Centrum eines harmonischen Büschels und *bmaq* sind vier harmonische Punkte.

§. 91. *Zusatz.* Fällt man vom Tangentendurchschnitt ein Loth auf irgend einen Durchmesser, so wird dieser allemal von dem Lothe und der Berührungssehne harmonisch getheilt.

Erster Fall. (Fig. 54.) Liegt der Fusspunkt *H* des Lothes *KH* innerhalb des Kreises, so seien *A* und *B* die Durchschnittspunkte dieses Lothes mit dem Kreise. Zieht man nun in *A* und *B* Tangenten an den Kreis, so liegt deren Durchschnitt *O* auf der Verlängerung des Durchmessers *DE*, welcher auf *AB* senkrecht steht, und es sind *DHEO* vier harmonische Punkte. Nun aber liegt der Punkt *O* auch in der Verlängerung von *GF* nach §. 88., 2), folglich wird *DE* von dem Lothe *KH* und der Berührungssehne *FG* harmonisch getheilt.

Zweiter Fall. (Fig. 56.) Es liege zweitens der Fusspunkt *O* des Lothes *qO* ausserhalb des Kreises. Ist nun *m* der Durchschnittspunkt der Berührungssehne *a'b'* und des durch *O* gehenden Durchmessers *DE*, so ist leicht zu zeigen, dass, wenn die Sehne *AB* in *m* senkrecht auf *DE* steht, die in *A* und *B* an den Kreis gezogenen Tangenten sich im Punkte *O* schneiden müssen. Denn angenommen, es wäre nicht der Fall, so würde die zu *AB* gehörige Berührungsparallele die von *q* durch *m* gezogene Berührungssekante *ab* nicht im Punkte *q*, sondern in irgend einem andern Punkte durchschneiden, welcher dann eben so wie *q* ein vierter harmonischer Punkt zu *b*, *m*, *a* wäre, was nicht möglich ist. Demnach sind *DmEO* vier harmonische Punkte.

§. 92. *Folgerung.* Man kann die beiden Bogen, in welche die Peripherie eines Kreises durch eine beliebige Sehne getheilt wird, allemal als zwei in Conformitätslage befindliche Systeme ansehen, und zwar in zwiefacher Weise:

Einmal ist das Centrum der Durchschnittspunkt des Tangentenpaars, welches die gegebene Sehne zur Berührungssehne hat. Die Sehne AB (Fig. 55.) ist dann selber die Axe.

Zweitens kann man auch die Mitte der Sehne m (Fig. 56.) als Centrum nehmen; dann ist die zur gegebenen Sehne AB gehörige Berührungsparallele XY die Axe.

Man pflegt im vorliegenden Falle das Centrum auch den Pol und die Axe die Polare zu nennen. Liegt der Pol ausserhalb des Kreises, so durchschneidet die Polare den Kreis, während dies nicht der Fall ist, wenn der Pol innerhalb des Kreises liegt.

Je mehr sich der Pol dem Mittelpunkte nähert, desto weiter entfernt sich die Polare; die Polare des Mittelpunkts liegt in unendlicher Entfernung.

Umgekehrt: Je mehr sich die Polare dem Mittelpunkte nähert, desto weiter entfernt sich der Pol; der Pol jedes Durchmessers liegt ebenfalls in unendlicher Entfernung.

Je mehr sich die Polare einer Tangente des Kreises nähert, desto näher rückt ihr der Pol. Als Pol einer Tangente sieht man daher ihren Berührungspunkt an.

§. 93. *Lehrsatz.* 1) Alle Tangentenpaare, deren Berührungssehnen durch denselben Punkt gehen, haben ihren Durchschnitt auf der Polare dieses Punktes.

Denn zieht man durch O einen Durchmesser DE, so trifft jedes vom Durchschnitt eines Tangentenpaares gefällte Loth den vierten harmonischen Punkt zu D, O, E; folglich fallen alle diese Lothe zusammen.

2) Die Berührungssehnen aller Tangentenpaare, deren Durchschnittspunkte auf derselben Geraden XY liegen, schneiden sich im Pol dieser Geraden.

Denn zieht man in Fig. 56. den Durchmesser DE senkrecht auf XY, so muss jede Berührungssehne den vierten harmonischen Punkt zu D, E, O treffen.

§. 94. *Lehrsatz.* Die Potenzenlinie zweier Kreise liegt allemal in der Mitte zwischen den beiden Polaren eines Aehnlichkeitspunktes. (Fig. 57.)

Beweis. Es seien a, b und andererseits a', b' die Punkte, in welchen ein vom Aehnlichkeitspunkt O ausgehender Strahl die Kreise um c und c' durchschneidet. Die Tangenten in a, b, a', b' bilden gehörig verlängert ein Parallelogramm, dessen Diagonale fg die Potenzenlinie beider Kreise ist, während die Ecken d und d' auf den Polaren liegen, welche dem Punkte O in Rücksicht

auf den einen und den andern Kreis zukommen. Die beiden Polaren sind der Potenzenlinie aber parallel und die Potenzenlinie fg geht durch die Mitte von dd'.

§. 95. Der Anwendung wegen wollen wir einen Satz für einen besonderen Fall beweisen, indem wir uns den allgemeinern Beweis vorbehalten.

Es sei aa' (Fig. 58.) die Berührungssehne zweier Tangenten, welche wir uns im vorliegenden besondern Fall einander parallel denken, wonach aa' ein Durchmesser sein wird. Ferner seien p und q die Berührungspunkte von zwei andern Tangenten, welche die beiden ersten Tangenten am und $a'm'$ einerseits in b und c, andererseits in b' und c' durchschneiden mögen. Alsdann wird behauptet, dass die Geraden aa', bb', cc' sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Beweis. Verbindet man den Mittelpunkt n mit p, b und c', so ist

$$\text{W. } anp + \text{W. } a'np = 2R,$$

$$\text{W. } anb + \text{W. } a'nc' = R.$$

Nun aber ist auch

$$\text{W. } a'nc' + \text{W. } a'c'n = R,$$

also W. $a'c'n =$ W. anb. Folglich ist, wegen der beiden rechten Winkel in a und a', $\Delta\, anb \backsim \Delta\, a'c'n$ und es verhält sich

$$ab : an = a'n : a'c',$$

woraus hervorgeht:

$$ab \times a'c' = \overline{an}^2.$$

Ebenso leitet man ab:

$$ac \times a'b' = \overline{an}^2,$$

mithin hat man die Proportion:

$$ab : ac = a'b' : a'c'.$$

Da nun aber die beiden proportionalen Punktreihen abc und $a'b'c'$ parallel sind, so müssen sie perspectivisch liegen.

§. 96. Errichtet man (Fig. 59.) auf dem Durchmesser AB des Kreises um H, etwa im Punkte C, ein Loth bis zur Peripherie CD, so heisst dieses Loth eine dem Durchmesser AB zugeordnete Ordinate. Die Entfernung des Fusspunktes C von irgend einem festen Punkte auf AB, etwa vom Mittelpunkte H, wird

alsdann die Abscisse und der feste Punkt H der Anfangspunkt der Abscissen genannt.

Die Ordinate CD ist bekanntlich die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers:

$$\overline{CD}^2 = AC.CB.$$

Bezeichnet man die Ordinate durch y, die Abscisse CH durch x, so hat man, wofern noch a den Radius AH vorstellt:

$$1)\quad y^2 = (a+x)(a-x) = a^2 - x^2.$$

Nimmt man aber den Punkt A zum Anfangspunkt der Abscissen und bezeichnet die Abscisse AC durch x_1, so ist $CB = 2a - x_1$; folglich erhält man:

$$2)\quad y^2 = x_1(2a - x_1) = 2ax_1 - x_1^2.$$

Jenes ist die Mittelpunktsgleichung, dieses die Scheitelgleichung des Kreises.

Von der Ellipse.

§. 97. *Erklärung.* Der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten eine constante Grösse zur Summe haben, heisst eine Ellipse. Die beiden festen Punkte heissen die Brennpunkte, und jede Linie, welche einen der Brennpunkte mit einem Punkte der Ellipse verbindet, wird ein Leitstrahl genannt.

Mechanisch wird eine Ellipse auf folgende Weise construirt: man befestigt die Enden eines Fadens, ohne denselben zu spannen, in A und B, spannt sodann den Faden mittelst eines Stiftes, und geht nun mit dem Stifte um die beiden festen Punkte so herum, dass der Faden beständig gespannt bleibt. Mittelst einzelner Punkte kann man die Ellipse construiren, indem man (Fig. 60.) zuerst in einem Kreise ausser dem Mittelpunkte B einen zweiten Punkt A annimmt. Zieht man einen beliebigen Radius BC, verbindet C mit A, errichtet in der Mitte von AC in D ein Loth, so wird dieses den Radius BC in einem Punkte E durchschneiden, und es ist

$$AE + EB = BC.$$

Mithin gehört der Punkt E einer Ellipse an, welche die Punkte A und B zu Brennpunkten hat, und bei welcher die Summe von je zwei zusammengehörigen Leitstrahlen $= BC$ ist.

Man kann hiernach eine Ellipse auch definiren als den geometrischen Ort derjenigen Punkte, welche von der Peripherie eines festen Kreises und von einem festen Punkte A innerhalb dieses Kreises gleiche Entfernung haben. $(AE = EC.)$

Die Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende Linie; denn auf jedem Radius des Kreises um B lässt sich ein, aber auch nur ein Punkt bestimmen, welcher der Ellipse angehört. Man nennt den Kreis um B den Leitkreis, den festen Punkt A den Leitpunkt. Man kann jeden der beiden Brennpunkte zum Leitpunkt wählen und den Leitkreis um den andern Brennpunkt beschreiben, der Radius desselben ist gleich der Summe von zwei zusammengehörigen Leitstrahlen.

Lässt man den Leitpunkt in den Mittelpunkt des Leitkreises fallen, so geht die Ellipse in eine Kreislinie über. Der Kreis ist eine Ellipse, deren Brennpunkte zusammenfallen.

Eine Linie, welche zwei Punkte der Ellipse verbindet, heisst eine Sehne, die Mitte derjenigen Linie, welche die beiden Brennpunkte verbindet, wird der Mittelpunkt der Ellipse genannt, und jede Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, ist ein Durchmesser.

Die grosse und die kleine Axe sind zwei auf einander senkrechte Durchmesser, von denen der erstere durch die beiden Brennpunkte geht.

Das Verhältniss derjenigen Strecke, welche von den beiden Brennpunkten begrenzt wird, zur grossen Axe ist die Excentricität.

Die beiden Sehnen, welche durch die Brennpunkte gehen und senkrecht auf der grossen Axe stehen, heissen Parameter.

Die Endpunkte der grossen Axe (die Scheitel) erhält man, wenn man im Leitkreise (Fig. 60.) durch den Leitpunkt A einen Durchmesser zieht KL, und die vom Punkte A auf diesen Durchmesser gebildeten Abschnitte in F und G halbirt. Hieraus folgt, dass die Axe FG dem Radius des Leitkreises gleich ist, dass sie also auch so gross ist, wie die Summe von zwei zusammengehörigen Leitstrahlen $AE + EB$. Sie wird von dem Mittelpunkte der Ellipse H halbirt. Dies ist auch mit der kleinen Axe der Fall; denn verbindet man ihre Endpunkte mit den beiden Brennpunkten, so entstehen zwei congruente gleichschenklige Dreiecke über gemeinsamer Grundlinie.

Wir bezeichnen die Hälfte der grossen Axe durch a und die Hälfte der kleinen Axe durch b. Es sei MN die kleine Axe; alsdann ist $AM = BM$, $AM + BM = 2a$; mithin $AM = a$. Demnach erhält man in dem rechtwinkligen Dreieck AMH:

$$HA = \sqrt{a^2 - b^2},$$

woraus sich die Excentricität

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

ergiebt.

§. 98. *Lehrsatz.* Halbirt man in einer Ellipse den von zwei zusammengehörigen Leitstrahlen gebildeten Winkel, und errichtet im Scheitel desselben auf der Halbirungslinie ein Loth, so hat dieses Loth nur einen Punkt mit der Ellipse gemein und heisst eine Tangente der Ellipse (Fig. 61.).

Beweis. Es sei CK die Halbirungslinie des Winkels ACB, CM senkrecht auf CK.

Verlängert man den Leitstrahl BC, so dass die Verlängerung CE dem andern Leitstrahl AC gleich wird, so wird CM senkrecht durch die Mitte von EA gehen. Angenommen nun, die Linie CM hätte ausser dem Punkt C noch einen zweiten Punkt, etwa den Punkt X, mit der Ellipse gemein, so würde man nach der Definition der Ellipse haben:

$$AX + XB = AC + CB = EB.$$

Nun ist aber $EX = AX$; also wäre auch

$$EX + XB = EB,$$

was unmöglich ist, da in einem Dreieck immer zwei Seiten zusammen grösser sind als die dritte.

Anmerkung. Obwohl noch nicht erwiesen ist, dass es durch einen Punkt einer Ellipse nur eine Tangente an dieselbe geben kann, wollen wir die Gerade CM schlechthin die Tangente in C nennen, die darauf senkrechte Linie CK, welche den Winkel ACB halbirt, soll die Normale heissen,

Zusatz. Die Tangente und Normale bilden mit den beiden Leitstrahlen AC und BC einen harmonischen Büschel.

§. 99. *Lehrsatz.* Das von einem Brennpunkt einer Ellipse auf eine Tangente gefällte Loth trifft mit seinem Fusspunkt allemal die Peripherie eines Kreises, welcher die grosse Axe zum Durchmesser hat (Fig. 60.).

Beweis. Verlängert man das Loth AD, bis es der Leitstrahl BE in C durchschneidet, so ist $EC = EA$, weil die Tangente DE

den Winkel CEA halbirt. Mithin ist $BC=2a$. Nun ist D die Mitte von AC, H die Mitte von AB; folglich ist HD die Hälfte von BC, d. h.

$$HD=a.$$

Der Kreis, welcher die grosse Axe der Ellipse zum Durchmesser hat, soll der Axenkreis der Ellipse heissen.

Zusatz. Das durch die Peripherie des Axenkreises von einer Tangente einer Ellipse abgeschnittene Stück wird durch den Berührungspunkt und die grosse Axe harmonisch getheilt (Fig. 61.)

Beweis. Fällt man von den Brennpunkten A und B die Lothe AM und BN auf die Tangente LC, so liegen die Fusspunkte dieser Lothe M und N auf der Peripherie des Axenkreises. Es sei CK die Normale; dann sind $LAKB$ vier harmonische Punkte. Nun aber sind die Linien AM und BN parallel mit KC; folglich ist auch $LMCN$ eine Reihe von harmonischen Punkten.

§. 100. *Lehrsatz.* Die halbe kleine Axe ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten, welche durch einen der Brennpunkte auf der grossen Axe gebildet werden. (Fig. 62.)

Beweis. Die Tangente MN, welche durch den Endpunkt D der kleinen Axe geht, ist der grossen Axe parallel, da die Normale in die Richtung der kleinen Axe fällt. Ist nun H der Mittelpunkt, A und B die Brennpunkte, AM und BN Lothe auf die Tangente, so ist $HD=AM=BN$. Nun aber liegen die Punkte M und N auf der Peripherie des Axenkreises; ist also FG die grosse Axe, so hat man:

$$\overline{AM}^2=FA \times AG,$$

da die Linie AM auf der Axe senkrecht steht.

§. 101. *Lehrsatz.* Das Rechteck aus je zwei Lothen, welche von den beiden Brennpunkten einer Ellipse auf eine Tangente derselben gefällt sind, ist dem Quadrat der halben kleinen Axe gleich. (Fig. 60. a.)

Beweis. Man verlängere die beiden Lothe AM und BN, deren Fusspunkte in der Peripherie des Axenkreises liegen, bis sie diese Peripherie zum zweiten Mal in P und Q durchschneiden, und fälle vom Mittelpunkte H die Lothe HR und HS auf dieselben. Alsdann ist $\triangle AHR \cong \triangle BHS$, weil $AH=HB$, W. $RAH=$ W. SBH als Wechselwinkel zwischen Parallelen und die Winkel R und S rechte sind. Hieraus folgt $RH=SH$; folglich sind die beiden Sehnen MP und NQ einander gleich, da sie

gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben. Nun aber ist NS die Hälfte von NQ, PR die Hälfte von MP, mithin $PR=NS$. Aus der oben bewiesenen Congruenz folgt überdies $AR=BS$; folglich ist $AP=BN$. Bekanntlich ist aber

$$AM \times AP = FA \times AG,$$

also zufolge des vorigen Paragraphen:

$$AM \times BN = b^2.$$

§. 102. ***Lehrsatz.*** **Schneiden sich eine Tangente einer Ellipse und eine Tangente ihres Axenkreises in der Verlängerung der grossen Axe, so steht die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte senkrecht auf der grossen Axe. (Fig. 63.)**

Beweis. Man ziehe vom Durchschnittspunkt der beiden Tangenten LC und LC' eine zweite Tangente an den Axenkreis LD', und verbinde die Berührungspunkte der Kreistangenten. — Die Strecke MN, welche durch den Axenkreis von der Tangente der Ellipse abgeschnitten wird, wird vom Tangentendurchschnitt L und von der Berührungssehne harmonisch getheilt, folglich wird die Berührungssehne $C'D'$ durch den Berührungspunkt C der Tangente LC gehen nach §. 99. Zusatz; dieselbe steht aber senkrecht auf der grossen Axe, da ja L in der Verlängerung dieser Axe liegt.

§. 103. ***Lehrsatz.*** **Ein vom Punkte C einer Ellipse auf die grosse Axe gefälltes Loth soll die der grossen Axe zugeordnete Ordinate des Punktes C heissen.**

Jede der grossen Axe zugeordnete Ordinate verhält sich zur mittlern Proportionale aus den beiden Abschnitten der grossen Axe wie die kleine Axe zur grossen. (Fig. 63.)

Beweis. Es ist $\triangle LMA \backsim \triangle LNB \backsim \triangle LCK$; mithin verhält sich

$$LK:LM=CK:AM,$$

$$LK:LN=CK:BN.$$

Setzt man beide Proportionen zusammen, so kommt:

$$\overline{LK}^2 : LM \times LN = \overline{CK}^2 : AM \times BN.$$

Nun aber ist

$$LM \times LN = \overline{LC}^2,$$

$$AM \times BN = b^2;$$

folglich hat man, indem man die Ordinate CK durch y bezeichnet:

$$\overline{LK}^2 : \overline{LC'}^2 = y^2 : b^2.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke LKC' und $C'KH$ verhält sich

$$LK : LC' = C'K : C'H;$$

folglich erhält man, indem man die Kreisordinate $C'K$ durch y' bezeichnet, und überlegt, dass der Radius $C'H$ gleich der halben grossen Axe ist:

$$y'^2 : a^2 = y^2 : b^2,$$

$$y' : y = a : b.$$

Bezeichnet man die Strecke HK durch x, so erhält man:

$$1) \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Wird aber FK durch x_1 bezeichnet, so kommt:

$$2) \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax_1 - x_1^2).$$

Jene ist die Mittelpunktsgleichung, diese die Scheitelgleichung der Ellipse.

Zusatz. 1) Die Ellipse ist mit ihrem Axenkreise in Affinitätslage; die grosse Axe ist Affinitätsaxe, die Richtung der Affinitätsstrahlen senkrecht darauf, das Verhältniss $b:a$ ist das Affinitätsverhältniss.

Da alle Kreise einander ähnlich sind, so können eine beliebige Ellipse und ein beliebiger Kreis immer als affine Figuren angesehen werden.

2) Offenbar entspricht einer Sekante des Axenkreises wiederum eine Sekante der Ellipse und einer Tangente eine Tangente. Da es nun in einem Punkt einer Kreislinie nur eine Tangente an dieselbe geben kann, so muss das Entsprechende von der Ellipse gelten.

3) Der gemeinsame Mittelpunkt des Kreises und der Ellipse liegt auf der Affinitätsaxe, mithin fallen in demselben zwei ent sprechende Punkte zusammen. Demnach entspricht einem Durchmesser des Axenkreises wiederum ein Durchmesser der Ellipse. In der grossen Axe fallen zwei entsprechende Durchmesser der beiden Figuren zusammen.

Alle Durchmesser der Ellipse werden im Mittelpunkt halbirt.

Denn es sei CM (Fig. 65.) ein Durchmesser der Ellipse, $C'M'$ der entsprechende Durchmesser des Axenkreises. Im Mittelpunkt H fallen zwei entsprechende Punkte zusammen, und da in affinen Systemen entsprechende Strecken durch entsprechende Punkte proportionirt getheilt werden, so verhält sich

$$CH:HM = C'H:HM'.$$

4) **Jeder Sehne der Ellipse, welche auf der grossen Axe senkrecht steht, wie der Sehne CD in Fig. 63., entspricht eine Kreissehne CD', welche mit ihr in dieselbe Richtung fällt.**

Eine Sehne der Ellipse, welche die kleine Axe senkrecht durchschneidet, ist der Affinitätsaxe parallel. Ihr entspricht also eine Kreissehne MN, welche ebenfalls der Affinitätsaxe parallel ist.

Hieraus folgt, dass jede der beiden Axen die auf ihr senkrechten Sehnen halbirt. Demnach wird die Ellipse durch die grosse und die kleine Axe in vier congruente Viertel getheilt.

5) **Zieht man in einer Ellipse durch die Endpunkte eines Durchmessers Tangenten, so sind dieselben parallel.**

Es seien CM und $C'M'$ (Fig. 65.) zwei entsprechende Durchmesser. Zieht man nun in C' und M' Tangenten an den Axenkreis, so sind dieselben parallel; folglich müssen auch die entsprechenden Tangenten der Ellipse in C und M einander parallel sein, da in affinen Systemen einem Paar von Parallelen wiederum ein Paar von Parallellinien entspricht.

6) **Die kleine Axe ist die mittlere Proportionale aus der grossen Axe und dem Parameter.** (Fig. 62.)

Es sei B der eine Brennpunkt der Ellipse, BN ein Loth auf denjenigen Tangente, welche durch den Endpunkt D der kleinen Axe geht, L der Durchschnittspunkt des Lothes BN mit der Ellipse.

Es verhält sich

$$BL:BN = b:a.$$

Nun ist $BN = HD = b$, BL die Hälfte des Parameters $= \frac{1}{2}p$. Multiplicirt man also sämmtliche Glieder der obigen Proportion mit 2, so erhält man:

$$p:2b = 2b:2a.$$

7) Durch die Gleichung

$$p=\frac{2b^2}{a}$$

nimmt die Scheitelgleichung der Ellipse die folgende Gestalt an:

$$y^2=px_1-\left(\frac{bx_1}{a}\right)^2,$$

d. h. das Quadrat jeder Ordinate ist kleiner als das Rechteck aus dem Parameter und der zugehörigen, vom Scheitel gerechneten Abscisse, und zwar um das Quadrat einer Grösse, welche sich zu dieser Abscisse verhält, wie die kleine Axe zur grossen.

§. 104. *Erklärung.* Eine Sehne und ein Durchmesser der Ellipse heissen einander zugeordnet, wenn die Sehne den durch die Endpunkte des Durchmessers gehenden Tangenten parallel ist.

Zusatz. 1) Ist die Sehne CD der Ellipse (Fig. 61. a.) dem Durchmesser KL zugeordnet, so steht im Axenkreise derselben die entsprechende Sehne $C'D'$ auf dem entsprechenden Durchmesser senkrecht.

Beweis. Da die Sehne CD der Tangente KP parallel ist, so ist auch die entsprechende Sehne $C'D'$ der entsprechenden Tangente $K'P'$ parallel. Nun aber steht $K'P'$ auf $K'L'$ senkrecht, also auch $C'D'$.

Zweien zugeordneten Durchmessern der Ellipse entsprechen also zwei auf einander senkrechte Durchmesser des Axenkreises. Jeder von zwei zugeordneten Durchmessern ist den Tangenten parallel, welche durch die Endpunkte des andern gehen.

2) Jeder Durchmesser einer Ellipse halbirt sämmtliche ihm zugeordnete Sehnen. (Fig. 61. a.)

Es sei M der Durchschnitt der Geraden CD und KL, M' der Durchschnitt von $C'D'$ und $K'L'$, also M' der dem Punkt M entsprechende Punkt.

Den Eigenschaften affiner Figuren gemäss verhält sich

$$CM:MD=C'M':M'D';$$

nun aber ist M' die Mitte von $C'D'$, da $C'D'$ auf $K'L'$ senkrecht steht; folglich ist auch M die Mitte von CD.

Anmerkung. Es seien (Fig. 64.) HC' und HD' zwei auf einander senkrechte Radien des Axenkreises einer Ellipse. Dann

werden die entsprechenden Strecken der Ellipse HC und HD Hälften von zwei zugeordneten Durchmessern. Ferner seien CM und DN zwei auf der grossen Axe der Ellipse senkrechte Linien, von denen eine, wie früher gezeigt, durch C', die andere durch D' geht.

Alsdann hat man, wenn der Winkel CHF durch φ, der Winkel DHG durch ψ bezeichnet wird:

$$\tang\varphi = \frac{MC}{MH} = \frac{b}{a} \cdot \frac{MC'}{MH},$$

$$\tang\psi = \frac{ND}{NH} = \frac{b}{a} \cdot \frac{ND'}{NH};$$

nun ist aber wegen der Congruenz der Dreiecke $C'MH$ und $D'NH$ die Strecke $C'M = HN$ und $D'N = HM$, also

$$\tang\varphi \,.\, \tang\psi = \frac{b^2}{a^2}.$$

Diese Formel kann dazu dienen, um, wenn φ gegeben ist, den Winkel ψ zu finden.

Ist der Winkel $C'HF = D'HG = 45^0$, so sind die beiden Dreiecke $C'MH$ und $D'NH$ gleichschenklig und $MH = NH$; mithin ist dann auch $\triangle CMH \cong \triangle DNH$ und

$$HC = HD.$$

Unter den verschiedenen Paaren von zugeordneten Durchmessern einer Ellipse giebt es ein Paar gleiche.

§. 105. *Lehrsatz.* Die Summe der Quadrate je zweier zugeordneter Durchmesser einer Ellipse ist eine constante Grösse (Fig. 64.).

Beweis. Es werde CH durch a_1, DH durch b_1 bezeichnet; dann ist:

$$a_1^2 = \overline{MH}^2 + \overline{MC}^2,$$

$$b_1^2 = \overline{NH}^2 + \overline{ND}^2,$$

$$a_1^2 + b_1^2 = (\overline{MH}^2 + \overline{NH}^2) + (\overline{MC}^2 + \overline{ND}^2).$$

Nun aber ist wegen der Congruenz der Dreiecke MHC' und NHD' die Seite $NH = MC'$, mithin

$$\overline{MH}^2 + \overline{NH}^2 = \overline{HC'}^2 = a^2;$$

ferner hat man $MC = \frac{b}{a} . MC'$, $ND = \frac{b}{a} . ND'$, folglich:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + \frac{b^2}{a^2}(\overline{MC'}^2 + \overline{ND'}^2) = a^2 + b^2.$$

§. 106. *Erklärung.* Die Hälfte einer Sehne, welche einem Durchmesser einer Ellipse zugeordnet ist, nennt man eine dem Durchmesser zugeordnete Ordinate.

In Fig. 65. stellen CM und DN zwei zugeordnete Durchmesser vor. Wählt man nun in dem einen derselben einen Punkt, etwa in CM den Punkt K, und zieht von K aus eine Parallele KL zu dem andern Durchmesser DN bis zur Ellipse, so ist KL eine dem Durchmesser CM zugeordnete Ordinate.

§. 107. *Lehrsatz.* Jede einem Durchmesser zugeordnete Ordinate in einer Ellipse verhält sich zur mittlern Proportionale aus den beiden Abschnitten des Durchmessers, wie der ihr parallele Durchmesser zu dem zugeordneten. (Fig. 65.)

Beweis. Man suche die den Punkten C, D, K, L, u. s. w. entsprechenden Punkte des Axenkreises, und construire sodann einen andern Kreis (Fig. 65. a.), dessen Durchmesser dem Durchmesser CM der Ellipse gleich ist. Insofern nun dieser zweite Kreis dem Axenkreise ähnlich ist, werden den Punkten C', D', K', L'... gewisse Punkte c, d, k, l,... entsprechen, und dabei wird dieser Kreis zugleich der Ellipse affin sein.

In affinen Systemen verhalten sich nach §. 38. zwei parallele Strecken des einen, wie die entsprechenden Strecken des andern:

$$KL : kl = HD : hd.$$

Nun aber ist $hd = hc = HC$, für's Zweite verhält sich

$$CK : ck = CM : cm;$$

folglich ist, wegen der Gleichung $CM = cm$, auch $CK = ck$ und $KM = km$, und man hat:

$$\overline{kl}^2 = CK . KM.$$

Bezeichnet man die Ordinaten KL und kl durch y und y', den halben Durchmesser CH durch a_1, den halben Durchmesser DH durch b_1, so folgt aus den Gleichungen

$$y : y' = b_1 : a_1,$$

$$y'^2 = a_1^2 - x^2 = 2a_1 x_1 - x_1^2$$

die Gleichung:

$$y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2) = \frac{b_1^2}{a_1^2}(2a_1 x_1 - x_1^2),$$

wo jetzt unter x die Strecke KH und unter x_1 die Strecke CK zu verstehen ist.

§. 108. *Zusatz.* Jeder Kreis, welcher mit einer Ellipse einen Durchmesser gemein hat, ist mit derselben in Affinitätslage.

Beweis. Es seien CM und DN (Fig. 66.) zwei zugeordnete Durchmesser einer Ellipse, KL eine dem Durchmesser CM zugeordnete Ordinate. Um CM als Durchmesser werde ein Kreis construirt, und in demselben die Ordinate KL' und der Radius HD' senkrecht auf CM gezogen. Alsdann verhält sich

$$KL : KL' = HD : HD';$$

mithin ist $\triangle KLL' \sim \triangle HDD'$. Da nun zwei Paare ihrer Seiten parallel laufen, so ist auch $LL' \parallel DD'$, und wenn P und Q die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Geraden CM sind, so verhält sich

$$KQ : HP = LQ : DP = L'Q : D'P.$$

§. 109. *Lehrsatz.* In jedem Dreieck ist das Rechteck aus der Summe und der Differenz zweier Seiten gleich dem Rechteck aus der Summe und der Differenz ihrer Projectionen. (Fig. 67.)

Beweis. Man hat:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2;$$

folglich, wenn man subtrahirt:

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$$

oder

$$(AC + BC)(AC - BC) = (AD + BD)(AD - BD).$$

§. 110. Es werde (Fig. 67.) der grössere von zwei zusammengehörigen Leitstrahlen einer Ellipse AC durch r_1, der kleinere BC durch r_2 bezeichnet. Alsdann hat man wegen der Gleichung $r_1 + r_2 = 2a$:

$$2a(r_1 - r_2) = (AD + BD)(AD - BD).$$

Wird nun HD durch x bezeichnet, so hat man, wofern D in der Verlängerung von AB liegt:

$$AD = x + AH = x + \sqrt{a^2 - b^2},$$

$$AD = x - AH = x + \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit der obigen Gleichung:

$$r_1 - r_2 = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2} \, . \, x}{a}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

so kommt:

$$r_1 = \frac{a^2 + \sqrt{a^2 - b^2} \, . \, x}{a},$$

$$r_2 = \frac{a^2 - \sqrt{a^2 - b^2} \, . \, x}{a}.$$

Zu denselben Ausdrücken gelangt man, wenn D zwischen A und B liegen sollte.

§. 111. *Lehrsatz.* Zieht man in einer Ellipse durch die Endpunkte zweier zugeordneter Durchmesser Tangenten, so dass ein der Ellipse umbeschriebenes Parallelogramm $KLMN$ entsteht (Fig. 68.), so hat dieses Parallelogramm einen constanten Inhalt.

Beweis. Es sei $K'L'M'N'$ (Fig. 68. a.) das entsprechende, dem Axenkreise umbeschriebene Viereck, welches hier der Deutlichkeit wegen getrennt gezeichnet ist.

Es verhält sich

$$\text{Viereck } KLMN : \text{Viereck } K'L'M'N' = b : a;$$

es ist aber $K'L'M'N'$ ein Quadrat und der Flächeninhalt desselben $4a^2$, also ist:

$$\text{Viereck } KLMN = 4ab.$$

§. 112. *Zusatz.* Verbindet man in einer Ellipse die Endpunkte von zwei zugeordneten Durchmessern durch Sehnen, so ist der Inhalt des entstandenen einbeschriebenen Parallelogramms $= 2ab$.

§. 113. Der Satz, dass in zwei affinen Figuren das Verhält-

niss entsprechender Flächen dem Affinitätsverhältniss gleich sei, gilt offenbar nicht bloss von geradlinigen Figuren, sondern auch von solchen, welche theilweise oder ganz von Kurven umschlossen werden. Um sich davon zu überzeugen, darf man nur in beide Kurven entsprechende Vielecke beschreiben. Denkt man sich die Seiten derselben immer kleiner und kleiner, so nähern sich die Umfänge der beiden Figuren ohne Ende den Kurven, welcher sie einbeschrieben sind. Da nun das Verhältniss von je zwei entsprechenden Vielecken dasselbe bleibt, so berechtigt dies zu dem Schlusse, dass dasselbe auch mit denjenigen Flächen der Fall sei, denen sie sich als ihren Grenzen nähern.

Fasst man (Fig. 66.) den von der Abscisse CK, der Ordinate KL und dem elliptischen Bogen CL umgrenzten Flächenraum in's Auge, so verhält sich also

$$\text{Fläche } CKL : \text{Fläche } CKL' = DP : D'P.$$

Fällt man von D das Loth DR auf CM, so ist

$$DP : D'P = DR : D'H = b_1 \sin\vartheta : a_1,$$

indem man den Winkel DHM, welchen die beiden zugeordneten Durchmesser bilden, durch ϑ bezeichnet. Demnach hat man

$$\text{Fläche } CKL = \frac{b_1 \sin\vartheta}{a_1} \times \text{Fläche } CKL'.$$

Wäre CM die grosse Axe der Ellipse, so ginge das Verhältniss $DP : D'P$ in das Verhältniss $b : a$ über.

Bedeutet F die Fläche der ganzen Ellipse, F' diejenige ihres Axenkreises, so ist

$$F : F' = b : a.$$

Hieraus erhält man wegen der Gleichung $F' = a^2\pi$ für die Fläche der Ellipse den Ausdruck:

$$F = ab\pi.$$

Von der Hyperbel.

§. 114. *Erklärung.* Der geometrische Ort derjenigen Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten A und B eine constante Differenz haben, heisst eine Hyperbel.

Die beiden Punkte A und B heissen Brennpunkte der Hyperbel u. s. w. wie bei der Ellipse.

Es sei um A (Fig. 69.) ein Kreis beschrieben und B ein Punkt ausserhalb desselben. Zieht man nun einen Durchmesser CD und errichtet sodann in den Halbirungspunkten der Strecken BC und BD in E und F Lothe, bis sie die Richtung des Durchmessers CD in G und H durchschneiden, so hat man:

$$AG-BG=BH-AH=AC.$$

Demnach sind G und H Punkte einer Hyperbel, welche die Punkte A und B zu Brennpunkten hat, und bei welcher die Differenz zwischen zwei zusammengehörigen Leitstrahlen gleich AC ist. Die Hyperbel lässt sich daher auch definiren als geometrischer Ort derjenigen Punkte, welche von der Peripherie eines festen Kreises und einem ausserhalb dieses Kreises liegenden festen Punkte gleiche Entfernung haben.

Man wird dieselbe Hyperbel erhalten, wenn man den Leitkreis mit unverändertem Radius um B beschreibt und den Punkt A zum Leitpunkt wählt. Zieht man im Leitkreise den Durchmesser KL, der verlängert durch B geht, so sind die Halbirungspunkte der Strecken BK und BL (M und N) die Scheitel der Hyperbel. Ihre Verbindungslinie heisst die reelle Axe. Dieselbe ist dem Radius AC des Leitkreises gleich, ihre Endpunkte liegen zwischen den Brennpunkten und haben gleiche Entfernungen von denselben.

§. 115. *Lehrsatz.* Eine Linie, welche den Winkel zwischen zwei zusammenhörigen Leitstrahlen einer Hyperbel halbirt, hat nur einen Punkt mit der Hyperbel gemein, und heisst eine Tangente derselben. Eine im Berührungspunkt auf einer Tangente senkrechte Linie heisst Normale.

Es seien AC und BC (Fig. 70.) zwei zusammengehörige Leitstrahlen. Man trage den kleinern BC von C aus auf den andern ab, wo er bis D reichen mag, verbinde B mit D und darauf den Halbirungspunkt M der Strecke BD mit C. Alsdann halbirt MC den Winkel ACB. Gäbe es nun auf der Geraden CM ausser C noch einen zweiten der Hyperbel angehörigen Punkt, etwa den Punkt X, so hätte man

$$AX-BX=AD.$$

Da aber $DX=BX$ ist, so hätte man

$$AX-DX=AD,$$

was unmöglich ist.

§. 116. *Zusatz.* Die Strecke zwischen den Brennpunkten einer Hyperbel wird von jeder Tangente und der dazu gehörigen Normale (in K und L) harmonisch getheilt.

Der Durchschnittspunkt K der Tangente und Axe liegt übrigens, wie leicht einzusehen, immer demjenigen Brennpunkt am nächsten, von welchem der kleinere Leitstrahl ausläuft.

§. 117. *Lehrsatz.* Fällt man von den Brennpunkten einer Hyperbel Lothe auf eine Tangente, so liegen die Fusspunkte dieser Lothe allemal auf der Peripherie eines Kreises, welcher die reelle Axe zum Durchmesser hat.

In der That, verbindet man in Fig. 69. den Mittelpunkt P der Hyperbel mit dem Punkt D, so ist

$$PD = PE = \frac{AC}{2}.$$

§. 118. *Zusatz.* Eine Sehne des Axenkreises MN (Fig. 70.), welche zugleich Tangente der Hyperbel ist, wird auch hier, wie in der Ellipse, von der Axe und ihrem Berührungspunkt (in K und C) harmonisch getheilt.

Hieraus folgt, dass die zum Punkte C der Hyperbel gehörige Ordinate die Polare des Punktes K ist, in welchem die durch C gehende Tangente der Hyperbel die Axe schneidet.

Demnach fallen die Fusspunkte sämmtlicher Ordinaten, wenn der vom Brennpunkt B ausgehende Strahl der kürzere ist, mit dem Punkte B auf dieselbe Seite des Axenkreises, während für diejenigen Punkte, wo der von A ausgehende Strahl der kürzere ist, die Ordinaten auf die entgegengesetzte Seite fallen. Die Hyperbel besteht also aus zwei von einander getrennten Zweigen, von denen jeder zwei unendliche Arme hat.

Jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt einer Hyperbel geht, heisst ein Durchmesser. Ein Durchmesser, welcher die Hyperbel schneidet, heisst ein reeller, jeder andere ein imaginärer Durchmesser. Derjenige imaginäre Durchmesser, welcher senkrecht auf der reellen Axe steht, wird die imaginäre Axe genannt.

Die imaginäre Axe ist an sich unbegrenzt; um ihr aber der Analogie wegen eine bestimmte Länge zu geben, zieht man von einem der Brennpunkte eine Tangente BS an den Axenkreis und sieht die Strecke BS als die Länge der halben imaginären Axe an. Dieselbe wird auch hier durch b bezeichnet, während a die halbe reelle Axe vorstellt.

In Fig. 70. zeigt sich sogleich

$$b^2 = BG \times BF,$$

was einer früher erwähnten Eigenschaft der Ellipse entspricht. Ueberdies hat man

$$\overline{HB}^2 = \overline{HS}^2 + \overline{BS}^2 = a^2 + b^2.$$

Die Excentricität der Hyperbel ist

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Sind r_1 und r_2 zwei zusammengehörige Leitstrahlen, so ist

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = (AR - BR)(AR + BR),$$

wo R den Fusspunkt der zu C gehörigen Ordinate bezeichnet. Hieraus leitet man leicht ab:

$$r_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}.x + a^2}{a},$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}.x - a^2}{a}.$$

§. 119. *Lehrsatz.* Das Product der von den beiden Brennpunkten einer Hyperbel auf eine Hyperbeltangente gefällten Lothe ist allemal dem Quadrat der halben imaginären Axe gleich. (Fig. 70.)

Beweis. Die Fusspunkte der beiden Lothe AN und BM liegen auf der Peripherie des Axenkreises. Durchschneidet nun das Loth AN den Kreis zum zweiten Mal in P, so lässt sich leicht, wie bei der Ellipse, beweisen, dass die Strecke AP dem Loth BM gleich ist. Nun aber hat man:

$$AP \times AN = AF \times AG = b^2.$$

Anmerkung. Zieht man in Fig. 70. vom Fusspunkt R der Ordinate CR eine Tangente an den Axenkreis, und fällt vom Berührungspunkt T ein Loth auf die Axe, so wird der Fusspunkt dieses Lothes in den Punkt K fallen, in welchem die Axe von der durch den Punkt C gehenden Hyperbeltangente geschnitten wird. Denn, wie oben gezeigt, ist CR die Polare des Punktes K.

§. 120. *Lehrsatz.* In der Hyperbel verhält sich jede der reellen Axe zugeordnete Ordinate CR (Fig. 70.) zur mittlern Pro-

portionale aus den Abschnitten der Axe, wie die imaginäre Axe zur reellen.

Beweis. Es verhält sich

$$AN : CR = NK : KR,$$

$$BM : CR = MK : KR;$$

also:

$$AN \times BM : \overline{CR}^2 = MK \times NK : \overline{KR}^2,$$

oder

$$b^2 : y^2 = \overline{KT}^2 : \overline{KR}^2,$$

wegen der Gleichung

$$MK \times NK = FK \times KG = KT^2.$$

Zieht man im Axenkreise den Radius HT, so entstehen zwei ähnliche Dreiecke KTR und KTH, also verhält sich

$$KT : KR = HT : TR.$$

Hieraus folgt

$$b^2 : y^2 = a^2 : \overline{RT}^2,$$

die Tangente RT aber ist die mittlere Proportionale aus den beiden Abschnitten GR und FR.

Bezeichnet man die Entfernung HR durch x, so wird:

$$FR = x + a, \quad GR = x - a;$$

$$\overline{RT}^2 = FR \times GR = x^2 - a^2;$$

mithin erhält man:

1) $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Wird dagegen unter x_1 die Strecke GR verstanden, so gelangt man zu der Gleichung

2) $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax_1 + x_1^2).$$

Ist $b = a$, so hat man die gleichseitige Hyperbel. Bei dieser ist die vom Brennpunkt an den Leitkreis gezogene Tangente BS (Fig. 70.) dem Radius desselben gleich; demnach ist $\angle SBH = 45^0$. Die Gleichungen der gleichseitigen Hyperbel sind:

$$y^2 = x^2 - a^2,$$

$$y^2 = 2ax_1 + x_1^2.$$

Die Ordinate CR ist also hier die mittlere Proportionale aus den beiden Abschnitten der Axe.

Uebrigens beweisen die Gleichungen 1) und 2), was auch schon an sich einleuchtend ist, dass die Hyperbel durch die Axe in zwei congruente Theile getheilt wird.

§. 121. *Zusatz.* Eine im Brennpunkt einer Hyperbel errichtete Ordinate ist auch hier der halbe Parameter $= \frac{p}{2}$. Man hat wie bei der Ellipse:

$$\frac{p}{2} : b = b : a.$$

§. 122. *Zusatz.* Die ungleichseitige Hyperbel verhält sich zur gleichseitigen, wie die Ellipse zum Kreise. Jene ist allemal in Affinitätslage mit derjenigen gleichseitigen Hyperbel, welche die reelle Axe mit ihr gemein hat. Diese Axe ist zugleich Affinitätsaxe, die Richtung der Affinitätsstrahlen senkrecht darauf, das Affinitätsverhältniss $= b : a$.

§. 123. *Lehrsatz.* Jede gleichseitige Hyperbel ist mit ihrem Axenkreise in Conformitätslage. Als Centrum kann man jeden ihrer beiden Scheitel ansehen, die Conformitätsaxe geht durch den andern Scheitel und steht senkrecht auf der reellen Axe. (Fig. 71.)

Beweis. Es seien F und G die Scheitel der gleichseitigen Hyperbel, die Gerade XY sei durch G senkrecht auf FG gezogen, CD sei die zu C gehörige Ordinate. Verbindet man den Punkt C der Hyperbel mit F, so wird FC die Gerade XY etwa in E, den Axenkreis in C' treffen. Nun verhält sich gemäss der Eigenthümlichkeit der gleichseitigen Hyperbel

$$FD : DC = DC : GD;$$

mithin ist wegen des gemeinsamen rechten Winkels D:

$$\triangle GCD \sim \triangle FCD,$$

$$\angle CGD = \angle FCD.$$

Verbindet man noch C' mit G, so ist $\angle FC'G = R$, folglich

$$\angle FGC' = \angle FCD = \angle CGD.$$

Da nun XY senkrecht auf FG steht, so ist G das Centrum

eines harmonischen Büschels, und es ist $FC'EC$ eine harmonische Punktreihe.

Nimmt man auf dem andern Zweige der Hyperbel den Punkt K mit der Ordinate KL, so ist

$$\triangle KLF \backsim \triangle KLG,$$

$$\angle KGL = \angle LKF.$$

Nun aber ist auch $\triangle LKF \backsim \triangle FK'G$, $\angle FGK' = \angle LKF = \angle KGL$; folglich ist der Punkt M, in welchem der Strahl FK die Gerade XY schneidet, der vierte harmonische Punkt zu KFK'.

§. 124. *Zusatz.* Die gemeinsame Gegenaxe der gleichseitigen Hyperbel und ihres Axenkreises fällt mit der imaginären Axe der erstern zusammen.

§. 125. *Folgerungen.*

1) Einer Sehne des Axenkreises wie $C'E'$, (Fig. 72.), deren Endpunkte auf verschiedenen Seiten der Gegenaxe UV liegen, entspricht eine Hyperbelsehne CE, deren Endpunkte auf verschiedenen Zweigen der Hyperbel liegen, und die wir eine innere Sehne nennen. Der Kreissehne CD', welche die Gegenaxe nicht schneidet, entspricht eine äussere Sehne CD, deren Endpunkte auf demselben Hyperbelaste liegen.

2) Dem Kreisdurchmesser FG entspricht die Hyperbelaxe FG, da F und G zwei gemeinsame Punkte beider Systeme sind.

Einer Kreissehne CD' (Fig. 73.), welche der Axe FG parallel ist, entspricht ein reeller Durchmesser der Hyperbel CD. Denn da die Kreissehne CD' und der Kreisdurchmesser FG parallel sind, so werden sich die entsprechenden Geraden im System der Hyperbel FG und CD auf der Gegenaxe, also im Mittelpunkt H schneiden. (Fig. 73.)

Wird die Gerade $K'L'$, welche keinen Punkt mit der Kreislinie gemein hat, auf das System des Kreises bezogen, so hat die ihr im System der Hyperbel entsprechende Gerade KL ebenfalls keinen Punkt mit der Hyperbel gemein. Läuft $K'L'$ der reellen Axe FG parallel, so entspricht ihr ein imaginärer Durchmesser der Hyperbel.

3) Einer Kreistangente entspricht eine Hyperbeltangente. Die Conformitätsaxe ist eine gemeinsame Tangente der beiden Systeme.

Den beiden Kreistangenten, deren Berührungspunkte auf der

Gegenaxe liegen, entsprechen zwei Durchmesser der Hyperbel MN und PQ (Fig. 74.), welche die Grenze zwischen den reellen und imaginären Durchmessern bilden. Dieselben haben keinen Punkt mit der Hyperbel gemein; denn da die Berührungspunkte der Kreistangenten A und B auf der Gegenaxe liegen, so fallen die ihnen entsprechenden Punkte in unendliche Entfernung. Diese beiden Durchmesser der Hyperbel heissen die Asymptoten der Hyperbel und werden als Tangenten angesehen, deren Berührungspunkte im Unendlichen liegen.

4) Es sei $C'D'$ (Fig. 75.) eine der Axe FG parallele Sehne des Axenkreises, K ihr Pol. Wird durch K eine Parallele $J'L'$ mit FG gezogen, so heisst der Hyperbeldurchmesser JL, welcher der Geraden entspricht, dem Durchmesser CD zugeordnet. Da sich die Gerade $J'L'$ und die beiden Tangenten in C' und D' auf der Gegenaxe schneiden, so ist JL den Tangenten in C und D parallel.

5) Zieht man von K aus eine gerade Linie durch den Kreis, die denselben etwa in M' und N' durchschneidet, so entspricht der Sehne $M'N'$ in der Hyperbel eine dem Durchmesser JL parallele und dem Durchmesser CD zugeordnete Sehne.

Der Pol von $J'L'$ ist der Halbirungspunkt R der Sehne $C'D'$. Einer durch den Punkt R gezogenen Kreissehne würde eine dem Durchmesser JL zugeordnete Hyperbelsehne entsprechen.

§. 126. *Zusatz.* Insofern man eine gleichseitige und eine ungleichseitige Hyperbel als affine Systeme auf einander bezieht, entspricht einer Sehne wiederum eine Sehne, einem Durchmesser ein Durchmesser, einer Tangente eine Tangente u.s.w.

§. 127. *Lehrsatz.* Jeder Durchmesser einer Hyperbel halbirt die ihm zugeordneten Sehnen.

Beweis. Da K der Pol von $C'D'$ ist, so sind, wofern Q' der Durchschnitt der Geraden $M'N'$ und $C'D'$ ist, die vier Punkte K, M', Q', N' harmonisch. Sucht man in der Hyperbel (Fig. 75.a.), die der Deutlichkeit wegen getrennt gezeichnet ist, die entsprechenden Punkte, so wird der Punkt Q in der Mitte von M und N liegen, da der Punkt K in Fig. 75. auf der Gegenaxe liegt.

§. 128. *Lehrsatz.* Durchschneidet man eine Hyperbel und zugleich ihre Asymptoten (Fig. 75. a.) durch eine Gerade $mMNn$, so sind die Stücke mM und Nn, welche zwischen den Schenkeln der Hyperbel und den Asymptoten liegen, allemal gleich.

Beweis. In Fig. 75. sind K, A, R, B vier harmonische Punkte.

Da nun aber die Geraden Am', CD' und Bn' parallel sind, so sind auch K, m', Q', n' vier harmonische Punkte. Mithin ist (Fig. 75. a.) der Punkt Q auch die Mitte von mn und demnach $mM = Nn$.

§. 129. *Lehrsatz.* Je zwei zugeordnete Durchmesser einer Hyperbel bilden mit den beiden Asymptoten einen harmonischen Büschel. (Fig. 76.)

Beweis. Es ist auch hier nur nöthig, den Beweis für die gleichseitige Hyperbel zu führen, da derselbe der gegenseitigen Affinität wegen sich sogleich auf die ungleichseitige ausdehnt.

Es seien L, M, E, N die Punkte, in denen die Conformitätsaxe von den beiden zugeordneten Durchmessern und den beiden Asymptoten getroffen wird.

Die den genannten Linien im Systeme des Axenkreises entsprechenden Geraden gehen ebenfalls bezüglich durch L, M, E, N und schneiden die Gegenaxe in vier harmonischen Punkten K, A, R, B. Dabei sind aber diese Geraden sämmtlich einander parallel; also sind auch L, M, E, N vier harmonische Punkte und folglich die Geraden HL, HM, HE, HN vier Harmonikalen.

Zusatz. In der gleichseitigen Hyperbel stehen die beiden Asymptoten HM und HN senkrecht auf einander; also wird der Winkel LHE, den die beiden zugeordneten Durchmesser mit einander bilden, von der Asymptote HM halbirt.

Da übrigens der Winkel $MHG = 45^0$ ist, so sind die beiden Winkel LHG und EHG Complemente von einander.

Zwei beliebige reelle Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel HA und HA' (Fig. 77.) bilden daher denselben Winkel mit einander, wie die ihnen zugeordneten imaginären Durchmesser HB und HB'.

Denn zieht man die Asymptote HM, so ist der Winkel $MHA =$ W. MHB und W. $MHA' =$ W. MHB'.

§. 130. *Erklärung.* Dasjenige Stück einer Hyperbeltangente, welches zwischen den beiden Asymptoten liegt, heisst eine Substitute, weil diese Strecke in Bezug auf den durch ihren Berührungspunkt gehenden Durchmesser dieselbe Rolle spielt, wie der zugeordnete Durchmesser in der Ellipse.

§. 131. *Lehrsatz.* Jede Substitute ST einer Hyperbel (Fig. 75. a.) wird durch den Berührungspunkt D halbirt.

Beweis. Ist MN eine dem Durchmesser HD zugeordnete Sehne, m und n ihre Durchschnittspunkte mit den Asymptoten, so ist der Punkt Q, in welchem HD und MN einander schneiden, die Mitte von mn. Nun aber ist MN parallel mit ST, folglich ist auch D die Mitte von ST.

Bemerkung. Die Hyperbel wird nicht nur durch die reelle, sondern auch durch die imaginäre Axe in zwei congruente Theile getheilt.

Denn gehört der Punkt C (Fig. 77. a.) einer Hyperbel an, welche die Punkte A und B zu Brennpunkten hat, so wird man über AB noch drei mit ABC congruente Dreiecke construiren können, ABc, ABC', ABc'. Die Punkte C', c, c' genügen dann aber ebenfalls der Bedingung

$$AC'-BC'=2a \text{ u. s. f.}$$

Die imaginäre Axe JL geht aber senkrecht durch die Mitten von Cc und $C'c'$, also hat man zwei congruente Systeme in Affinitätslage, deren Affinitätsaxe JL ist. Ebenso ist auch AB eine Affinitätsaxe. Verbindet man C mit c', und c mit C', so gehen beide Verbindungslinien durch den Mittelpunkt H der Hyperbel und halbiren einander. Insofern man nun C und c', sowie andrerseits C' und c, als entsprechend ansieht, hat man zwei congruente Systeme in Aehnlichkeitslage.

Aus dieser symmetrischen Gestalt der Hyperbel folgt nun auch, dass jeder Durchmesser derselben im Mittelpunkt halbirt wird.

§. 132. *Lehrsatz.* 1) In der gleichseitigen Hyperbel ist die Substitute allemal dem zugeordneten Durchmesser gleich.

Beweis. In Fig. 75. a. lässt sich um das rechtwinklige Dreieck SHT von D aus ein Kreis beschreiben, also ist

$$HD=DS=DT, \text{ und } CD=ST.$$

2) In jeder Hyperbel ist die zur reellen Axe gehörige Substitute das Doppelte der Tangente, welche vom Brennpunkt aus an den Axenkreis geht und in §. 118. als Stellvertreterin einer zweiten Halbaxe benutzt wurde.

Beweis. Für die gleichseitige Hyperbel ist der Satz schon bewiesen.

Construirt man nun über derselben Axe noch eine ungleichseitige Hyperbel, so sind die beiden Substituten, welche durch einen gemeinsamen Scheitel gehen, entsprechende Strecken in affinen Figuren und fallen überdies in die Richtung eines Affini-

tätsstrahls. Demnach werden sie sich zu einander dem Affinitätsverhältniss gemäss, d. h. wie $b:a$, verhalten. Da nun die Substitute der gleichseitigen Hyperbel gleich $2a$ ist, so wird diejenige der ungleichseitigen gleich $2b$ sein.

§. 133. *Lehrsatz.* In der ungleichseitigen Hyperbel ist die Differenz zwischen dem Quadrat eines Durchmessers und dem Quadrat der zugeordneten Substitute eine constante Grösse. (Fig. 78.)

Beweis. Es sei HC' die Hälfte eines Durchmessers, $C'D'$ die Hälfte der zugeordneten Substitute in einer gleichseitigen Hyperbel, also $HC' = C'D'$. Fällt man nun die Lothe $C'K$ und $D'L$ auf die Axe und zieht $C'M'$ parallel mit HK, HJ' parallel mit $C'D'$, so ist zunächst W. $D'C'M' =$ W. $J'HK$. Nun aber sind HJ' und HC' Richtungen zugeordneter Durchmesser, mithin nach §. 129. Zusatz. der Winkel $J'HK$ das Complement von $C'HK$, woraus hervorgeht:

$$\text{W. } D'C'M = \text{W. } J'HK = \text{W. } HC'K.$$

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke $D'C'M$ und $C'HK$ sind also congruent:

$$1)\quad C'M' = C'K, \qquad HK = M'D'.$$

Dabei hat man wegen der Gleichung

$$y^2 = x^2 - a^2 \text{ oder } x^2 - y^2 = a^2:$$

$$2)\quad \overline{HK}^2 - \overline{KC'}^2 = a^2.$$

Construirt man nun über derselben Axe eine ungleichseitige Hyperbel, so fallen die den Punkten C' und D' entsprechenden Punkte C und D bezüglich in $C'K$ und $D'K$. Zieht man CM parallel mit $C'M'$, so sind DM und $D'M'$ entsprechende Strecken auf einem Affinitätsstrahl, also verhält sich

$$3)\quad DM : D'M' = b : a.$$

Nun ist

$$\overline{HC}^2 = \overline{HK}^2 + \overline{KC}^2 = \overline{HK}^2 + \frac{b^2}{a^2}.\overline{KC'}^2,$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{DM}^2 = \overline{CM}^2 + \frac{b^2}{a^2}.\overline{D'M'}^2.$$

Subtrahirt man, so kommt:

$$\overline{HC}^2 - \overline{CD}^2 = (\overline{HK}^2 - \overline{CM}^2) + \frac{b^2}{a^2}.(\overline{KC'}^2 - \overline{D'M'}^2).$$

Hieraus folgt in Betracht der Gleichungen 1) und 2):

$$\overline{HC}^2 - \overline{CD}^2 = a^2 - b^2.$$

Zusatz. Bezeichnet man den Winkel CHK durch φ, den Winkel DCM durch ψ, so ist

$$\tang\varphi = \frac{CK}{CM} = \frac{b}{a} \cdot \frac{C'K}{HK},$$

$$\tang\psi = \frac{DM}{CM} = \frac{b}{a} \cdot \frac{D'M}{CM}.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man wegen der Gleichungen 1) und 2):

$$\tang\varphi . \tang\psi = \frac{b^2}{a^2}.$$

Diese Gleichung stimmt ganz mit derjenigen überein, welche wir bei der Ellipse erhielten. Dort waren aber die Winkel φ und ψ nach entgegengesetzten Seiten hin geöffnet und nicht wie hier nach derselben Seite.

§. 134. *Lehrsatz.* Der spitze Winkel, den eine äussere Sehne in einer gleichseitigen Hyperbel mit einer Tangente am Berührungspunkte bildet, ist so gross, wie derjenige Peripheriewinkel, welcher über der Sehne steht und dessen einer Schenkel ein Durchmesser ist. (Fig. 79.)

Beweis. Es sei CD ein Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel, CE eine innere Sehne, also der Winkel DCE gleichsam ein Peripheriewinkel.

Wird nun durch D eine Tangente gezogen und der Mittelpunkt H mit der Mitte der Sehne DE durch die Linie HK verbunden, so giebt die Tangente DF die Richtung desjenigen imaginären Durchmessers an, welcher dem Durchmesser CD zugeordnet ist, die Sehne CE aber ist parallel demjenigen imaginären Durchmesser, dessen zugeordneter reeller Durchmesser in HK fällt. Nun bilden zwei reelle Durchmesser allemal denselben Winkel, wie die ihnen zugeordneten imaginären; folglich ist

$$\text{W. } FDE = \text{W. } KHD.$$

Da aber die Linie HK im Dreieck CDE die Mitten zweier Seiten verbindet, so ist sie der dritten Seite CE parallel und demnach

$$\text{W. } DCE = \text{W. } DHK = \text{W. } FDE.$$

Bemerkung. Zieht man durch C eine Tangente CG, so

ist, wie leicht einzusehen, $CG \parallel DF$, da sich die entsprechenden Tangenten des Axenkreises auf der Gegenaxe schneiden. Folglich ist W. $GCD =$ W. CDF, und also nach dem Voranstehenden:

$$\text{W. } GCE = \text{W. } CDE.$$

Der Satz bleibt also auch richtig, wenn man statt der äussern Sehne eine innere wie CE nimmt: nur muss man alsdann den spitzen Winkel mit seinem stumpfen Nebenwinkel vertauschen.

§. 135. *Lehrsatz.* In der gleichseitigen Hyperbel ist jede einem gegebenen reellen Durchmesser zugeordnete Ordinate die mittlere Proportionale aus den beiden Abschnitten des Durchmessers. (Fig. 79.)

Beweis. Zieht man EG parallel der Tangente DF, so ist EG eine dem Durchmesser CD zugeordnete Ordinate. Nun aber ist

$$\triangle DEG \backsim \triangle ECG,$$

da Winkel $DEG = FDE = ECG$ ist; mithin verhält sich

$$DG : EG = EG : CG.$$

Bezeichnet man DG durch x, HD durch a_1, so folgt:

$$y^2 = x^2 - a_1^2.$$

Wird dagegen HG durch x_1 bezeichnet, so erhält man analog dem Früheren:

$$y^2 = 2a_1x_1 + x_1^2.$$

§. 136. *Lehrsatz.* Je zwei gleichseitige Hyperbeln sind ähnliche Figuren.

Beweis. Es seien (Fig. 80. und Fig. 80. a.) in den Axenkreisen über den Axen FG und fg zwei ähnliche Dreiecke errichtet, FGC' und fgc'. Sucht man nun die den Punkten C' und c' entsprechenden Punkte der gleichseitigen Hyperbeln und zieht die Ordinaten CD und cd, so ist W. $GCD =$ W. GFC, W. $gcd =$ W. gfc, mithin auch $\triangle GCD \backsim \triangle gcd$, und demnach auch $\triangle FGC \backsim \triangle fgc$. Die Punkte C und c und alle auf dieselbe Art gepaarten Punkte sind also durch ähnliche Dreiecke über FG und fg bestimmt, folglich sind beide Systeme ähnlich.

§. 137. *Lehrsatz.* In der ungleichseitigen Hyperbel verhält sich jede einem reellen Durchmesser zugeordnete Ordinate zur mittlern Proportionale aus den beiden Abschnitten dieses Durchmessers, wie die der Ordinate parallele Substitute zum gegebenen Durchmesser.

Beweis. Es werde zuerst (Fig. 81.) über der Axe FG der gegebenen ungleichseitigen Hyperbel eine gleichseitige construirt und in dieser der Durchmesser $C'D'$ gesucht, welcher dem gegebenen Durchmesser CD entspricht.

Sodann werde eine zweite gleichseitige Hyperbel errichtet, deren Axe fg so bestimmt ist, dass sich verhält

$$fg : FG = CD : C'D'.$$

Diese zweite gleichseitige Hyperbel ist nun der ersten ähnlich, und wenn cd der Strecke $C'D'$ entspricht, so behaupte ich, dass $cd = CD$ ist. Denn es muss sich verhalten

$$cd : C'D' = fg : FG = CD : C'D'.$$

Die zweite gleichseitige Hyperbel ist aber überdies der ungleichseitigen affin. Entspricht nun der Punkt a in der Verlängerung von cd dem Punkte A in der Verlängerung von CD, so wird sich verhalten

$$CD : cd = CA : ca = DA : da;$$

folglich ist wegen der Gleichung $CD = cd$ auch $CA = ca$, $DA = da$.

Endlich seien DE und de halbe Substituten, AB und ab ihnen parallele Ordinaten. Dann verhält sich

$$AB : ab = DE : de.$$

Es ist aber ab die mittlere Proportionale aus DA und CA, und de ist dem halben Durchmesser HD gleich.

§. 138. *Lehrsatz.* Verbindet man in einer Hyperbel die Endpunkte zweier Substituten mit einander, so sind die Verbindungslinien parallel.

Beweis. Es seien MN und PQ zwei Substituten einer gleichseitigen Hyperbel. (Fig. 82.) Andererseits seien im Axenkreise derselben A und B die Berührungspunkte der Tangenten, welche den Asymptoten entsprechen (Fig. 82. a.), $M'N'$ und $P'Q'$ die den gegebenen Substituten entsprechenden Tangenten.

Die Geraden $M'Q'$ und $P'N'$ durchschneiden sich nach §. 92. auf der Verlängerung von AB, also auf der Gegenaxe; folglich werden die ihnen entsprechenden Geraden MQ und PN einander parallel sein. Der Beweis gilt zugleich für die ungleichseitige Hyperbel wegen ihrer Affinität mit der gleichseitigen.

§. 139. *Lehrsatz.* Das durch irgend eine Substitute einer

Hyperbel von dem zwischen den Asymptoten liegenden Raume abgeschnittene Dreieck hat einen constanten Inhalt.

Beweis. Da MQ parallel PN ist, so ist das Dreieck PQM gleich dem Dreieck MNQ; folglich auch das Dreieck HMN gleich dem Dreieck HPQ.

§. 140. *Zusatz.* Es sei C der Scheitel einer ungleichseitigen Hyperbel, AB die durch den Punkt C gehende Substitute, H der Mittelpunkt (Fig. 83.). Alsdann ist:

$$HC = a, \quad AC = b,$$

$$\overline{AH}^2 = a^2 + b^2.$$

Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt F der Hyperbel eine zweite Substitute DE, so verhalten sich die Dreiecke HAB und HDE wie die Producte derjenigen Seiten, welche den gemeinsamen Winkel H einschliessen, also:

$$\triangle HAB : \triangle HDE = AH \times BH : DH \times EH,$$

mithin ist wegen der Gleichheit der beiden Dreiecke:

$$AH \times BH \text{ oder } \overline{AH}^2 = DH \times EH.$$

Zieht man aber FK parallel mit HE, so ist, weil F die Mitte von DE ist,

$$HK = \tfrac{1}{2}.HD, \quad FK = \tfrac{1}{2}.HE;$$

folglich

$$HK \times FK = \tfrac{1}{4}.\overline{AH}^2.$$

Bezeichnet man der Einfachheit wegen HK durch u und die Parallele FK durch v, so erhält man die Gleichung:

$$uv = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Der Ausdruck $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ wird die Potenz der Hyperbel genannt.

Für die gleichseitige Hyperbel, in welcher $b = a$ ist, hat man

$$uv = \tfrac{1}{2}a^2.$$

Zusatz. Alle Parallelogramme, welche von den beiden Asymptoten gebildet werden und deren vierte Ecke auf der Hyperbel liegt, sind einander gleich.

Beweis. In der gleichseitigen Hyperbel ist jedes Parallelogramm dieser Art, wie z. B. $HKFL$ (Fig. 84.), ein Rechteck, der Beweis folgt also unmittelbar aus der Gleichung $uv = \frac{1}{2}a^2$ oder

$HK \times KF = \frac{1}{4}a^2$. Dieser Beweis gilt sogleich für die ungleichseitige Hyperbel wegen ihrer Affinität mit der gleichseitigen. Vergleiche §. 111.

Anhang.

Die Quadratur der Hyperbel betreffend.

§. 141. *Erklärung.* Ich verstehe unter Sector einer Hyperbel eine Figur, die entsteht, wenn man (Fig. 85.) die Endpunkte eines Hyperbelbogens $A'B'$ mit dem Mittelpunkte O verbindet. Ein asymptotisches Segment ist ein Flächenstück ($C'FGD'$, Fig. 87.), welches von einer der Asymptoten, einem Bogen der Hyperbel ($C'D'$) und zwei parallelen Linien ($C'F$ und $D'G$) begrenzt wird. Laufen die beiden parallelen Seiten eines asymptotischen Segments ($CC'D'D$) der zweiten Asymptote OM parallel, so wollen wir dasselbe ein Normalsegment nennen. Diejenigen Stücke der daran liegenden Asymptote ON, welche zwischen dem Mittelpunkt und den beiden parallelen Seiten des Normalsegments liegen (also OC und OD), heissen die Grenzabscissen desselben.

§. 142. *Lehrsatz.* Zwei asymptotische Segmente zwischen denselben Parallelen sind gleich. (Fig. 86.)

Beweis. Wir denken uns die beiden Bogen AC und $A'C'$, welche durch die beiden Parallelen BB' und DD' abgeschnitten werden, so klein, dass sie als gerade Linien angesehen werden können. Da nun nach §. 128. $AB = A'B'$ und $CD = C'D'$ ist, so sind die beiden Paralleltrapeze $ABDC$ und $A'B'D'C'$ einander gleich. Demnach werden auch zwei beliebige asymptotische Segmente $ABFE$ und $A'B'F'E'$, die zwischen denselben Parallelen liegen, einander gleich sein, da man sie durch Parallellinien in unendlich viele Paralleltrapeze zerlegen kann, die paarweise einander gleich sind.

§. 143. *Lehrsatz.* Jeder Sector einer Hyperbel hat gleichen Flächeninhalt mit demjenigen Normalsegment, welches mit ihm auf demselben Bogen steht. (Fig. 85.)

Beweis. Um zu beweisen, dass der Sector $OA'B'$ gleich dem Normalsegment $AA'B'B$ ist, ziehe man $A'F$ und $B'G$ parallel der Asymptoten ON. Dann ist

$$\text{Parallelogramm } OAA'F = \text{Parallelogramm } OBB'G,$$

mithin auch

$$\text{Dreieck } OAA' = \text{Dreieck } OBB'.$$

Zieht man von beiden Dreiecken das gemeinsame Stück OAK ab, so bleibt

$$\text{Dreieck } OKA' = \text{Viereck } ABB'K.$$

Legt man zu beiden das Flächenstück $A'B'K$ hinzu, so kommt:

$$\text{Sector } OA'B = \text{Segment } AA'B'B.$$

§. 144. *Lehrsatz.* Zwei Normalsegmente haben gleichen Flächeninhalt, wenn die Grenzabscissen des einen sich eben so zu einander verhalten wie die des andern. (Fig. 87.)

Voraussetzung. Es verhält sich

$$OA : OB = OC : OD,$$

also auch, wegen der Gleichungen

$$OA \times AA' = OB \times BB' = OC \times CC' = OD \times DD':$$

$$AA' : BB' = CC' : DD'.$$

Behauptung. Segment $ABB'A'$ = Segment $CDD'C$.

Beweis. Man trage die Grenzabscissen OA und OB auf die andere Asymptote OM ab, wo sie bis a und b reichen mögen, und construire über ab das Normalsegment $abb'a'$; sodann verbinde man a' mit C' und b' mit D', und verlängere die Verbindungslinien, bis sie die Asymptoten bezüglich in F und f, sowie in G und g durchschneiden.

Für's Erste ist, wie leicht einzusehen,

$$\text{Segment } AA'B'B \cong \text{Segment } aa'b'b,$$

für's Zweite ist:

$$\triangle C'CF \cong \triangle faa',$$

$$\triangle D'DG \cong \triangle gbb',$$

da W. $C' = f$, W. F = W. a und $C'F = a'f$ u. s. w. Mithin ist:

$$CF = aa' = AA',$$

$$DF = bb' = BB'.$$

Nun verhält sich

$$AA' : BB' = CC' : DD' = CF : DG;$$

folglich sind die Dreiecke $CC'F$ und $DD'G$ ähnlich und also $C'F$

parallel $D'G$. Demnach sind die beiden asymptotischen Segmente $C'FGD'$ und $a'fgb'$ einander gleich, und es werden daher auch die beiden Normalsegmente $CC'D'D$ und $aa'b'b$ gleich sein, da sie durch Addition und Subtraction paarweise gleicher Dreiecke aus jenen entstehen.

Zusatz. Ist (Fig. 87.) das Normalsegment $AA'C'C$ das Doppelte des Segments $AA'B'B$, so verhält sich

$$OA:OB = OB:OC,$$

d. h. es ist OB die mittlere Proportionale zwischen OA und OC.

Hieraus ergiebt sich, wie ein gegebenes Normalsegment zu halbiren sei.

§. 145. *Folgerung.* Von einem Normalsegment, dessen eine Ordinate AA' (Fig. 88.) durch den Scheitel A' der Hyperbel geht, sagen wir, es beginne mit dem Scheitel.

Es sei die gegebene Hyperbel gleichseitig, ihre halbe Axe $= \sqrt{2}$, mithin ihre Potenz $= 1$. Dann wird auch $OA = AA' = 1$ sein, sowie auch der Flächeninhalt des Quadrats $OAA'K = 1$ ist.

Es ist einleuchtend, dass es eine Ordinate geben muss, die mit AA' ein Normalsegment bildet, welches dem Quadrat $OAA'K$ gleich ist. Es sei BB' diese Ordinate und es werde die bisher unbekannte Abscisse OB durch e bezeichnet. Wäre nun e gegeben, so würde es leicht sein, diejenigen Ordinaten CC', DD', EE', u. s. w. zu construiren, durch welche Normalsegmente vom Flächeninhalt 2, 3, 4, u. s. w. abgeschnitten würden. Man hätte:

$$OA:OB = OB:OC,$$

$$OC = \overline{OB}^2 = e^2.$$

Ferner

$$OA:OB = OC:OD,$$

$$OA:OB = OD:OE,$$

$$OD = e^3, \quad OE = e^4,$$

u. s. w.

Denken wir uns also ein Logarithmensystem mit der Zahl e als Basis und nennen die demselben angehörigen Logarithmen hyperbolische Logarithmen, so ist durch das Voranstehende bewiesen, dass jeder Logarithmus, welcher eine ganze Zahl ist, den Flächeninhalt des Normalsegments ausdrückt, dessen Grenzabscisse der

zugehörigen Zahl gleich ist. Bezeichnet man also die Grenzabscisse durch u, das durch dieselbe bestimmte, mit dem Scheitel beginnende Segment durch s, so hat man, so oft s eine ganze Zahl ist, nach dem Bisherigen:

$$s = \log.\text{hyp}.u.$$

Diese Wahrheit lässt sich sogleich durch folgende Betrachtung erweitern.

Es sei OM die mittlere Proportionale zwischen OC und OD. Alsdann ist

$$\text{Segm.}\ (AA'M'M) = \frac{\text{Segm.}\ AA'C'C + \text{Segm.}\ AA'D'D}{2}$$

$$= \frac{\log.\text{hyp}.OC + \log.\text{hyp}.OD}{2}.$$

Nun aber ist

$$\frac{\log.OC + \log.OD}{2} = \log\sqrt{OC.OD} = \log.OM.$$

Es gilt also die Gleichung

$$s = \log.\text{hyp}.u$$

auch für alle Werthe von s, welche sich durch Einschaltung eines arithmetischen Mittels aus der natürlichen Zahlenreihe erzeugen lassen, ja für alle Werthe, die durch unendlich oft wiederholte Einschaltung aus derselben hervorgehen. Jetzt wird es leicht sein, die allgemeine Gültigkeit der obigen Formel darzuthun.

§. 146. *Lehrsatz.* Für jeden Werth von s und u gilt die Gleichung

$$s = \log.\text{hyp}.u.$$

Beweis. Ich behaupte, das Segment s kann nicht grösser sein, als der $\log.\text{hyp}.u$. Denn hätte man

$$s = \log.\text{hyp}.u + q,$$

so liesse sich durch hinreichend oft wiederholte Einschaltung des arithmetischen Mittels ein solcher Werth s' finden, der grösser als $\log.\text{hyp}.u$, aber kleiner als $\log.\text{hyp}.u + q$ wäre. Wäre nun

$$s' = \log.\text{hyp}.u',$$

so würde s' der Inhalt desjenigen Normalsegments sein, welches durch den Abscissenwerth u' bestimmt würde. Nun aber ist s'

kleiner als s, also müsste auch die Abscisse u' kleiner sein als u. Es ist aber u' im Gegentheil grösser als u; denn man hat der Voraussetzung nach

$$\log.\text{hyp}.\, u' > \log.\text{hyp}.\, u.$$

Folglich kann s nicht grösser sein als log. hyp. u. Ebenso beweist man, dass s auch nicht kleiner sein kann.

§. 147. *Aufgabe.* Die Zahl e zu berechnen.

Auflösung. Man ziehe die Ordinate NN' sehr nahe derjenigen Ordinate AA' (Fig. 88.), welche durch den Scheitel A' der Hyperbel geht, und es sei $AN = \frac{1}{m}$, mithin $ON = 1 + \frac{1}{m}$. Ist nun $\frac{1}{m}$ sehr klein oder, was dasselbe sagt, m sehr gross, so lässt sich das Segment $AA'N'N$ sehr nahe als ein Rechteck ansehen mit der Grundlinie $AN = \frac{1}{m}$ und der Höhe $AA' = 1$. Der Inhalt dieses Rechtecks ist also $= \frac{1}{m}$. Andererseits ist derselbe gleich

$$\log.\text{hyp}.\, ON = \log.\text{hyp}.(1 + \frac{1}{m}).$$

Demnach hat man:

$$\frac{1}{m} = \log.\text{hyp}.(1 + \frac{1}{m})$$

oder

$$e^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}, \quad e = (1 + \frac{1}{m})^m,$$

und diese Gleichung wird sich um so mehr der Richtigkeit nähern, je grösser man m annimmt. Nach dem binomischen Lehrsatze hat man:

$$(1 + \frac{1}{m})^m = 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{m^3} \ldots,$$

wofür man schreiben kann:

$$(1 + \frac{1}{m})^m = 1 + 1 + (1 - \frac{1}{m}) \cdot \frac{1}{1.2} + (1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m}) \cdot \frac{1}{1.2.3}$$
$$+ (1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m})(1 - \frac{3}{m}) \cdot \frac{1}{1.2.3.4} \ldots$$

Je grösser nun m wird, um so mehr werden sich die Grössen $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$, u. s. w. der Null nähern; denkt man sich also m unendlich gross, so kommt

$$e = (1+\frac{1}{m})^m = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}\ldots$$

Wird hiernach der Werth von e berechnet, so erhält man:

$$e = 2{,}7182818\ldots.$$

§. 148. *Folgerung.* Der Sector $OA'B'$ (Fig. 85.) ist gleich dem Normalsegment $AA'B'B$. Für jenen Sector aber ist es bequemer, wenn man von B' aus ein Loth auf die Axe OA' fällt, um den Inhalt desselben mittelst der Abscisse OD und der Ordinate DB' auszudrücken.

Es sei C der Punkt, in welchem sich die Ordinate DB' und die Asymptote ON durchschneiden. Alsdann ist

$$DC = OD = x, \quad \overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DC}^2 = 2x^2,$$

also

$$OC = \sqrt{2}.x;$$

ferner ist

$$BC = BB' = \frac{B'C}{\sqrt{2}} = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

Also kommt:

$$u = OB = OC - CB = \frac{x+y}{2},$$

woraus hervorgeht:

$$s = \log.\text{hyp}.\frac{x+y}{2}.$$

Ist nun eine beliebige gleichseitige Hyperbel gegeben mit der Axe $2a$, so ist diese der gegebenen ähnlich, und bezeichnet man die den Grössen x, y, s entsprechenden Grössen durch x', y', s', so hat man:

$$1)\quad x : x' = \sqrt{2} : a,$$

$$2)\quad y : y' = \sqrt{2} : a,$$

$$3)\quad s : s' = (\sqrt{2})^2 : a^2.$$

Hieraus folgt:

$$s' = \frac{a^2}{2}\log.\text{hyp}.\left(\frac{x'+y'}{a}\right).$$

Jede ungleichseitige Hyperbel ist der gleichseitigen affin. Bezeichnet man nun die den Grössen x', y', s' entsprechenden Grössen durch x_1, y_1, s_1, so hat man:

$$1)\quad x_1 = x',$$

$$2)\quad y_1 : y' = b : a,$$

$$3)\quad s_1 : s' = b : a,$$

wo b, wie immer, die halbe imaginäre Axe der ungleichseitigen Hyperbel bezeichnet. Dies giebt

$$s_1 = \frac{ab}{2} \log.\text{hyp.}\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right).$$

Will man aber dasjenige Stück berechnen, welches von einer Ordinate, einem mit dem Scheitel beginnenden Bogen und der Axe begrenzt wird, also eine dem Flächenstück $A'B'D'$ entsprechende Fläche, so wird man von dem Dreieck, welches dem Dreieck ODB' entspricht, den Sector s_1, welcher dem Sector $A'B'O$ entspricht, abzuziehen haben. Man erhält also:

$$F = \tfrac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{ab}{2} \log.\text{hyp.}\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right).$$

§. 149. *Bemerkung.* Diejenigen Sätze, welche früher von harmonischen Punkten auf der Kreislinie und von den Polaren des Kreises bewiesen wurden, gelten fast unverändert für die Ellipse und Hyperbel:

1) Zieht man vom Durchschnitt eines Tangentenpaars eine Sekante durch eine Ellipse oder Hyperbel, so hat man vier harmonische Punkte auf diesen Kurven, d. h. vier Punkte von der Beschaffenheit, dass, wenn sie mit irgend einem Punkte der Ellipse oder Hyperbel verbunden werden, allemal ein harmonischer Büschel entsteht.

Denn in affinen und conformen Systemen entspricht einem harmonischen Büschel des einen Systems allemal ein harmonischer Büschel in dem andern.

2) Gehen mehrere Sehnen einer Ellipse oder Hyperbel durch denselben Punkt, so liegen die Durchschnittspunkte der zu diesen Sehnen gehörigen Tangentenpaare auf einer Geraden der Polare dieses Punktes, und umgekehrt: liegen die Durchschnittspunkte mehrerer Tangentenpaare auf einer Geraden, so gehen die Berührungssehnen sämmtlicher Tangentenpaare durch einen und denselben Punkt, den Pol jener Geraden.

Dies folgt aus dem Umstande, dass in affinen und conformen Systemen mehreren Punkte des einen Systems, die auf einer Geraden liegen, in dem andern Systeme wieder solche Punkte entsprechen, die auf einer Geraden liegen, und dass, wenn mehrere Gerade des einen Systems durch einen Punkt gehen, auch die entsprechenden Geraden des andern Systems durch denselben Punkt gehen.

Von der Parabel.

§. 150. *Erklärung.* Der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, welche von einer festen Geraden AB und einem festen Punkte C gleiche Entfernung haben, heisst eine Parabel. Die Linie AB wird Leitlinie und der Punkt C der Brennpunkt genannt. (Fig. 89.)

Ein von einem beliebigen Punkt der Parabel D auf die Leitlinie gefälltes Loth DE heisst ein äusserer, die Linie CD, welche den Punkt D mit dem Brennpunkte C verbindet, ein innerer Leitstrahl. Der Definition der Parabel gemäss ist also $CD = DE$.

Verbindet man einen beliebigen Punkt E der Leitlinie mit dem Brennpunkte C, errichtet sodann in E ein Loth auf der Leitlinie AB und in der Mitte von CD in M ein Loth auf CD, so gehört der Durchschnittspunkt D der beiden Lothe der Parabel an. In der Richtung jeder auf der Leitlinie senkrechten Linie giebt es hiernach einen, aber auch nur einen Punkt, welcher der Parabel angehört.

Die Parabel liegt ganz auf einer Seite der Leitlinie.

§. 151. *Erklärung.* Fällt man vom Brennpunkt C einer Parabel ein Loth CF auf die Leitlinie, so ist die Mitte G dieses Lothes ein Punkt der Parabel und wird der Scheitel derselben genannt. Die Gerade GC heisst die Axe der Parabel.

Zieht man durch den Brennpunkt eine auf der Axe senkrechte Linie und trägt die Entfernung zwischen dem Brennpunkte und der Leitlinie CF nach beiden Seiten hin auf dieses Loth ab, wo sie bis H und J reichen mag, so gehören die Punkte H und J der durch die Leitlinie AB und den Brennpunkt C bestimmten Parabel an; denn die Lothe HK und JL sind beide gleich CF, und mithin gleich CH und CJ. Die Sehne HJ heisst der Hauptparameter, jede andere durch C gehende Sehne ein Nebenparameter.

Die Entfernung zwischen dem Brennpunkte und der Leitlinie

CF ist der Hälfte des Hauptparameters, die Strecke zwischen dem Scheitel und dem Brennpunkte dem vierten Theile desselben gleich.

Wird vom Punkte D einer Parabel ein Loth DN auf die Axe gefällt, so heisst dieses Loth eine der Axe zugeordnete Ordinate. Die Abscissen pflegt man vom Scheitel der Parabel zu rechnen.

Bemerkung. Mechanisch lässt sich die Parabel auf folgende Weise construiren:

Man legt an die Leitlinie AB ein Lineal, und daran legt man ein rechtwinkliges Dreieck RST. Ein Faden wird nun mit seinen beiden Enden in S und C befestigt und dieser mit einem Stift in U fest an die Seite RS angelegt, so dass er die gebrochene Linie CUS bildet. Wird nun das Dreieck RST mit der Seite RT an der Leitlinie AB hingerückt, so dass die andere Seite RS beständig sich selbst und der Axe FC parallel bleibt, und spannt man mit dem Stifte den Faden immer straff an, ohne dass sich der Stift vom Dreieck entfernt, so wird dieser die Parabel GU beschreiben, wenn nur der Faden CUS gleich der Seite RS gemacht wurde.

Auf ähnliche Art lässt sich auch die Hyperbel beschreiben:

In B (Fig. 90.) ist ein Lineal BC mittelst eines Stiftes befestigt, so dass dasselbe um diesen Stift herumgedreht werden kann. In A und C ist ein Faden befestigt, der in U mittelst eines Stiftes an das Lineal gedrückt wird. Wird nun das Lineal um B gedreht, so beschreibt der Punkt U einen Hyperbelbogen; doch muss der Faden AUC kleiner als die Summe $AB+BC$ sein.

§. 152. *Lehrsatz.* Die Linie, welche den von einem innern und dem zugehörigen äussern Leitstrahl einer Parabel gebildeten Winkel halbirt, hat nur einen Punkt mit der Parabel gemein und wird eine Tangente der Parabel genannt. (Fig. 89.)

Beweis. Verbindet man den Fusspunkt E des äussern Leitstrahls ED mit dem Brennpunkt C, so steht die Halbirungslinie MD des Winkels CDE senkrecht auf der Mitte von CE. Gäbe es nun ausser D in der Richtung der Linie MD einen zweiten der Parabel angehörigen Punkt, etwa den Punkt X, so müsste nach der Definition der Parabel das Loth $XY = XC$ sein. Nun aber ist $XC = XE$, also wäre auch $XE = XY$, was unmöglich ist.

Zusatz. Die Tangente und Normale in D bilden mit den beiden Leitstrahlen DE und DC einen harmonischen Büschel. Sind daher P und Q die Durchschnittspunkte der genannten Linien

mit der Axe, so ist $PC = CQ$, da der Strahl DE der Axe parallel läuft.

Die Tangente GO, welche durch den Scheitel der Parabel geht, steht senkrecht auf der Axe und ist daher der Leitlinie parallel. Fällt man also vom Brennpunkt C ein Loth auf eine beliebige Tangente DP, so liegt der Fusspunkt M dieses Lothes allemal auf der Scheiteltangente GO.

Denn verlängert man CM bis zur Durchschneidung mit der Leitlinie in E, so ist E der Fusspunkt des zu D gehörigen äussern Leitstrahls und es ist $EM = MC$, mithin muss GO durch M gehen.

§. 153. *Erklärung.* Die Strecke PN der Axe, welche zwischen einer Tangente und der Ordinate ihres Berührungspunktes liegt, nennt man Subtangente; die Strecke NQ zwischen Ordinate und Normale heisst Subnormale.

§. 154. *Lehrsatz.* In der Parabel ist die Subtangente das Doppelte der Abscisse.

Die Subnormale ist constant und dem halben Parameter gleich. (Fig. 89.)

Beweis. Da M die Mitte von EC und MG parallel EF ist, so ist MG der Hälfte von EF und von DN gleich. Nun aber verhält sich

$$PG : PN = GM : ND,$$

mithin ist PG die Hälfte von PN.

Zieht man von den beiden gleichen Strecken PG und GN die gleichen Strecken FG und GC ab, so bleibt

$$PF = CN.$$

Für's Zweite ist

$$PC = CQ.$$

Zieht man wiederum von beiden Seiten dieser Gleichung die gleichen Grössen PF und CN ab, so bleibt

$$FC = NQ.$$

§. 155. *Lehrsatz.* In der Parabel ist das Quadrat jeder auf der Axe senkrechten Ordinate gleich dem Rechteck aus dem Parameter und der zugehörigen Abscisse.

Beweis. Man hat (Fig. 89.) im rechtwinkligen Dreieck PDQ:

$$\overline{DN}^2 = PN \times NQ = 2x \cdot \frac{p}{2},$$

also

$$y^2 = px,$$

$$p : y = y : x.$$

§. 156. *Erklärung.* Einen Kreis, welcher die Parabel im Scheitel von aussen berührt, d. h. mit der Parabel die Scheiteltangente gemein hat und nicht mit der Parabel auf derselben Seite dieser Tangente liegt, dessen Durchmesser dem Parameter gleich ist, nennen wir den Scheitelkreis der Parabel. (Fig. 91.)

§. 157. *Lehrsatz.* Die Parabel ist in Conformitätslage mit ihrem Scheitelkreise, insofern man die Scheiteltangente als Conformitätsaxe ansieht, das Projectionscentrum aber so bestimmt, dass der Punkt R, in welchem die Axe den Scheitelkreis zum zweiten Mal durchschneidet, in der Mitte zwischen dem Scheitel der Parabel und dem Centrum liegt.

Beweis. Man fälle in Fig. 91. von einem beliebigen Punkte D der Parabel ein Loth auf die Scheiteltangente, verbinde den Fusspunkt E desselben mit R, und D mit dem Scheitel der Parabel G.

Es ist $ED = x$, $EG = y$, $RG = p$; also ist wegen der Proportion

$$p : y = y : x$$

das Dreieck $RGE \backsim DEG$, und also W. EGD = W. ERG. Nun sei D' der Punkt, in welchem die Linie ER die Peripherie des Scheitelkreises durchschneidet. Verbindet man D' mit G, so ist, wie leicht einzusehen,

$$\text{W. } D'GE = \text{W. } EGR = \text{W. } EGD,$$

mithin halbirt GE den Winkel DGD', und da RG senkrecht auf GE steht, so ist G das Centrum eines harmonischen Büschels. Macht man nun $RO = RG$ und verbindet O mit E, so wird auch E das Centrum eines harmonischen Büschels; denn es ist ED parallel OG, und der Strahl ER geht durch die Mitte von OG.

Die beiden harmonischen Büschel E und G haben den Strahl EG gemein und liegen daher axial. Durchschneidet aber die Gerade $OD'D$ die Scheiteltangente in K, so wird die Strecke OK in D' und D harmonisch getheilt.

Bemerkung. Die gemeinsame Gegenaxe beider Systeme

berührt den Scheitelkreis in R; der Punkt R kann also der Gegenpunkt des Scheitelkreises genannt werden. Da es für den Punkt R keinen entsprechenden Punkt in der Parabel giebt, so ist dieselbe keine geschlossene Kurve.

§. 158. *Folgerungen.* 1) Jeder vom Gegenpunkt R des Scheitelkreises auslaufenden Sehne desselben RD' (Fig. 92.) entspricht in der Parabel (Fig. 92. a.) eine mit der Axe parallele Gerade ED, welche die Parabel nur in dem Punkte D durchschneidet. Eine Gerade dieser Art heisst ein Durchmesser der Parabel und der Punkt D der Scheitel desselben.

2) Zieht man in D' eine Tangente $D'N'$ an den Scheitelkreis, so entspricht ihr wieder eine Tangente der Parabel DN.

3) Es sei L der Punkt, in welchem die Tangente $D'M'$ die Gegenaxe durchschneidet. Ist nun eine Kreissehne $P'Q'$ gegeben, welche verlängert durch L geht, so entspricht derselben in der Parabel eine Sehne PQ, welche der Tangente DM parallel ist. Eine solche Sehne heisst dem von D auslaufenden Durchmesser zugeordnet.

4) Die Sätze von harmonischen Punkten einer Kreislinie, sowie auch von den Polaren, lassen sich ohne Mühe auf die Parabel ausdehnen.

§. 159. *Lehrsatz.* Jede Sehne einer Parabel wird vom zugeordneten Durchmesser halbirt.

Beweis. Die Sehne $P'Q'$ des Scheitelkreises wird vom Durchschnitt des Tangentenpaares und der zugehörigen Berührungssehne in L' und S' harmonisch getheilt. Nun aber liegt der Punkt L auf der Gegenaxe; folglich ist der Punkt S, in welchem die Sehne PQ vom zugeordneten Durchmesser geschnitten wird, die Mitte von PQ.

§. 160. *Lehrsatz.* Die Linie ST, welche den Durchschnitt zweier Parabeltangenten mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, fällt in die Richtung des der Berührungssehne zugeordneten Durchmessers und wird vom Scheitel desselben halbirt.

Beweis. Zieht man in P' und Q' Tangenten an den Scheitelkreis, so schneiden sich dieselben in der Verlängerung von RD; folglich schneiden sich die Parabeltangenten in P und Q in der Verlängerung des Durchmessers DS, welcher der Sehne PQ zugeordnet ist.

Für's Zweite sind die Punkte $RS'D'T'$ vier harmonische Punkte. Da aber R auf der Gegenaxe liegt, so liegt D in der Mitte zwischen S und T.

§. 161. *Lehrsatz.* Die Polare des Brennpunkts einer Parabel fällt mit der Leitlinie zusammen. (Fig. 93.)

Beweis. Dem Brennpunkte der Parabel entspricht im Systeme des Scheitelkreises ein Punkt, welcher auf der Verlängerung der Parabelaxe liegt. Da aber diese Axe durch den Mittelpunkt des Kreises geht, so sind die Polaren aller derjenigen Punkte, welche in der Richtung derselben liegen, senkrecht darauf und mithin der Conformitätsaxe parallel. Demnach sind auch alle entsprechenden Polaren im Systeme der Parabel auf der Axe derselben senkrecht.

Dasjenige Tangentenpaar, welches den Parameter TU zur Berührungssehne hat, hat seinen Durchschnitt auf der Leitlinie. Denn die Subtangente CV ist das Doppelte der Abscisse CX, also gleich der Hälfte des Parameters; ebenso gross aber ist die Entfernung des Brennpunkts C von der Leitlinie PQ.

Da nun der Punkt F ein gemeinsamer Punkt der Leitlinie und der zum Brennpunkt C gehörigen Polare ist, da zweitens beide auf der Parabelaxe senkrecht stehen, so folgt, dass beide in einander fallen.

§. 162. *Lehrsatz.* Jedes Tangentenpaar einer Parabel, dessen Durchschnitt auf der Leitlinie liegt, schliesst einen rechten Winkel ein. (Fig. 94.)

Beweis. Liegt der Tangentendurchschnitt F auf der Leitlinie, so geht die Berührungssehne DE durch den Brennpunkt C und ist also ein Parameter.

Verbindet man nun den Punkt F mit der Mitte G des Parameters DE, so ist FG als Durchmesser der Parabel senkrecht auf der Leitlinie AB. Fällt man also von D und E die Lothe DH und EJ auf AB, so ist FG als Mittellinie des Paralleltrapezes $HDEJ$ gleich der halben Summe von DH und EJ. Nun aber ist nach der Definition der Parabel

$$HD = DC, \quad JE = EC,$$

mithin

$$HD + JE = DE.$$

Demnach ist FG gleich der Hälfte von DE, d. h. $= GD$ und $= GE$. Es lässt sich also vom Punkte G aus ein Kreis um das Dreieck DFE beschreiben; folglich ist der Winkel $DFE = R$.

Zusatz. Der Scheitel K ist die Mitte von FG, folglich ist KG der vierte Theil des Parameters DE. Nun aber ist $KG = KF = AB + BL = x' + \frac{p}{4}$, wofern man unter x' die zum Scheitel K gehörige Abscisse AL und unter p den Hauptparameter versteht; folglich ist

$$DE = p + 4x'.$$

§. 163. *Lehrsatz.* Verbindet man irgend einen Punkt Z einer Parabel (Fig. 92. a.) mit den Endpunkten einer Sehne und dem Scheitel des zugeordneten Durchmessers, und zieht sodann von Z eine Parallele mit dem Durchmesser, so entsteht in Z ein harmonischer Büschel.

Beweis. Dem Parabeldurchmesser DS entspricht im Scheitelkreise eine Sehne RD', welche vom Gegenpunkt R ausläuft. Der Sehne PQ, welche dem Durchmesser DS zugeordnet ist, entspricht die Kreissehne $P'Q'$, welche verlängert durch den Pol von RD', durch L geht. Nun sind die Punkte $RP'D'Q'$ vier harmonische Punkte der Kreislinie. Verbindet man also den Punkt Z', welcher dem Punkte Z entspricht, mit diesen vier Punkten, so entsteht ein harmonischer Büschel. Es entspricht aber der Geraden $Z'R$ eine Gerade ZW, welche dem Durchmesser DS parallel läuft, folglich ist ZW die vierte Harmonikale zu ZD, ZP, ZQ.

§. 164. *Lehrsatz.* In der Parabel ist das Quadrat jeder einem Durchmesser zugeordneten Ordinate gleich dem Rechteck aus der zugehörigen Abscisse und dem ihr parallelen Parameter, d. h.

$$y_1^2 = p_1 x_1.$$

Beweis. Es sei (Fig. 95.) LM eine dem Durchmesser KN zugeordnete Sehne, N der Durchschnittspunkt beider, also LN eine dem Durchmesser KN zugeordnete Ordinate, und die Strecke KN die zugehörige Abscisse.

Man verbinde den Endpunkt D des mit LN parallelen Parameters DE mit L und M, sowie auch mit dem Scheitel K, und ziehe sodann DP parallel mit KN. Die Gerade DP möge die Richtung LM in P, die Gerade DK aber möge dieselbe in Q durchschneiden.

Da nach dem vorigen Paragraphen D das Centrum eines harmonischen Büschels ist, so sind $LPMQ$ vier harmonische Punkte, N aber ist die Mitte von LM; folglich hat man

$$NM^2 = NP \times NQ.$$

Nun aber ist $NP = GD = \frac{1}{2}p_1$, zweitens verhält sich

$$NQ : KN = DG : GK,$$

aber $DG = 2 . KG$; folglich

$$NQ = 2 . KN = 2x_1,$$

und demnach

$$y_1^2 = p_1 x_1.$$

§. 165. *Lehrsatz.* Das von einem Tangentenpaar einer Parabel und der zugehörigen Berührungssehne umschlossene Dreieck ist doppelt so gross, wie das über der Berührungssehne stehende Dreieck, welches den Scheitel des zugeordneten Durchmessers K zur Spitze hat (Fig. 96.).

Beweis. Das Dreieck DKG ist die Hälfte des Dreiecks DGF, da KG die Hälfte von FG ist; ebenso ist EKG die Hälfte von EGF; mithin DKE die Hälfte von DFE.

§. 166. *Lehrsatz.* Das von einem Parabelbogen und der zugehörigen Sehne umschlossene Segment ist gleich zwei Dritteln desjenigen Dreiecks, welches von der Sehne und dem zugehörigen Tangentenpaar umschlossen wird.

Beweis. Zieht man im Scheitel K des der Sehne DE zugeordneten Durchmessers eine neue Tangente an die Parabel RS, so ist das Dreieck RSF, da RS parallel mit DE ist, der vierte Theil des Dreiecks DFE, also die Hälfte von DKE.

Sucht man die Scheitel der Durchmesser, welche den Sehnen DK und EK entsprechen, und construirt diejenigen Dreiecke, welche zu DK und KE in derselben Beziehung stehen, wie die Dreiecke RSF und DKE zur Sehne DE, so werden die Tangentendreiecke wiederum die Hälfte der Sehnendreiecke sein. Setzt man nun die Construction ins Unendliche fort, so nähert sich die Summe der Sehnendreiecke augenscheinlich ohne Ende dem Segment EKD, die Summe der Tangentendreiecke demjenigen Flächenstück, welches vom Tangentenpaar FD und FE und dem Bogen DE umschlossen wird. Man ist daher berechtigt, zu schliessen, dass für diese beiden Flächen dasselbe Verhältniss Statt finde, welches zwischen der Summe der Tangentendreiecke und der Summe der zugehörigen Sehnendreiecke Statt findet, d. h. dass das äussere Stück die Hälfte des Segmentes sei.

Von den Bestimmungsverhältnissen und den perspectivischen Doppelverhältnissen.

§. 167. *Erklärung.* Wir bezeichnen eine von den Punkten a und b begrenzte Strecke durch ab, wenn sie als mit a anfangend und mit b endigend vorgestellt werden soll, dagegen mit ba, wenn sie mit b beginnt und sich bis a hin erstreckt.

Die Maasszahl der durch ab bezeichneten Strecke versehen wir entweder mit dem Zeichen $+$ oder $-$. Nachdem aber Eins von Beiden festgesetzt ist, erhält die Maasszahl derselben Strecke, als mit b anfangend gedacht, das entgegengesetzte Zeichen:

$$ab = -ba.$$

Diejenige Richtung, welcher das Vorzeichen $+$ zugesprochen ist, heisst die positive (also etwa ab), die andere (ba) die negative.

Demgemäss werden dann auch alle übrigen Strecken auf derselben Geraden mit $+$ oder $-$ versehen, jenachdem sie in ihrer Richtung mit ab oder mit ba übereinstimmen.

§. 168. *Zusatz.* Sind drei beliebige Punkte auf einer Geraden gegeben: a, b und c, so ist allemal

$$ac + cb = ab.$$

Beweis. Liegt c zwischen a und b, so ist der Satz an sich einleuchtend.

Liegt c über b hinaus, so hat man, welches auch die positive Richtung sein mag:

$$ac - bc = ab,$$

also

$$ac - (-cb) = ab,$$

d. h.

$$ac + cb = ab.$$

Liegt c über a hinaus, so ist

$$ab = cb - ca = cb - (-ac) = ac + cb.$$

§. 169. *Erklärung.* Derjenige Ausdruck, den man erhält, wenn man in die Bezeichnung

$$\frac{ac}{bc}$$

statt der Strecken ab und bc ihre mit dem gehörigen Vorzeichen versehenen Maasszahlen einsetzt, heisst das Bestimmungsverhältniss des Punktes c in Bezug auf die Punkte a und b, und wird von uns durch

$$(ab, c)$$

bezeichnet.

Die Strecke ab heisst die Fundamentalstrecke, ac und bc sind die Abschnitte derselben. Die festen Punkte a und b sind die Grenzpunkte der Fundamentalstrecke, der willkürliche Punkt c wird ein Theilpunkt derselben genannt, und zwar ein innerer, wenn er zwischen a und b liegt, sonst aber ein uneigentlicher oder äusserer Theilpunkt. Ein Theilpunkt der ersten Art bildet aufliegende Abschnitte, durch einen Theilpunkt der zweiten Art entsteht ein anliegender Abschnitt bc' (Fig. 97.) und ein übergreifender ac'.

Das Bestimmungsverhältniss eines inneren Theilpunkts ist negativ und zwar gleich -1, wenn derselbe in der Mitte zwischen den beiden Grenzpunkten liegt.

Das Bestimmungsverhältniss eines äusseren Theilpunkts ist positiv.

Da nun der übergreifende Abschnitt niemals dem anliegenden gleich werden kann, so kann es keinen Theilpunkt geben, dessen Bestimmungsverhältniss positiv und gleich Eins wäre. Man hat aber

$$ac + cb = ab,$$

oder

$$ac = ab + bc,$$

mithin

$$\frac{ac}{bc} = 1 + \frac{ab}{bc}.$$

Je grösser nun der Nenner bc wird, desto mehr nähert sich der Bruch $\frac{ab}{bc}$ der Null, um so mehr nähert sich auch die Gleichung

$$\frac{ac}{bc} = 1$$

der Wahrheit. Man sagt daher, ein Bestimmungsverhältniss, dessen Werth gleich Eins sei, zeige den unendlich entfernten Punkt an.

Liegen die Grenzpunkte fest, so ist jeder dritte Punkt durch sein Bestimmungsverhältniss gegeben.

§. 170. *Aufgabe.* Eine Strecke ab (Fig. 97.) durch den Punkt c so zu theilen, dass das Verhältniss $\frac{ac}{bc}$ einen vorgeschriebenen Werth gleich m erhält.

Auflösung. Man ziehe die willkürliche Linie aq, trage auf dieselbe vom Punkte a aus die Länge m auf bis γ, und von γ aus die Länge Eins, entweder nach derselben Seite hin bis β, wenn m negativ ist, andern Falles aber nach der entgegengesetzten Seite bis β'. Zieht man nun die Linie βb oder $\beta' b$ und durch γ eine Parallele, so bestimmt diese den gesuchten Theilpunkt c oder c'. Ist m gleich Eins, so fällt β' mit a, $\beta' b$ mit ab zusammen, dann wird $\gamma c'$ mit ab parallel, und der Punkt c' rückt in unendliche Entfernung.

Bemerkung. Denjenigen Grenzpunkt, welcher im Zähler eines gegebenen Bestimmungsverhältnisses steht, nennen wir den ersten.

Das Verhältniss $\frac{ac}{bc}$ ist gleich Null, wenn der Theilpunkt c in den ersten Grenzpunkt a fällt. Um es positiv wachsen zu lassen, muss man c in die Verlängerung von ba treten lassen. Hier bleibt $\frac{ac}{bc}$ beständig ein ächter Bruch und nimmt erst im Unendlichen den Werth Eins an. Denselben Werth behält es, wenn man sich c unendlich weit nach der entgegengesetzten Seite in die Verlängerung von ab entrückt denkt. Nähert sich nun aber der Punkt c von dieser entgegengesetzten Seite her dem Punkte b, so wird das Verhältniss $\frac{ac}{bc} = 1 + \frac{ab}{bc}$ immer grösser, da bc beständig abnimmt. Fällt c mit dem zweiten Grenzpunkt b zusammen, so hat man

$$\frac{ac}{bc} = \frac{ab}{0} = \infty.$$

Soll dagegen das Verhältniss $\frac{ac}{bc}$ von Null aus negativ wachsen, so wird c von a aus in der Richtung ab fortrücken müssen. Man wird zu einer richtigen Vorstellung gelangen, wenn man sich die Verlängerung von ba gleichsam als einen Kreisbogen denkt, der mit seinem unendlich entfernten Punkte an die Verlängerung von ab anstösst.

Desshalb spricht man auch nicht von zwei unendlich entfernten Punkten, sondern nur von einem. Von einem ausserhalb einer gegebenen Linie liegenden Punkte eine Gerade nach ihrem unendlich entfernten Punkte ziehen, heisst übrigens nichts Anderes als eine Parallele zu ihr ziehen.

§. 171. *Erklärungen.* Zwei gleichartige Theilpunkte (innere oder äussere), von denen der eine so weit vom ersten Grenzpunkt entfernt ist, wie der andere vom zweiten, wie c und c' (Fig. 98.), heissen symmetrische Theilpunkte.

Zusatz. Die auf gleiche Weise angesetzten Bestimmungsverhältnisse derselben sind reciproke Werthe von einander und umgekehrt: sind die Bestimmungsverhältnisse zweier Theilpunkte reciproke Werthe von einander, so sind sie symmetrische Theilpunkte.

In der That ist $ac = bc'$, so ist auch $ac' = bc$, mithin ist

$$\frac{ac}{bc} = 1 : \frac{ac'}{bc'}.$$

§. 172. *Erklärung.* Sind drei von einem Punkte O auslaufende Strahlen OA, OB, OC gegeben, so heisst das Verhältniss

$$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin AC}{\sin BC}$$

das Bestimmungsverhältniss des Strahls OC in Bezug auf die Strahlen OA und OB (Fig. 98.a.).

Die Winkel AOC und BOC werden immer als hohle Winkel vorausgesetzt. Die Fundamentalstrahlen OA und OB denken wir uns von O aus nach einer bestimmten Seite hin gezogen; dagegen bleibt es für jeden dritten Strahl ungewiss, nach welcher Seite er sich erstreckt. Jeder Strahl OC und seine rückwärts gehende Verlängerung OC' werden als ein Strahl gedacht.

Wird nun festgesetzt, dass ein Bestimmungsverhältniss positiv oder negativ sein soll, jenachdem der dritte Strahl wie OC in Fig. 99. ausserhalb des hohlen Winkels AOB, oder wie OC in Fig. 99.a. innerhalb desselben liegt; so ist jeder dritte Strahl seiner Lage nach vollkommen bestimmt. Zieht man nämlich zwischen OA und OB noch einen Strahl OD (Fig. 98. a.), so wird sich sogleich zeigen, dass das Verhältniss $\frac{\sin AD}{\sin BD}$ von dem Verhältniss $\frac{\sin AC}{\sin BC}$ verschieden sein muss.

Man fälle von einem beliebigen Punkte m in der Richtung OC die Lothe mk und ml auf die Fundamentalstrahlen, und ziehe sodann mm' parallel mit OA bis zum Strahl OD. Von m' fälle man die Lothe $m'k'$ und $m'l'$. Alsdann ist:

$$mk = Om.\sin AC,$$

$$ml = Om.\sin BC,$$

$$\frac{mk}{ml} = \frac{\sin AC}{\sin BC}.$$

Ebenso ist

$$\frac{m'k'}{m'l'} = \frac{\sin AD}{\sin BD}.$$

Nun aber ist $m'k' = mk$; dagegen kann $m'l'$ nicht gleich ml sein, weil sonst mm' auch parallel OB wäre; folglich wird auch $\frac{mk}{ml}$ niemals gleich $\frac{m'k'}{m'l'}$ sein.

§. 173. *Erklärung.* Man erhält ein perspectivisches Doppelverhältniss zwischen vier Punkten a, b, c, d, wenn man zwei derselben als Grenzpunkte, die beiden andern als Theilpunkte ansieht, und das Bestimmungsverhältniss des ersten Theilpunkts durch das gleich angesetzte des andern dividirt, also

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}.$$

Der Ausdruck „gleich angesetzt" soll daran erinnern, dass jeder der beiden Grenzpunkte in beiden Verhältnissen dieselbe Stelle haben muss.

Das vorstehende Verhältniss $\frac{ac}{bc}$ heisst das obere, das folgende aber das untere. Wir bezeichnen das Doppelverhältniss

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

der Kürze wegen durch (ab, cd) und sprechen aus: „Doppelverhältniss $abcd$".

In gleicher Weise entsteht ein Doppelverhältniss zwischen vier Strahlen.

Zusätze 1. Das Doppelverhältniss (ab, cd) ist positiv, wenn die beiden Theilpunkte gleichartig (zugleich innere oder äussere) sind, im entgegengesetzten Falle negativ. Für den Werth von (ab, cd) ist es also auch gleichgültig, ob man ab oder ba als die positive Richtung ansieht.

2. Ist $(ab, cd) = m$ gegeben, so ist durch drei von den vier Punkten a, b, c, d allemal der vierte bestimmt. Ebenso ist durch drei Strahlen und ein gegebenes Doppelverhältniss der vierte Strahl bestimmt.

3. Für den Werth des Doppelverhältnisses

$$\frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD} \quad \text{oder} \quad (AB, CD)$$

ist es gleichgültig, ob man statt eines der Fundamentalstrahlen oder der beiden Theilstrahlen seine über das Centrum hinaus gehende Verlängerung nimmt.

Nur die erste Behauptung bedarf eines Nachweises. Nimmt man aber z. B. statt des Strahls OA (Fig. 98. a.) seine Verlängerung OA', so behalten die beiden Verhältnisse

$$\frac{\sin A'C}{\sin BC} \quad \text{und} \quad \frac{\sin A'D}{\sin BD}$$

denselben absoluten Werth wie vorhin, weil Nebenwinkel gleiche Sinus haben. Beide Verhältnisse nehmen aber zugleich das entgegengesetzte Vorzeichen an; folglich bleibt das Doppelverhältniss ungeändert.

§. 174. *Hauptlehrsatz.* Wird eine Gerade (Fig. 99.) von vier Strahlen OA, OB, OC, OD, die von *einem* Punkt O auslaufen, in den Punkten a, b, c, d durchschnitten, so ist ein beliebiges Doppelverhältniss zwischen den vier Durchschnittspunkten allemal gleich dem entsprechend angesetzten Doppelverhältniss der vier Strahlen:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD}.$$

Beweis. Man fälle von den beiden Theilpunkten c und d Lothe auf die Fundamentalstrahlen: ck, cl, dk' und dl'. Alsdann verhält sich

1) $$ac : ad = ck : dk',$$

2) $$bc : bd = ck : dl'.$$

Hieraus folgt:

3) $$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{ck}{cl} : \frac{dk'}{dl'}.$$

Nun aber ist:

$$ck = Oc . \sin AC, \quad dl = Oc . \sin BC,$$

$$dk' = Od . \sin AD, \quad dl' = Od . \sin BD;$$

folglich:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD}.$$

Die Uebereinstimmung der Vorzeichen ist an sich einleuchtend.

Zusatz. Um den Satz auch bequem auf den Fall ausdehnen zu können, wenn die Transversale einem der gegebenen Strahlen etwa OD parallel sein sollte (Fig. 99. a.), dazu dient die Fiction eines unendlich entfernten Durchschnittspunktes d, dem eben die Eigenschaft beigelegt wird, dass er von allen im endlichen Raume gelegenen Punkten gleich weit entfernt sei. Dadurch bleibt die oben gewonnene Gleichung

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD}$$

auch für diesen Fall richtig.

Denn angenommen, die aufgestellte Gleichung wäre nicht richtig, wenn man dem Ausdruck $\frac{ad}{bd}$ den Werth Eins beilegt, sondern man müsste, um ihr zu genügen, $\frac{ad}{bd} = m$ nehmen, so dass man nun hätte:

$$\frac{ac}{bc} : m = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD},$$

so liesse sich auf der Geraden ab ein bestimmter Punkt d' in endlicher Entfernung finden, für welchen $\frac{ad'}{bd'} = m$ wäre. Alsdann hätte man also zuerst:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad'}{bd'} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD},$$

und auch, wofern man durch d' den Strahl OD' zöge, wie vorhin bewiesen:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad'}{bd'} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD'}{\sin BD'}.$$

Also wäre

$$\frac{\sin AD}{\sin BD} = \frac{\sin AD'}{\sin BD'},$$

was unmöglich ist.

Folgerungen. 1) Wenn zwei Punktreihen $abcd$ und $a'b'c'd'$ (Fig. 99.) perspectivisch liegen, so ist

$$\frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD} = (ab,\, cd) = (a'b',\, c'd'),$$

also

$$(ab,\, cd) = a'b',\, c'd').$$

Ist abc parallel OD (Fig. 99.a.) so ist

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} : \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{ac}{bc}.$$

2) Wenn zwei Strahlenbüschel $O, ABCD$ und $O', A'B'C'D'$ (Fig. 100.) axial liegen, so hat man, wofern a, b, c und d die Punkte sind, in denen sich die entsprechenden Strahlen schneiden:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD} = \frac{\sin A'C'}{\sin B'C'} : \frac{\sin A'D'}{\sin B'D'}.$$

Umgekehrt:

1) Zwei Punktreihen von je vier Punkten mit gleichen auf gleiche Weise angesetzten Doppelverhältnissen liegen perspectivisch, sobald sie einen gemeinsamen Punkt haben oder auch, wenn sie mit drei Paaren entsprechender Punkte perspectivisch liegen.

2) Zwei Strahlenbüschel von je vier Strahlen mit gleichen Doppelverhältnissen liegen axial, wenn sie einen gemeinschaftlichen Strahl haben, oder wenn sie mit drei Strahlenpaaren axial liegen.

Zusatz. Zwei Punktreihen mit gleichen Doppelverhältnissen sind also entweder conform oder proportional oder congruent.

Proportional sind sie, wenn ausser der Gleichung

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}$$

noch die Gleichheit der einzelnen Verhältnisse vorhanden ist:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'}, \quad \frac{ad}{bd} = \frac{a'd'}{b'd'}.$$

Congruent sind sie, wenn überdies Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner übereinstimmt:

$$ac = a'c', \quad bc = b'c', \quad \text{u. s. w.}$$

Nennt man conform zwei Strahlenbüschel, die zu einander in axiale Lage gebracht werden können, so wird die Congruenz hier ein besonderer Fall der Conformität, wie sie bei Punktreihen ein besonderer Fall der Proportionalität ist. Strahlenbüschel mit gleichen Doppelverhältnissen sind überhaupt conform. Sie sind conform und dabei zugleich congruent, wenn die Einzelverhältnisse paarweise übereinstimmen.

§. 175. *Lehrsätze.* 1) Ein Doppelverhältniss $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ bleibt ungeändert, wenn man die Grenzpunkte mit den Theilpunkten vertauscht:

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) = (\gamma\delta, \alpha\beta).$$

Denn es ist

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} : \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\delta} : \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\gamma\alpha}{\delta\alpha} : \frac{\gamma\beta}{\delta\beta}.$$

2) Ein Doppelverhältniss geht in seinen reciproken Werth über, wenn man die Grenzpunkte oder die Theilpunkte unter sich umstellt:

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) = \frac{1}{(\beta\alpha, \gamma\delta)} = \frac{1}{(\alpha\beta, \delta\gamma)}.$$

Denn es ist

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} : \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{1}{\frac{b\gamma}{\alpha\gamma} : \frac{\beta\delta}{\alpha\delta}} = \frac{1}{\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} : \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}}.$$

Zusatz. Folglich bleibt ein Doppelverhältniss ungeändert, wenn man die Grenzpunkte und die Theilpunkte zugleich umstellt:

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) = (\beta\alpha, \delta\gamma).$$

3) Ein Doppelverhältniss geht in seine Ergänzung zur Einheit über, wenn man einen Grenzpunkt mit dem ungleichstelligen Theilpunkt vertauscht:

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) + (\alpha\gamma, \beta\delta) = 1,$$

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) + (\delta\beta, \gamma\alpha) = 1.$$

Es sei (Fig. 99. a.) die Transversale *abc* dem Strahl *OD* parallel. Dann ist

$$(\alpha\beta,\ \gamma\delta) = \frac{ac}{bc} = \frac{ca}{cb},$$

$$(\alpha\gamma,\ \beta\delta) = \frac{ab}{cb};$$

also

1) $$(\alpha\beta,\ \gamma\delta) + (\alpha\gamma,\ \beta\delta) = \frac{ca + ab}{cb} = \frac{cb}{cb}.$$

Fürs Zweite hat man

2) $$(\alpha\beta,\ \gamma\delta) + (\delta\beta,\ \gamma\alpha) = (\gamma\delta,\ \alpha\beta) + (\gamma\alpha,\ \delta\beta);$$

der zur Rechten dieser Gleichung stehende Ausdruck ist aber nach 1) gleich Eins.

4) Vertauscht man aber einen Grenzpunkt mit dem **gleichstelligen** Theilpunkt, so ergänzen sich der reciproke Werth des gegebenen und derjenige des neu gebildeten Doppelverhältnisses zur Einheit:

$$\frac{1}{(\alpha\beta,\ \gamma\delta)} + \frac{1}{(\alpha\delta,\ \gamma\beta)} = 1,$$

$$\frac{1}{(\alpha\beta,\ \gamma\delta)} + \frac{1}{(\gamma\beta,\ \alpha\delta)} = 1.$$

Denn es ist

$$\frac{1}{(\alpha\beta,\ \gamma\delta)} = (\alpha\beta,\ \delta\gamma),$$

$$\frac{1}{(\alpha\delta,\ \gamma\beta)} = (\alpha\delta,\ \beta\gamma).$$

Anmerkung. Im Ganzen sind 24 verschieden angesetzte Doppelverhältnisse zwischen vier Punkten möglich. Nach den voranstehenden Sätzen lassen sich aus einem derselben die übrigen ableiten.

§. 176. *Erklärung.* Ein Doppelverhältniss heisst harmonisch, wenn es gleich -1 ist, sonst aber anharmonisch.

Zusätze. 1) Bei vier harmonischen Punkten $abcd$ (Fig. 99.) ist das Rechteck aus dem grössten Abschnitt ad und dem mittlern bc gleich dem Rechteck aus den beiden äussern Abschnitten ab und cd.

Aus

$$\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} = -1$$

folgt unmittelbar:

$$ab\,.\,cd = ad\,.\,bc.$$

2) Das Rechteck aus den beiden übergreifenden Abschnitten *ac* und *bd* ist doppelt so gross, wie das Rechteck aus den beiden äusseren Abschnitten.

Man hat

$$(ac,\ bd) + (ab,\ cd) = 1,$$

mithin, wenn $(ac,\ bd) = -1$ ist,

$$(ab,\ cd) \quad \text{oder} \quad \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = 2.$$

Hieraus folgt:

$$ac\,.\,bd = 2\,.\,ad\,.\,cb = 2\,.\,ab\,.\,cd.$$

§. 177. *Lehrsatz.* Zwei Punktreihen von je vier Punkten *acbd* und *ac'b'd'* mit dem gemeinsamen Punkt *a* (Fig. 102. a.) sind allemal harmonisch, wenn sie in Bezug auf zwei Projectionscentra *m* und *n* perspectivisch liegen.

Beweis. Man hat wegen des Centrums *m*:

$$1) \qquad (ab,\ cd) = (ab',\ c'd'),$$

und wegen des Centrums *n*:

$$2) \qquad (ab,\ cd) = (ab',\ d'c');$$

nun ist

$$(ab',\ c'd') = \frac{1}{(ab',\ d'c')};$$

folglich kommt, indem man die Gleichungen 1) und 2) multiplicirt:

$$(ab,\ cd)^2 = 1.$$

Hieraus folgt

$$(ab,\ cd) = \pm 1.$$

Da aber das Zeichen + nicht Statt haben kann, so hat man

$$(ab,\ cd) = -1.$$

Bemerkung. Ein Viereck *cdd'c'* (Fig. 102. a.) wird vervollständigt, indem man seine Gegenseiten bis zur Durchschneidung in *a* und *m* verlängert; die Gerade *am* ist die äussere Diagonale. Man sieht sogleich, dass jede der drei Diagonalen wie *cd'* durch die beiden andern harmonisch getheilt wird.

Um zu *c*, *b* und *d* den vierten harmonischen Punkt zu finden, kann man *cm* und *dm* willkürlich ziehen und sodann den Punkt

n beliebig auf mb wählen. Die Geraden cn und dn bestimmen die Punkte d' und c', und die Gerade $c'd'$ den gesuchten Punkt a.

§. 178. *Erklärung.* In zwei conform liegenden Punktreihen erhält man die Gegenpunkte, wenn man zwei mit den Richtungen dieser Reihen parallele Projectionsstrahlen Ou und Ov zieht. (Fig. 101.)

Die Gegenpunkte sind also diejenigen Punkte, denen in der andern Reihe der unendlich entfernte Punkt entspricht.

§. 179. *Lehrsatz.* In zwei conform liegenden Punktreihen geben die Entfernungen der Gegenpunkte von je zwei entsprechenden Punkten ein constantes Product (Fig. 101.)

Beweis. Man hat, indem man durch ∞ und ∞' die unendlich entfernten Punkte beider Reihen, durch a ihren gemeinsamen Punkt bezeichnet:

$$\frac{au}{bu}:\frac{a\infty}{b\infty}=\frac{a\infty'}{b'\infty'}:\frac{av}{b'v},$$

also, wegen

$$\frac{a\infty}{b\infty}=\frac{a\infty'}{b'\infty'}=1:$$

$$\frac{au}{bu}=1:\frac{av}{b'v},$$

woraus hervorgeht:

$$bu.b'v=au.av.$$

Dies folgt auch leicht aus der Betrachtung der ähnlichen Dreiecke Oub und Ovb', in denen sich verhält

$$bu:Ov=Ou:b'v.$$

§. 180. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Sind zwei Punktreihen $abcu$ und $ab'c'v$ mit dem gemeinsamen Punkt a gegeben und ist

$$au.av=bu.b'v=cu.c'v \text{ u. s. w.},$$

so liegen die beiden Reihen $abc\ldots.$ und $ab'c'\ldots.$ perspectivisch.

Beweis. Construirt man das Parallelogramm $Ouav$, so werden b und b', c und c' in gerader Linie mit O liegen. Denn angenommen, der Strahl Ob schnitte die Gerade ab' statt im Punkte b' im Punkte β, so wäre nach dem vorigen Paragraphen

$$au.av=bu.\beta v;$$

aber nach der Voraussetzung auch

$$au.av = bu.b'v;$$

also

$$b'v = \beta v.$$

§. 181. *Zusatz.* Werden zwei Punktreihen von je drei Punkten abc und $a'b'c'$ als conform auf einander bezogen, so sind die Gegenpunkte beider Reihen vollkommen bestimmt.

Beweis. Man denke sich die beiden Reihen abc und $a'b'c'$ in eine solche Lage gebracht, dass a' mit a zusammenfällt (Fig. 101.). Wird nun vom Durchschnitt O der Geraden bb' und cc' zuerst Ou parallel mit ab' und sodann Ov parallel mit ab gezogen, so ist

$$au.av = bu.b'v = cu.c'v.$$

Gäbe es nun in der Reihe $ab'c'$ noch einen Punkt v' von der Beschaffenheit, dass man ebenfalls hätte:

$$au.av' = bu.b'v' = cu.c'v',$$

so müssten die beiden Reihen abc und $ab'c'$ noch in Bezug auf ein zweites Centrum O' perspectivisch liegen, welches durch die aus v' mit ab gezogene Parallele $v'O'$ bestimmt sein würde. Dies ist aber nicht möglich, da die Geraden bb' und cc' nur einen Durschnitt haben können. Ebenso wenig lassen sich u und v zugleich mit zwei andern Punkten u' und v' der zugehörigen Reihen vertauschen, so dass für dieselben die Gleichungen

$$au'.av' = bu'.b'v' = cu'.c'v'$$

existiren könnten.

Anmerkung. Der Beweis des voranstehenden Satzes zeigt zugleich, wie man zu verfahren habe, um die Gegenpunkte der beiden auf einander bezogenen Reihen abc und $a'b'c'$ zu finden. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn abc und $a'b'c'$ proportionale Reihen sind. Denn alsdann wird, wenn a' mit a zusammenfällt, bb' mit cc' parallel.

Ist einer der Gegenpunkte, etwa u, gegeben, so dürfen in jeder der beiden als conform auf einander zu beziehenden Reihen nur noch zwei Punkte willkürlich genommen werden, etwa a und a', b und b'. Dann legt man wieder zwei als entsprechend gesetzte Punkte (a mit a') zusammen, zieht von u aus eine Parallele mit ab' und sucht deren Durchschnitt mit der Geraden bb'. Die durch diesen Durchschnitt O mit ab gezogene Parallele Ov bestimmt den Gegenpunkt v auf ab'.

Sind beide Gegenpunkte u und v bestimmt, so ist nur ein Paar von Punkten, a und a', willkürlich zu bestimmen.

§. 182. *Aufgabe.* Zu drei gegebenen Punkten (Fig. 102.) einen vierten zu bestimmen, so dass ein auf vorgeschriebene Weise angesetztes Doppelverhältniss einen gegebenen Werth gleich k erhält.

Auflösung. Es sei ausser den beiden Grenzpunkten a und b noch der erste Theilpunkt c gegeben, und der zweite Theilpunkt d nach der Gleichung

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = k$$

zu bestimmen.

Man ziehe aus b die willkürliche Linie $b\alpha$; bestimme den Punkt γ auf $b\alpha$ gemäss der Gleichung

$$\frac{\alpha\gamma}{b\gamma} : \frac{\alpha\infty}{b\infty} = k,$$

d. h.

$$\frac{\alpha\gamma}{b\gamma} = k,$$

und suche sodann den Durchschnitt O der Geraden $a\alpha$ und $c\gamma$. Von diesem ziehe man nun die Gerade Od parallel mit $\alpha\gamma$; dann ist ihr Durchnitt d mit der Geraden ab der gesuchte Punkt.

Wäre

$$\frac{ac}{bc} = k,$$

so würden $a\alpha$ und $c\gamma$ parallel werden. Dann wird die Auflösung unmöglich, oder, mit andern Worten, der gesuchte Punkt ist der unendlich entfernte.

Ist d gegeben und c gesucht, so verbindet man den willkührlich ausserhalb der Richtung ab genommenen Punkt O mit a, b und d, zieht zwischen Oa und Ob die Linie $b\alpha \parallel Od$, und bestimmt den Punkt γ gemäss der Gleichung

$$\frac{\alpha\gamma}{b\gamma} = k.$$

Die Gerade $O\gamma$ trifft den gesuchten Punkt c.

Jetzt würde die Aufgabe unmöglich werden, sobald man hätte:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{1}{k}.$$

Anmerkung. Man kann sich auch vorstellen, dass einer der Grenzpunkte, etwa b, in unendlicher Entfernung liege. Alsdann ist die Gleichung

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = k,$$

weil nun $bc = bd$ ist, gleichbedeutend mit

$$ac : ad = k.$$

Von der Conformität der Figuren im Allgemeinen.

§. 183. *Lehrsatz.* Man erhält (Fig. 103.) zu einer gegebenen Figur $abcd....$ eine mit ihr conform liegende Figur, wenn man nach willkürlicher Wahl eines Centrums O und einer Axe XY zu einem jeden Punkt a der gegebenen Figur den entsprechenden Punkt a' so bestimmt, dass die Strecke des durch a und a' gehenden Projectionsstrahls, welche zwischen Centrum und Axe liegt, von den beiden Punkten nach einem Doppelverhältniss von constantem Werthe getheilt wird.

Der Beweis wurde schon früher für den besondern Fall des harmonischen Verhältnisses geführt und ist leicht zu verallgemeinern.

Anmerkung 1. Man kann hierbei folgendermaassen verfahren: Nachdem man ausser der Axe und dem Centrum auch noch den Punkt a' auf dem Projectionsstrahl Oa willkürlich angenommen hat (Fig. 103.), verbindet man a mit einem andern Punkt des gegebenen Systems b, der aber nicht auf dem Projectionsstrahl Oa liegen darf. Verlängert man nun ab bis zur Durchschneidung mit der Axe XY in m, und verbindet m mit a'; so bestimmt die Gerade ma' auf dem Projectionsstrahl Ob den Punkt b'. Durch die beiden Punkte b und b' kann man nun auch auf dem Strahl Oa beliebig viele Paare von entsprechenden Punkten in derselben Weise bestimmen.

Anmerkung 2. Ist das constante Doppelverhältniss das harmonische, so erhält man wiederum zwei Systeme in Conformitätslage, wenn man eins der vorhandenen mit einem congruen-

ten System vertauscht, das mit ihm in Bezug auf die vorhandene Conformitätsaxe affin liegt, oder, was dasselbe sagt, wenn man das eine System so weit um die Conformitätsaxe herumdreht, bis es wieder in dieselbe Ebene fällt. Alsdann tritt der besondere Fall ein, dass das Conformitätscentrum in die Axe fällt, und zwar erhält man das neue Centrum P, indem man von dem alten Centrum O (Fig. 103. a.) ein Loth auf die Axe XY fällt.

Es sei

$$(Om, aa') = -1,$$

indem m den Durchschnitt des Strahls Oa mit der Axe XY bezeichnet.

Fällt man nun von a' das Loth $a'p$ auf XY und macht die Verlängerung dieses Lothes $p\alpha = pa'$, so ist

$$\text{W}.\,\alpha Pp = \text{W}.\,a'Pp.$$

Da aber P das Centrum eines harmonischen Büschels ist mit den Strahlen PO, Pa, Pp und Pa', in welchem zwei zugeordnete Strahlen PO und Pp auf einander senkrecht stehen; so halbirt Pp auch den Winkel aPa', und somit muss $P\alpha$ mit Pa zusammenfallen. Das neue System $\alpha\beta$.... liegt folglich mit dem System ab.... perspectivisch in Rücksicht auf das Centrum P, indem wir uns vorstellen, dass jeder fernere Punkt β in derselben Beziehung zu b' stehe, wie α zu a'.

Nun aber werden sich die Geraden ab und $a'b'$ in einem Punkte m der Axe XY begegnen; ebenso müssen sich $a'b'$ und $\alpha\beta$ auf XY begegnen, da diese Gerade Affinitätsaxe für die beiden betreffenden Systeme ist; folglich geht $\alpha\beta$ ebenfalls durch den Punkt m. Es liegt also das System ab.... auch axial mit dem System $\alpha\beta$.... in Bezug auf die Axe XY.

§. 184. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Bei je zwei conform liegenden Figuren wird die Strecke jedes Projectionsstrahls, welche zwischen Centrum und Axe liegt, von zwei entsprechenden Punkten allemal so getheilt, dass das aus dieser Theilung hervorgehende Doppelverhältniss einen unveränderlichen Werth behält. Wir nennen dieses Doppelverhältniss das Conformitätsverhältniss der beiden Figuren. Natürlich muss beim Ansatz desselben darauf geachtet werden, dass die zu einem System gehörigen Punkte immer dieselbe Stelle erhalten, zu welchem Ende wir ein für allemal eins der beiden gegebenen Systeme als das erste, das andere als das zweite festzustellen haben.

Die Wahrheit der aufgestellten Behauptung zeigt sogleich die Figur 103. Hier ist, wenn q und r die Durchschnittspunkte der Strahlen Oa und Ob mit XY bezeichnen,

$$(Oq, aa') = (Or, bb').$$

Anmerkung. Liegt das Centrum auf der Axe, so wird das Conformitätsverhältniss harmonisch, sobald man eins der gegebenen Systeme nach der entgegengesetzten Seite der Axe verlegt.

Denkt man sich in Fig. 103. a. die beiden Systeme ab.... und $\alpha\beta$.... als die gegebenen, das System $a'b'$.... congruent mit $\alpha\beta$.... und in Affinitätslage mit demselben in Bezug auf die Axe XY, so muss offenbar auch $a'b'$.... mit ab.... axial liegen. Nun seien c, γ, c' die Punkte, in denen ein im vorausgesetzten Conformitätscentrum P auf XY errichtetes Loth die Geraden ab, $\alpha\beta$, $a'b'$ durchschneidet, dann ist wegen des Centrums P:

$$(ab, cm) = (\alpha\beta, \gamma m) = (a'b', c'm);$$

folglich sind auch die Reihen $abcm$ und $a'b'c'm$ in perspectivischer Lage. Weil man nun aber statt des Punktes b jeden andern nehmen kann, so folgt, dass das System ab ... mit $a'b'$ perspectivisch liege.

Was nun das Conformitätsverhältniss anbelangt, so ist klar, dass die vier Strahlen PO, Pa, Pp, Pa' harmonisch sind, da der Winkel OPp ein Rechter ist, und der Winkel aPa' durch Pp halbirt wird.

§. 185. *Folgerungen.* 1) Ist das obwaltende Verhältniss

$$(Om, aa') = k,$$

so wird der dem Punkt a entsprechende Punkt a' in unendliche Entfernung rücken, sobald man hat (Fig. 104.):

$$\frac{Oa}{ma} = k.$$

Die sämmtlichen Gegenpunkte des ersten Systems werden also auf einer Geraden liegen RS, welche der Conformitätsaxe parallel ist. Wird von O das Loth Or auf die Axe gefällt, und ist p der Durchschnitt dieses Lothes mit der Gegenaxe RS, so hat man auch

$$1) \qquad \frac{Op}{rp} = k.$$

Andererseits rückt der Punkt a des ersten Systems in unendliche Entfernung, sobald die Lage des Punktes a' der Gleichung

$$\frac{Oa'}{ma'} = \frac{1}{k}$$

gemäss ist. Durchschneidet also das Loth Or die Gegenaxe des zweiten Systems UV in q, so ist auch

$$2) \qquad \frac{Oq}{rq} = \frac{1}{k}.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt nun, dass die beiden Gegenaxen RS und UV in Bezug auf das Centrum O und die Conformitätsaxe XY symmetrisch liegen, d. h. dass sie entweder beide zwischen Axe und Centrum oder ausserhalb liegen, und dass die eine so weit vom Centrum entfernt ist, wie die andere von der Axe.

Liegt das Centrum auf der Conformitätsaxe, so befinden sich die Gegenaxen zu beiden Seiten in gleicher Entfernung von derselben, da beim Umlegen des einen Systems um die Axe das Conformitätsverhältniss harmonisch wird und also die Gegenaxen zusammenfallen.

2) Jede Gerade des einen Systems ist dem Projectionsstrahl parallel, welcher durch den Gegenpunkt der andern geht.

3) Es seien (Fig. 104.) a und a' zwei entsprechende Punkte, am und $a'm$ zwei entsprechende Gerade, die sich im Punkte m der Conformitätsaxe begegnen, s und t endlich seien die Gegenpunkte dieser beiden Geraden, also

$$Os \,||\, a'm, \quad Ot \,||\, am.$$

Der Punkt a', den wir jetzt als einen Punkt des zweiten Systems ansehen, lässt sich auch auf das erste System beziehen. Dann ist der Gegenpunkt der Geraden $a'm$ nicht mehr der Punkt t, sondern der Punkt s', in welchem sie von der Gegenaxe des ersten Systems RS geschnitten wird. Die entsprechende Gerade des zweiten Systems $m\alpha$ geht alsdann von m aus parallel mit Os'. So lange nun die beiden Punkte s' und t nicht zusammenfallen, wird auch $m\alpha$ nicht mit ma und α nicht mit a zusammenfallen. Folglich werden zwei in Conformitätslage befindliche Figuren nur dann involutorisch liegen, wenn ihre beiden Gegenaxen zusammenfallen, d. h. wenn das Conformitätsverhältniss harmonisch ist.

4) Wenn den vier Punkten $abcd$ auf einer Geraden die vier Punkte $a'b'c'd'$ entsprechen, so ist allemal

$$(ab, cd) = (a'b', c'd').$$

Dasselbe gilt natürlich auch von affinen Systemen. In conformen Systemen werden sich aber im Allgemeinen conforme Punktreihen entsprechen, und nur in dem Falle proportionale, dass beide bei perspectivisch-axialer Lage beider Systeme der Conformitätsaxe parallel sind.

Ebenso entsprechen sich in conformen, sowie auch in affinen Systemen conforme Strahlenbüschel. In ähnlichen und congruenten Systemen sind entsprechende Büschel allemal congruent.

5) Hat man zwei entsprechende Gerade am und $a'm$, die sich in m auf der Conformitätsaxe begegnen, und sind s und t die Gegenpunkte dieser Geraden, so ist das Product $as.a't$ constant für jedes Paar entsprechender Punkte auf den Geraden as und $a't$, und zwar gleich $am.a'm$.

Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke Osa und Ota' verhält sich

$$as : Os = Ot : a't.$$

Fällt man von zwei entsprechenden Punkten die Lothe ak und $a'l$ auf die betreffenden Gegenaxen, so ist das Product

$$ak.a'l$$

constant und hat denselben Werth für alle Punkte der gegebenen Systeme.

Denn es verhält sich offenbar

1) $$as : ms = ak : rp,$$

2) $$a't : mt = a'l : rq;$$

also erhält man, indem man zusammensetzt:

$$as.a't : ms.mt = ak.a'l : rp.rq.$$

Nun aber ist

$$as.a't = ms.mt;$$

folglich auch

$$ak.a'l = rp.rq.$$

§. 186. *Lehrsatz.* Zwei Dreiecke in Centralperspective sind allemal in Conformitätslage, wenn sie nicht in Aehnlichkeitslage sind.

Beweis. Es sei (Fig. 103.) m der Durchschnitt der Geraden ab und $a'b'$, n derjenige von ac mit $a'c'$, endlich q, r und s die Punkte, in denen die Gerade mn von den Projectionsstrahlen aa',

bb', cc' getroffen wird. Da die Reihe $Oaqa'$ mit $Obrb'$ in Bezug auf das Centrum m, mit $Ocsc'$ in Bezug auf das Centrum n perspectivisch liegt, so ist

$$(Oq, aa') = (Or, bb') = (Os, cc').$$

Die beiden Reihen $Obrb'$ und $Ocsc'$ haben also gleiche Doppelverhältnisse, und da sie den Punkt O gemein haben, so liegen sie ebenfalls perspectivisch. Es werden sich also bc und $b'c'$ in einem Punkte p der Geraden mn treffen, oder beide mit mn parallel sein.

Anmerkung. Der Satz gilt auch, wenn die Gerade mn durch das Centrum O gehen sollte (Fig. 105.). Denn angenommen, der Durchschnitt der Geraden bc und $b'c'$, welcher p heissen mag, läge nicht auf Om, so würde aus dem vorigen Beweise hervorgehen, dass n auf mp läge. Also könnte mn dann ebenfalls nicht durch O gehen.

§. 187. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Zwei axial liegende Dreiecke liegen auch allemal perspectivisch.

Beweis. Denn insofern man den Durchschnitt m der Geraden ab und $a'b'$ (Fig. 103.) als Projectionscentrum ansieht, hat man zwei perspectivisch liegende Dreiecke pbb' und naa'. Demnach müssen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seitenpaare, d. h. O, c und c', in gerader Linie liegen.

Dasselbe würde Statt finden, wenn bc und $b'c'$ der Geraden mn parallel wären, wo man dann zwei Dreiecke in Parallelperspective haben würde, mbb' und ncc'.

§. 188. *Lehrsatz.* Zwei beliebige Vierecke, die nicht affin (also auch nicht ähnlich oder congruent) sind, können immer als conforme Figuren angesehen werden.

Beweis. Es seien $abcd$ und $a'b'c'd'$ (Fig. 106. und 106. a.) die beiden gegebenen Vierecke, f der Durchschnitt der Geraden ab und cd, f' derjenige von $a'b'$ mit $c'd'$.

Man bestimme die Gegenpunkte der beiden Reihen afb und $a'f'b'$, und ebenso diejenigen von cfd und $c'f'd'$. Sind dieselben der Reihe nach m, p, n und q; so hat man also:

1) $$fm . f'p = am . a'p = bm . b'p,$$

2) $$fn . f'q = cn . c'q = dn . d'q.$$

Die Geraden mn und pq sind, wie sich später zeigen wird, die Gegenaxen beider Systeme.

Man construire über mn das $\Delta mnO \backsim \Delta pqf'$ und über pq $\Delta pqO' \backsim \Delta mnf$, so dass $Omfn$, und $f'pO'q$ ähnliche Systeme werden.

Jetzt ziehe man $p'q'$ parallel mn, so dass $p'q'$ denselben Abstand von O hat, wie pq von O, nehme den Punkt O zum Conformitätscentrum und die Axe XY so, dass mn und $p'q'$ zu Gegenaxen werden können, zu welchem Ende erforderlich ist, dass mn und $p'q'$ symmetrisch gegen O und XY liegen. Construirt man hiernach ein mit $abcdf$ conform liegendes System $\alpha\beta\gamma\delta\varphi$, so behaupte ich, dass dieses dem gegebenen System $a'b'c'd'f'$ congruent werden wird.

Es seien p' und q' die Gegenpunkte von $\alpha\varphi$ und $\gamma\varphi$. Dann ist

$$af \parallel Op', \quad cf \parallel Oq';$$

mithin

$$\Delta\, Op'q' \backsim \Delta fmn \backsim \Delta\, O'pq.$$

Nun aber haben die beiden ähnlichen Dreiecke $Op'q'$ und $O'pq$ der Construction gemäss gleiche Höhe, folglich sind sie congruent und

$$pq = p'q'.$$

Ebenso zeigt sich

$$\Delta\varphi p'q' \backsim \Delta\, Omn \backsim \Delta f'pq;$$

mithin ist wegen der Gleichheit der Seiten pq und $p'q'$

$$\Delta\,\varphi p'q' \cong \Delta f'pq.$$

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen übrig, dass beim Aufeinanderlegen der Dreiecke $pf'q$ und $p'\varphi q'$ auch a' mit α, b' mit β u. s. w. zusammenfallen muss. Man hat aber der Construction gemäss

1) $$am \,.\, a'p = fm \,.\, f'p$$

und nach der Eigenthümlichkeit conformer Systeme auch

2) $$am \,.\, \alpha p' = fm \,.\, \varphi p';$$

folglich ist auch

$$a'p = \alpha p'$$

u. s. w.

Anmerkung. Sollten in den beiden gegebenen Vierecken (Fig. 107. u. Fig. 107. a.) zwei auf einander als entsprechend bezogene Punktreihen, etwa cfd und $c'f'd'$, proportional sein, so findet man die Gegenaxen auf folgende Weise:

Man bestimmt die Gegenpunkte der Reihen afb und $a'f'b'$, sie seien m und p. Darauf zieht man durch m und p Parallellinien mit cd und $c'd'$, und verlängert ac und $a'c'$, bis sie diese Parallelen in n und q treffen. Alsdann verhält sich:

1) $$a'q : c'q = a'p : f'p,$$

2) $$an : cn = am : fm;$$

folglich auch

$$a'q . an : c'q . cn = a'p . am : f'p . fm.$$

Nun ist der Construction gemäss

$$a'p . am = f'p . fm,$$

also auch

$$a'q . an = c'q . cn.$$

Verfährt man nun wie vorhin, so wird man ein mit $acfb$ conform liegendes System erhalten $\alpha\gamma\varphi\beta$, welches dem System $a'c'f'b'$ congruent ist. Weil nun aber $\gamma\varphi$ parallel mit cf wird und, wofern δ dem Punkt d entspricht, die Reihe $\gamma\varphi\delta$ proportional mit cfd wird, so sieht man, dass beim Aufeinanderlegen der Systeme $a'c'f'b'$ und $\alpha\gamma\varphi\beta$ auch d' mit δ zusammenfällt.

Sollten endlich (Fig. 108. u. Fig. 108. a.) zwei Vierecke $abcd$ und $a'b'c'd'$ gegeben sein, in denen die beiden sich in f schneidenden Geraden ab und cd den beiden Parallelen $a'b'$ und $c'd'$ entsprechen sollen; so ist f als Gegenpunkt der Geraden ab und cd anzusehen. Danach lassen sich die Gegenpunkte p und q der Geraden $a'b'$ und $c'd'$ bestimmen. Schneidet nun die Gerade $a'd'$ (oder, wenn diese nicht, eine andere Gerade desselben Systems) die Gerade pq in r, so wird r als Gegenpunkt von $a'd'$ zu betrachten sein, und man kann nun auch den Gegenpunkt m von ad finden. Das Centrum O bestimmt sich dann, indem man über fm ein dem Dreieck $qd'r$ ähnliches Dreieck errichtet.

Verfährt man nun wie früher, so wird sich zeigen, dass, sowie γ in c', α in a' fällt, auch $\alpha\beta$ in $a'b'$ fallen muss. Denn da sich ab und cd auf der Gegenaxe schneiden, so werden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ parallel sein, wie $a'b'$ und $c'd'$ parallel sind u. s. f.

Mit den drei betrachteten Fällen sind aber alle möglichen Fälle erschöpft, da der Voraussetzung gemäss die beiden gegebenen Vierecke nicht affin sein sollen.

Man sieht übrigens, dass es nicht möglich ist, zwei affine Vierecke in Conformitätslage zu bringen. Demnach sind Confor-

mität und Affinität absolute Gegensätze, während die Affinität als besondere Fälle auch die Aehnlichkeit und Congruenz in sich fasst.

§. 189. *Bemerkung.* Verbindet man in einem Fünfeck $abcde$ (Fig. 109.) zwei Punkte a und b unter sich und mit den übrigen Punkten, so werden a und b die Mittelpunkte zweier Strahlenbüschel von je vier Strahlen. Durch diese beiden Büschel aber ist, wofern vier Punkte $abcd$ gegeben sind, allemal der fünfte Punkt e bestimmt. Denn sind die Strahlenwinkel eab und eba bekannt, so ist auch das Dreieck abe bestimmt.

Zwei Fünfecke $abcde$ und $a'b'c'd'e'$ (Fig. 109. u. Fig. 109. a.) sind offenbar congruent, ähnlich oder blos affin, wenn die Vierecke $abcd$ und $a'b'c'd'$ congruent, ähnlich oder affin sind und der fünfte Punkt e des einen durch zwei Strahlenbüschel bestimmt ist, welche den entsprechenden Büscheln des andern System beziehungsweise conform sind.

Zuerst lässt sich nämlich ein dem Viereck $a'b'c'd'$ congruentes System $\alpha\beta\gamma\delta$ construiren, und dieses sodann zu einem dem Fünfeck $abcde$ affinen (ähnlichen oder congruenten) System $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ergänzen. Verbindet man sodann auch α und β unter sich und mit den übrigen Punkten desselben Systems, so sind e und ε durch paarweise conforme Strahlenbüschel bestimmt, mithin auch e' und ε. Legt man nun die beiden Fünfecke $a'b'c'd'e'$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ so zusammen, dass die vier Punkte $\alpha\beta\gamma\delta$ in $a'b'c'd'$ fallen, so wird auch ε in e fallen, da durch drei Strahlen und ein gegebenes Doppelverhältniss allemal der vierte Strahl bestimmt ist.

§. 190. *Lehrsatz.* Zwei Fünfecke $abcde$ und $a'b'c'd'e'$ sind conform, wofern unter der Voraussetzung, dass nicht vier Punkte des einen ein Viereck bilden, welches dem entsprechenden Viereck des andern Systems affin ist, die fünften Punkte beider Systeme durch paarweise conforme Strahlenbüschel bestimmt sind.

Beweis. Zuerst lässt sich ein dem Viereck $a'b'c'd'$ congruentes Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ construiren, welches in Conformitätslage ist mit dem Viereck $abcd$. Zu dem Punkte e lässt sich sodann ein entsprechender Punkt ε finden, und es ist leicht einzusehen, dass das Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ dem Fünfeck $a'b'c'd'e'$ congruent werden wird.

Hat man zweimal fünf Gerade, von denen niemals drei zusammengehörige durch einen Punkt gehen oder einander parallel sind, so entsteht auf jeder Geraden eines dieser Systeme durch die Durchschneidung mit den andern eine Punktreihe. Es ist nicht schwer einzusehen, dass die beiden Systeme conform sein werden, sobald sich in denselben zwei Paare conformer Punktreihen entsprechen.

Anmerkung. Fünf Punkte *abcde* (Fig. 110.), von denen vier ein Viereck *abcd* bilden, der fünfte *e* aber mit zweien andern *a* und *b* in gerader Linie liegt, kann man ein abgestumpftes Fünfeck nennen.

Ein abgestumpftes Fünfeck ist einem andern conform, wenn den drei Punkten, die in gerader Linie liegen, wieder drei Punkte auf einer Geraden entsprechen und überdies zwei conforme Büschel entstehen, sobald man zwei als entsprechend gesetzte Punkte von den übrigen, etwa *b* und *b'*, mit den Punkten ihres Systems verbindet.

Ebenso ist ein System von fünf Geraden, von denen aber drei durch denselben Punkt gehen, einem auf dieselbe Weise zusammengesetzten System conform, wenn auf zweien entsprechenden von den übrigen Geraden sich conforme Punktreihen befinden.

§. 190. a. *Lehrsatz.* Zwei beliebige Figuren sind conform, wenn der fünfte, sechste und jeder folgende Punkt des einen Systems in Bezug auf die vier ersten ein Viereck bildenden Punkte durch ein Fünfeck bestimmt ist, welches dem entsprechenden Fünfeck des andern Systems conform ist.

Zusammenfassung der Conformität und Affinität unter den allgemeineren Begriff der homographischen Verwandtschaft.

§. 191. *Erklärung.* Man kann die Conformität und Affinität (Aehnlichkeit und Congruenz) unter den gemeinsamen Begriff der homographischen Verwandtschaft zusammen fassen.

Hiernach sind also zwei Punktreihen oder Strahlenbüschel homographisch, wenn in beiden der vierte, fünfte und jeder folgende Punkt oder Strahl durch ein Doppelverhältniss von demselben Werthe bestimmt ist.

Ob zwei Strahlenbüschel von je vier Strahlen homographisch seien, wird man am bequemsten ausmachen, indem man zu zweien als entsprechend gesetzten Strahlen Parallelen zieht und sodann prüft, ob auf beiden Transversalen durch die übrigen Strahlen proportionale Punktreihen gebildet werden. Denn sind *d* und *d'* die unendlich entfernten Durchschnittspunkte mit den vierten Strahlen, so ist *)

*) Die Figur wird sich Jeder leicht selbst entwerfen. G.

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a'd'}{b'd'} = 1,$$

mithin

$$\frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin AD}{\sin BD} = \frac{ac}{bc},$$

$$\frac{\sin A'C'}{\sin B'C'} : \frac{\sin A'D'}{\sin B'D'} = \frac{a'c'}{b'c'}.$$

Zwei homographische Punktreihen oder Strahlenbüschel fallen ganz zusammen, sobald sie drei Punkte entsprechend gemein haben.

Zwei Fünfecke sind homographisch, wenn sie durch paarweise homographische Büschel bestimmt sind u. s. f.

Zwei homographische Figuren fallen in allen ihren Punkten zusammen, sobald sie vier Punkte, die ein Viereck bilden, entsprechend gemein haben.

Zusatz. Sind zwei Systeme einem dritten homographisch, so sind sie es unter sich.

§. 192. *Lehrsätze.* 1) Zwei homographische Systeme liegen axial, so bald sie perspectivisch liegen. (Fig. 103.)

Beweis. Betrachtet man zwei beliebige einander entsprechende Dreiecke abc und $a'b'c'$, so zeigt sich, dass sie axial liegen müssen, weil sie in perspectivischer Lage sind. Da sich nun aber je drei Paare entsprechender Richtungen auf derselben Geraden begegnen, so folgt, dass sich alle auf derselben Axe treffen.

2) Zwei homographische Systeme liegen perspectivisch, sobald sie axial liegen.

Beweis. Die drei Geraden aa', bb', cc' treffen sich wegen axialer Lage der Dreiecke abc und $a'b'c'$ in einem Punkt O. Da dies nun bei je drei Linien der Fall sein wird, welche entsprechende Punkte verbinden, so folgt, dass alle diese Linien durch einen und denselben Punkt gehen.

§. 193. *Zusätze.* 1) Zwei homographische Systeme liegen perspectivisch, wenn sie drei Gerade entsprechend gemein haben, die in einen und denselben Punkt zusammenlaufen. (Fig. 103.)

Beweis. Es seien aa', bb', cc' drei Gerade, die sich im Punkt O begegnen. Sollen nun aber Oa, Ob, Oc der Reihe nach den Geraden Oa', Ob', Oc' entsprechen, so kann dies nur dann der Fall sein, wenn O ein sich selbst entsprechender Punkt beider Systeme ist. Verbindet man also O etwa mit d und d', so sind Od und Od' entsprechende Gerade; folglich

$$O, abcd \quad \text{und} \quad O, a'b'c'd'$$

zwei entsprechende und somit homographische Büschel. Weil nun aber drei Paare entsprechender Strahlen beider Büschel zusammenfallen, so folgt, dass auch die vierten Strahlen Od und Od' zusammenfallen.

2) Zwei homographische Systeme liegen axial, sobald sie drei Punkte auf einer Geraden entsprechend gemein haben. (Fig. 103.)

Beweis. Es seien r, s und q drei sich selbst entsprechende Punkte in beiden Systemen. Dem Punkte m, in dem sich die Geraden rs und ab begegnen, entspricht offenbar ein Punkt m', in welchem sich rs und $a'b'$ treffen. Da nun aber

$$rsqm \quad \text{und} \quad rsqm'$$

homographische Punktreihen werden, welche drei Paare von Punkten entsprechend gemein haben, so wird auch m' mit m zusammenfallen, und es werden sich ab und $a'b'$ auf der Geraden rs begegnen.

3) Ausser dem Centrum und der Axe können zwei homographische Systeme in perspectivisch-axialer Lage keinen Punkt als sich selbst entsprechend gemein haben. Denn alsdann hätten sie ein Viereck entsprechend gemein und müssten daher ganz zusammenfallen.

Anmerkung. Man könnte die Axe, auf welcher je zwei entsprechende Strahlen homographischer Figuren bei gehöriger Lage derselben convergiren, passend die Convergenzaxe derselben nennen, welcher Name dann ganz dem Ausdruck „Projectionscentrum" correspondiren würde. Uebrigens mag bemerkt sein, dass sich in deutschen Schriften statt der Bezeichnung „homographische Verwandtschaft" gewöhnlich die Benennung „Collineation" findet. Für die in dieser Schrift durchgeführte Grundansicht scheint aber dieser Name nicht so passend zu sein wie der obige, den Chasles in seiner Géométrie supérieure anwendet. Das Wort „conform" ist zuerst von Paulus in seinen Grundlinien der neuern Geometrie gebraucht, aber hier nur von Punktreihen. Was hier Conformitätslage genannt wird, heisst bei diesem perspectivische Collineation. Endlich benennt derselbe dasjenige, was hier durch „conform" schlechthin bezeichnet wird, mit dem Ausdruck „perspectivisch collinear." Mir scheint aber, als ob die Ausdrücke „conform" und „conform liegend" in aller Schärfe diesen Unterschied hervorheben. Conform heissen zwei Figuren, die vermöge der Uebereinstimmung ihres innern Baues zu einander in perspectivisch-axiale Lage gebracht werden können, abgesehen davon, in welcher Lage sie sich wirklich befinden. Con-

form liegend heissen dieselben aber, wenn sie sich wirklich in der bezeichneten Lage befinden. Noch deutlicher liesse sich dies hervorheben, wenn man unterschiede: „conform der Structur nach" und „conform der Lage nach."

Anhang.

I) Von der perspectivischen Lage ebener Figuren im Raume.

§. 194. *Erklärung.* Man sagt, zwei verwandte ebene Figuren seien in räumlich perspectivischer Lage, wenn sämmtliche Linien, die entsprechende Punkte verbinden, entweder alle einander parallel sind oder sich in einem und demselben Punkte schneiden, ohne dass beide Figuren in einer Ebene liegen. Das Projectionscentrum pflegt hier auch der Augenpunkt genannt zu werden.

§. 195. *Erklärung.* Durchschneidet man ein Prisma durch zwei einander parallele Ebenen, die von den Seitenkanten des Prismas einerseits in a, b, c, d...., andererseits in a', b', c', d'.... geschnitten werden, so hat man zwei Systeme $abcd$.... und $a'b'c'd'$.... in räumlich parallelogrammatischer Lage. Es ist bekannt, dass zwei auf diese Art erhaltene Figuren immer congruent sind.

§. 196. *Erklärung.* Durchschneidet man eine Pyramide durch zwei einander parallele Ebenen, so hat man zwei Figuren in räumlicher Aehnlichkeitslage. Dieselben sind bekanntlich immer einander ähnlich.

§. 197. *Erklärung.* Wird ein Prisma durch zwei nicht parallele Ebenen durchschnitten, so entstehen zwei Figuren in räumlicher Affinitätslage. Die Linie XY, in der sich die beiden Ebenen durchschneiden, heisst die Affinitätsaxe.

§. 198. *Erklärung.* Wird eine Pyramide durch zwei einander nicht parallele Ebenen durchschnitten, so erhält man zwei Figuren in räumlicher Conformitätslage. Die Gerade XY, in der sich die beiden Durchschnittsebenen durchschneiden, nennt man die Conformitätsaxe. Die Gegenaxe einer jeden von den beiden Durchschnittsebenen wird erhalten (Fig. 112.), indem man durch die Spitze O der Pyramide eine Ebene OUV legt, welche der andern Durchschnittsebene MN parallel ist, und sodann die Durchschnittslinie dieser Parallelebene mit der ersten Ebene sucht.

§. 199. *Lehrsatz.* **In zwei Figuren, die sich in räumlicher Affinitätslage oder in räumlicher Conformitätslage befinden, schneiden sich je zwei entsprechende Gerade auf der Affinitätsaxe, bezüglich der Conformitätsaxe. (Fig. 111.)**

Beweis. Da die Linien aa' und bb' einander parallel sind, oder sich einander schneiden; so lässt sich durch dieselben eine Ebene legen.

Da nun ferner die Durchschnittslinien dreier Ebenen entweder durch einen und denselben Punkt gehen, oder sämmtlich einander parallel sind; so werden sich die Geraden ab und $a'b'$ entweder auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen MN und PQ auf XY begegnen, oder ihr beide parallel sein.

§. 200. *Lehrsatz.* **Zwei Dreiecke in verschiedenen Ebenen, welche in Bezug auf die Durchschnittslinie beider Ebenen axial liegen, liegen auch allemal perspectivisch.**

Beweis. Da sich die beiden Geraden ab und $a'b'$ (Fig. 111.) im Punkte m der Durchschnittslinie XY begegnen, so lässt sich durch dieselben eine Ebene legen. Ebenso lässt sich durch ac und $a'c'$ und drittens auch durch bc und $b'c'$ eine Ebene legen. Die Durchschnittslinien dieser drei Ebenen werden die Linien aa', bb' und cc' sein.

Nun aber sind die Durchschnittslinien dreier Ebenen entweder alle einander parallel, oder sie laufen in denselben Punkt zusammen; folglich liegen die beiden Dreiecke abc und $a'b'c'$ perspectivisch.

§. 201. *Lehrsatz.* **Sind zwei ebene Figuren in räumlicher Conformitätslage gegeben, so ist jede Gerade in einer dieser Figuren dem Projectionsstrahl parallel, der durch den Gegenpunkt der entsprechenden Geraden geht.**

Beweis. Es sei O (Fig. 112.) das Projectionscentrum, XY die Gerade, in der sich die Ebenen MN und PQ der beiden gegebenen Figuren einander schneiden; UV sei die Gegenaxe von PQ, also die Ebene OUV parallel der Ebene MN.

Werden die beiden entsprechenden Punkte a und a' mit einem Punkt m der Conformitätsaxe XY verbunden, so sind am und $a'm$ entsprechende Gerade, und wenn $a'm$ die Gerade UV in r durchschneidet, so ist r der Gegenpunkt von $a'm$. Legt man nun durch die fünf Punkte $Oaa'mr$ eine Ebene, so zeigt sich, dass Or und $a'm$ parallel sind, als Durchschnittslinien von zwei parallelen Ebenen mit einer dritten.

§. 202. *Lehrsatz.* **Zwei Figuren, die in der Ebene affin liegen, kommen in räumliche Affinitätslage, sobald man eine derselben um die Affinitätsaxe herum dreht.**

Beweis. Es seien (Fig. 111.) ab und $a'b'$ zwei entsprechende Gerade, m ihr Durchschnitt auf der Affinitätsaxe.

Da die Reihen mab und $ma'b'$ proportional sind, so bleiben dieselben in Parallelperspective, so lange sie den Punkt m gemeinschaftlich haben.

Sind die beiden Geraden ab und $a'b'$ aber der gegebenen Affinitätsaxe parallel, so werden sie es auch bleiben, wenn eine der beiden Figuren um dieselbe herumgedreht wird; also wird dann, da $ab = a'b'$ ist, die Figur $aa'b'b$ beständig ein Parallelogramm bleiben. Hieraus folgt, dass die beiden gegebenen Figuren in Parallelperspective bleiben.

Da sie nun auch bei der Drehung nach wie vor in axialer Lage bleiben, so folgt, dass sie durch dieselbe in räumliche Affinitätslage kommen.

§. 203. *Lehrsatz.* Umgekehrt: Sind zwei Figuren in räumlicher Affinitätslage gegeben, so kommen dieselben in Affinitätslage in der Ebene, wenn man eine der gegebenen Figuren um die Affinitätsaxe herumdreht, bis sie in die Ebene der andern fällt.

§. 204. *Lehrsatz.* **Zwei in der Ebene conform liegende Figuren kommen in räumliche Conformitätslage, wenn man eine von ihnen um die Conformitätsaxe dreht, und umgekehrt u. s. w.**

Beweis. Betrachtet man die beiden entsprechenden Punktreihen abe und $a'b'e'$ (Fig. 103.), deren Richtungen sich auf der Conformitätsaxe in m begegnen, so hat man

$$(ma, be) = (ma', b'e').$$

So lange nun die beiden Reihen den Punkt m gemeinschaftlich behalten, müssen sich die Geraden aa', bb', ee' in einem und demselben Punkte schneiden. Dasselbe wird der Fall sein, wenn die beiden Reihen abe und $a'b'e'$ der Conformitätsaxe parallel sein sollten. Alsdann sind nämlich diese beiden Reihen proportional und bleiben bei der Drehung beständig einander parallel.

Nimmt man ferner zwei entsprechende Dreiecke abc und $a'b'c'$, so bleiben dieselben bei der Drehung beständig in axialer Lage, und werden daher auch nicht aufhören, perspectivisch zu liegen.

Da sich nun die Verbindungslinien von je drei Paaren entsprechender Punkte in einem Punkte schneiden, so folgt, dass alle Linien, welche entsprechende Punkte verbinden, durch denselben Punkt gehen.

Anmerkung. Um bei zwei Figuren in räumlicher Conformitätslage vorher auszumitteln, in welche Punkte beider Ebenen das Projectionscentrum fallen werde, wenn dieselben zusammengelegt werden, kann man sich folgender Construction bedienen:

Man halbirt die von den Ebenen der beiden Figuren gebildeten Flächenwinkel und fällt vom Augenpunkt Lothe auf die beiden Halbirungsebenen. Jedes Loth bestimmt in den beiden Ebenen entsprechende Punkte. Es ist nun klar, dass jedesmal zwei dieser entsprechenden Punkte zusammenfallen, je nachdem man jene beiden Ebenen in der einen oder der anderen Weise zusammenfallen lässt, und eine kurze Ueberlegung wird hinreichen, um einzusehen, dass diese beiden Punkte in das Projectionscentrum fallen.

§. 205. *Erklärung.* Von zwei Figuren, die sich in perspectivischer Lage im Raume befinden, heisst jede die Projection der andern und zwar entweder die Centralprojection oder die Parallelprojection. Die Centralprojection einer Figur wird auch die Perspective derselben genannt. Die Parallelprojection wird Normalprojection genannt, wenn die Projectionsstrahlen auf der Projection senkrecht stehen. Wenn von der Projection einer Figur schlechthin die Rede ist, so ist, wofern der Zusammenhang nicht ein Anderes ergiebt, die Normalprojection darunter zu verstehen.

II) Neue Folge von Anwendungen.

§. 206. *Anmerkung.* Zwei Peripheriewinkel in einem Kreise, die über derselben Sehne stehen, sind bekanntlich entweder gleich oder Supplemente von einander.

§. 207. *Lehrsatz.* Verbindet man zwei Punkte auf der Peripherie eines Kreises A und B (Fig. 113.) unter sich und mit beliebig vielen anderen Punkten $C, D, E \ldots.$, und zieht noch durch A und B die Tangenten AX und BX; so hat man allemal zwei congruente Strahlenbüschel in nicht perspectivischer Lage, deren Centra die Punkte A und B sind.

Denn die einzelnen Winkel, deren Schenkel durch dieselben Punkte der Peripherie gehen, sind entweder, wie die beiden Winkel DAE und DBE, einander gleich, oder, wie DAC und DBC,

Supplemente von einander. Da ferner der Winkel XAC gleich ABC und der Winkel XBC gleich BAC ist, so sieht man, dass die Sehne zwischen A und B jedesmal einer Tangente entspricht, und zwar der Tangente AX, wenn sie als Strahl BA gedacht wird, dagegen der Tangente BX, sobald man sie als Strahl AB vorstellt.

Zusatz. Verbindet man einen beliebigen Punkt E einer Kreislinie mit vier festen Punkten A, B, C, D, so hat ein auf bestimmte Weise angesetztes Doppelverhältniss der vier gezogenen Strahlen einen constanten Werth, und zwar hat man:

$$\text{Sehne}\, AB = 2r \,.\, \sin AB,$$

$$\text{Sehne}\, AD = 2r \,.\, \sin AD,$$

$$\text{Sehne}\, CB = 2r \,.\, \sin CB,$$

$$\text{Sehne}\, CD = 2r \,.\, \sin CD;$$

also

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} : \frac{\sin CB}{\sin CD} = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD},$$

wo rechts unter AB, CB, u. s. w. Sehnen zu verstehen sind.

Dasselbe Verhältniss kommt den vier Strahlen zu, die man erhält, wenn man an einen der vier festen Punkte, an A, eine Tangente AX zieht und denselben Punkt mit den übrigen drei festen Punkten verbindet.

§. 208. *Lehrsatz.* Werden zwei feste Tangenten eines Kreises EX und FX (Fig. 114.) von einer dritten Tangente aa' durchschnitten, so soll diese letztere eine Transversaltangente heissen.

Jeder über einer Transversaltangente stehende Centriwinkel, wie aOa', ist entweder gleich der Hälfte desjenigen Centriwinkels, welcher über der Berührungssehne des festen Tangentenpaars steht, oder er ist das Supplement dieser Hälfte.

Beweis. Liegen die beiden Durchschnittspunkte der Transversaltangente a und a' auf der Convergenzseite der beiden festen Tangenten, so hat man, wofern A der Berührungspunkt von aa' ist:

$$\text{W}.\, aOA = \tfrac{1}{2}\text{W}.\, EOA,$$

$$\text{W}.\, a'OA = \tfrac{1}{2}\text{W}.\, FOA;$$

folglich, indem man addirt:

$$W. aOa' = \tfrac{1}{2} W. EOF.$$

Liegt die Tangente bb' so, dass sie die eine der beiden festen Tangenten EX in b auf der Convergenzseite, die andere auf der Divergenzseite durchschneidet, so hat man:

$$W. b'OB = \tfrac{1}{2} W. BOF,$$

$$W. bOB = \tfrac{1}{2} W. BOE;$$

folglich, indem man subtrahirt:

$$W. bOb' = \tfrac{1}{2} W. EOF.$$

Bei der Tangente cc' endlich, deren beide Durchschnittspunkte auf der Divergenzseite liegen, hat man:

$$W. cOC = \tfrac{1}{2} W. EOC,$$

$$W. c'OC = \tfrac{1}{2} W. FOC.$$

§. 209. *Lehrsatz.* Werden zwei feste Tangenten eines Kreises EX und FX von beliebig vielen Transversaltangenten A, B, C, D durchschnitten, so entstehen allemal zwei conforme Punktreihen.

Beweis. Zuerst ist

$$W. a'Oa = W. EOX,$$

mithin

$$W. XOa' = W. EOa.$$

Weiter ist dann

$$W. FOX = W. XOE,$$

$$W. FOb' = W. XOb.$$

Endlich hat man, wofern OC' die Verlängerung von Oc ist:

$$W. C'Oc' = W. EOX = W. FOX,$$

mithin

$$W. EOC' = W. XOc'$$

u. s. f.

Es bilden sonach die Strahlen

$$OE, Oa, OX, Ob, Oc \dots$$

einen Büschel, welcher congruent ist dem von den Strahlen

$$OX,\ Oa',\ OF,\ Ob',\ Oc'\ldots$$

gebildeten Büschel.

Man sieht hieraus, dass die beiden Punktreihen

$$EaXbc\ldots.$$

und

$$Xa'Fb'c'\ldots.$$

homographisch sind, und dass der Durchschnitt der beiden festen Tangenten X, mag man ihn der einen oder der andern zurechnen, jedesmal dem Berührungspunkte der andern Tangente entspricht.

Zusatz. Werden vier feste Tangenten eines Kreises A, B, C, E von irgend einer fünften Tangente F durchschnitten, so hat ein auf bestimmte Weise angesetztes Doppelverhältniss der vier Durchschnittspunkte einen constanten Werth.

In der That man hat:

$$2r \,.\, \sin a'Ob' = \text{Sehne}\, AB,$$

$$2r \,.\, \sin a'OX = \text{Sehne}\, AE,$$

u. s. f.,

mithin

$$\frac{\sin a'Ob'}{\sin c'Ob'} : \frac{\sin a'OX}{\sin c'OX} = \frac{AB}{CB} : \frac{AE}{CE}.$$

Fällt der Punkt F mit B zusammen, so fällt auch b' in B.

§. 210. *Lehrsatz.* Verbindet man die Punkte a, b, a', b', in denen ein Tangentenpaar eines Kreises von zwei beliebigen andern Tangenten A und B (Fig. 115.) geschnitten wird, unter einander, so schneiden sich die Verbindungslinien ab' und $a'b$ allemal auf der Berührungssehne EF.

Beweis. Denn da die beiden Punktreihen

$$PabE$$

und

$$Fa'b'P$$

homographisch sind, so hat man

$$(PE, ab) = (FP, a'b').$$

Nun aber ist

$$(FP, a'b') = (PF, b'a'),$$

also auch

$$(PF, b'a') = (PE, ab).$$

Man hat also zwei homographische Reihen:

$$PFb'a' \text{ und } PEab,$$

die den Punkt P als entsprechend gemein haben, und daher perspectivisch liegen müssen.

§. 211. *Lehrsatz.* Liegt der Durchschnitt eines Tangentenpaares Q (Fig. 115.) auf der Berührungssehne EF eines andern Paares, so sind die Berührungspunkte der vier vorhandenen Tangenten harmonische Punkte der Kreislinie.

Beweis. Die Geraden ca' und $c'a$ schneiden sich in einem Punkte D der Berührungssehne EF. Da man nun ein vollständiges Viereck hat, dessen äussere Diagonale PQ ist, so sind c, E, d, P vier harmonische Punkte. Das Doppelverhältniss dieser vier Punkte stimmt aber mit dem Verhältniss der Sehnen zwischen den Punkten A, C, E, F dem absoluten Werthe nach überein, also ist

$$\frac{EC}{FC} : \frac{EA}{FA} = 1.$$

Man wird sogleich folgern, dass auch P auf der Berührungssehne AC liegen muss. Uebrigens heissen vier Tangenten wie die jetzt betrachteten harmonische Tangenten.

§. 212. *Lehrsatz.* Verbindet man die Durchschnitte von zwei harmonischen Tangentenpaaren D und E (Fig. 116.) mit einem derjenigen Punkte, für welche die Verbindungslinie dieser Durchschnittspunkte Potenzenlinie ist, so schliessen die beiden gezogenen Linien allemal einen rechten Winkel ein.

Beweis. Wird um den Tangentendurchschnitt D ein Kreis beschrieben, der durch die Endpunkte der zugehörigen Berührungssehne FG geht, so theilt dessen Peripherie, da sie auf der gegebenen Kreislinie senkrecht steht, jeden Durchmesser dieser letztern wie KL in A und B harmonisch. Ist aber KL derjenige Durchmesser, der durch den Durchschnittspunkt der beiden Berührungssehnen FG und HJ, d. h. durch den Pol P von DE geht; so steht DE auf demselben senkrecht, und der Durchschnitt dieser beiden Geraden M ist die Mitte von AB. Hieraus folgt, dass DE die Potenzenlinie für die Punkte A und B ist, und dass also die Tangenten EH und EJ gleich EA sind. Es wird also auch ein um E mit EH beschriebener Kreis durch A und B gehen.

Nun seien Q und R die Punkte, in denen die Gerade JH von der Kreislinie um D geschnitten wird. Da der Durchmesser QR von jeder senkrechten Kreislinie harmonisch getheilt wird, so

ist $JQHR$ eine harmonische Reihe, und weil auch die Umkehrung des eben angewandten Satzes gilt, so stehen auch die Kreislinien um D und E auf einander senkrecht.

Demzufolge wird der Radius DB eine Tangente des Kreises um E sein, und also auf EB senkrecht stehen.

Zusatz. Umgekehrt: Kommt der Geraden UV die Eigenschaft der Potenzenlinie für einen Punkt B und einen gegebenen Kreis zu, so bestimmen die Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel in B fällt, auf der Geraden UV zwei Punkte D und E von der Beschaffenheit, dass die von ihnen an den Kreis gezogenen Tangenten harmonisch werden.

§. 213. *Lehrsatz.* Zwei excentrische Kreise sind allemal in Conformitätslage. Zum Centrum kann man, wofern die beiden Kreise nicht congruent sind, jeden der Aehnlichkeitspunkte nehmen. Axe ist in beiden Fällen die Potenzenlinie der Kreise. In dem erwähnten Ausnahmefalle aber rückt der äussere Aehnlichkeitspunkt in unendliche Entfernung, und die Conformitätslage geht in Affinitätslage über. (Fig. 116. a.)

Beweis. Es sei O der eine Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise, pq und $p'q'$ die Polaren, welche dem Punkt O in Bezug auf beide Kreise zukommen.

Der Kreis um c wird durch die Polare pq in zwei Bogen getheilt, die sich in perspectivisch-axialer Lage befinden in Bezug auf das Centrum O und die Axe pq. Dasselbe gilt von der Polare $p'q'$ in Bezug auf den Kreis um c'. Hiernach wird dem Punkte a der Punkt b und dem Punkte a' der Punkt b' entsprechen, indem a, b, a', b' die Durchschnittspunkte eines Aehnlichkeitsstrahles mit den beiden Kreislinien bezeichnen. Nun aber ist der Bogen paq auch mit dem Bogen $p'a'q'$ in perspectivisch-axialer Lage in Bezug auf das Centrum O und eine unendlich entfernte Axe. Da nun zwei Systeme homographisch sind, wofern sie es mit einem dritten sind, so sind auch die Bogen pbq und $p'a'q'$ homographisch und zwar so, dass sich jetzt zwei inverse Punkte wie b und a' einander entsprechen. Die beiden Systeme pbq und $p'a'q'$ liegen aber perspectivisch, folglich auch axial.

Bei dieser neuen Beziehung sind aber Tangenten an inverse Punkte offenbar entsprechende Gerade und müssen sich auf der Convergenzaxe begegnen; folglich ist diese Axe keine andere als die Potenzenlinie beider Kreise.

§. 214. *Erklärung.* Jede einem Kreise conforme Figur wird Kegelschnitt genannt.

Durchschneidet man nämlich einen Kegel mit kreisförmiger Basis durch irgend eine der Basis nicht parallele Ebene, so hat man eine Durchschnittsfigur, welche mit dem Kreise in räumlicher Conformitätslage ist. Oder ist eine mit einem Kreise in der Ebene conform liegende Figur gegeben, so kann man die beiden Figuren auch in räumliche Conformitätslage bringen, und alsdann umschliessen die Projectionsstrahlen einen Kegel mit kreisförmiger Basis. Es ergiebt sich hierbei aber folgender Unterschied.

1) Ein geschlossener Kegelschnitt ist vorhanden, wenn die Gegenaxe für das System des Kreises ganz ausserhalb desselben liegt; denn da alsdann kein Punkt der Kreislinie auf der Gegenaxe liegt, so werden alle Punkte der entsprechenden Kurve im endlichen Raume liegen.

Ein solcher Kegelschnitt entsteht, wenn man einen gemeinen Kegel so durchschneidet, dass sich zwischen dem Kegelmantel und der Durchschnittsebene ein vollständig begrenzter Raum befindet.

2) Ein Kegelschnitt mit vier unendlichen Zweigen wird gegeben sein, wofern die Gegenaxe für das System des Kreises eine Sekante dieses Kreises ist.

Um einen solchen Schnitt aus einem Kegel zu erzeugen, muss man die Seiten des gegebenen Kegels über die Spitze hinaus verlängern, und die Durchschnittsebene so legen, dass beide Theile des entstandenen Doppelkegels durchschnitten werden.

3) Einen Kegelschnitt mit zwei unendlichen Zweigen hat man in dem Falle, dass die Gegenaxe für das System des Kreises eine Tangente desselben ist.

Zieht man an die Basis eines gemeinen Kegels eine Tangente und legt durch diese und die Spitze des Kegels eine Ebene, so wird jede mit dieser Ebene parallele Durchschnittsebene einen Kegelschnitt dieser dritten Art erzeugen, die Tangente des Grundkreises ist alsdann die Gegenaxe desselben.

In einem Kegelschnitt der ersten und zweiten Art heisst Mittelpunkt derjenige Punkt, welcher dem Pol der Gegenaxe des Kreises entspricht. In einem Kegelschnitt der dritten Art soll jede Gerade ein Durchmesser heissen, welche einer durch den Berührungspunkt der Gegenaxe gehenden Kreissehne entspricht.

Die Begriffe von zugeordneten Durchmessern, zugeordneten Sehnen übertragen wir von der Ellipse, Hyperbel und Parabel

auf die Kegelschnitte überhaupt, auch ohne schon die Ueberzeugung gewonnen zu haben, dass nur diese Kurven unter den Kegelschnitten auftreten können. So verstehen wir jetzt auch unter Asymptoten diejenigen Geraden, welche im Systeme eines Kegelschnitts der zweiten Art den durch den Pol der Gegenaxe gehenden Kreistangenten entsprechen.

§. 215. Betrachtung des geschlossenen Kegelschnitts. (Fig. 116).

Wir wollen eine Gerade FG im System des Kreises, die einer Geraden $F'G'$ des Kegelschnitts entspricht, die Repräsentante von $F'G'$ nennen.

1) Zwei Durchmesser eines geschlossenen Kegelschnitts, welche die Berührungssehnen FG und HJ zweier harmonischer Tangentenpaare zu Repräsentanten haben, sind zugeordnete Durchmesser.

Die beiden Geraden FG und HJ schneiden sich im Pol P der Gegenaxe UV, die zugehörigen Tangentendurchschnitte D und E liegen also auf dieser Gegenaxe. Nun aber schneidet FG ebenfalls die Tangenten EH und EJ auf der Gegenaxe; folglich werden die entsprechenden Geraden einander parallel sein.

Jeder Durchmesser des geschlossenen Kegelschnitts wird im Mittelpunkt halbirt, da $FPGE$ vier harmonische Punkte sind, von denen der eine E auf der Gegenaxe liegt.

2) Unter den zugeordneten Durchmessern eines geschlossenen Kegelschnitts giebt es immer zwei auf einander senkrechte, welche die Axen desselben genannt werden.

Man verbinde das Projectionscentrum O (Fig. 116.) mit einem von denjenigen Punkten, für welche die Gegenaxe des Kreises Potenzenlinie ist in Beziehung auf den Kreis, etwa mit B. Errichtet man nun in der Mitte N von OB ein Loth, bis dasselbe die Gegenaxe in Z durchschneidet, beschreibt aus Z einen Kreis, der durch O und B geht, und verbindet die Punkte D und E, in denen dieser Kreis die Gegenaxe schneidet, mit dem Pol der Gegenaxe P, so hat man die beiden Geraden, denen die Axen des gegebenen Kegelschnittes entsprechen.

Denn da der Winkel EOD ein rechter ist, so fallen PD und PE in die Richtungen der Berührungssehnen von zwei harmonischen Tangentenpaaren. Da nun in zwei conform liegenden Systemen jede Gerade dem Projectionsstrahl parallel ist, welcher durch den Gegenpunkt der entsprechenden Geraden geht, so ist

von den durch FG und HJ repräsentirten Durchmessern der eine mit OD, der andere mit OE parallel.

Fällt O mit B zusammen, so stehen je zwei zugeordnete Durchmesser des gegebenen Kegelschnitts auf einander senkrecht. Dann ist derselbe, wie später einleuchten wird, ein Kreis.

Will man diese Construction im Raume ausführen, so hat man durch die Mitte von OB eine senkrechte Ebene zu legen.

3) Die Kreissehne ab, welche verlängert durch den Pol von FG durch D geht, repräsentirt eine Sehne des Kegelschnitts, welche dem durch FG repräsentirten Durchmesser zugeordnet ist. Dieselbe wird von diesem Durchmesser offenbar halbirt.

Uebrigens liegt der Pol von ab auf der Richtung von FG. Man pflegt daher die Geraden ab und FG, von denen jede durch den Pol der andern geht, selber zugeordnete Richtungen zu nennen.

Die Punkte $FGab$ sind harmonische Punkte der Kreislinie, also sind die Endpunkte eines Durchmessers und einer ihm zugeordneten Sehne allemal harmonische Punkte des gegebenen Kegelschnitts.

4) Jede einem Durchmesser zugeordnete Ordinate eines geschlossenen Kegelschnitts verhält sich zur mittlern Proportionale aus den Abschnitten dieses Durchmessers, wie der ihr parallele Durchmesser zum zugeordneten. (Fig. 118.)

Man verbinde den einen Endpunkt D des der Sehne FG parallelen Durchmessers CD mit F und G, sowie mit den Scheiteln des zugeordneten Durchmessers AB. Alsdann erhält man einen harmonischen Büschel, durch den die Sehne FG in A' und B' harmonisch getheilt wird. Ist H die Mitte von FG, so hat man

$$\overline{FH}^2 = HA'.HB'.$$

Es verhält sich aber, wofern E der Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts ist,

1) $$AH : AE = HA' : ED,$$

woraus hervorgeht:

$$HA' = \frac{ED.AH}{AE}.$$

Ferner verhält sich

$$2) \qquad HB : BE = HB' : ED,$$

also

$$HB' = \frac{ED \,.\, HB}{BE};$$

folglich erhält man:

$$\overline{FH}^2 = \frac{\overline{ED}^2}{\overline{AE}^2} \,.\, AH \,.\, HB.$$

§. 216. *Lehrsatz.* Jeder geschlossene Kegelschnitt ist eine Ellipse. (Fig. 118.)

Beweis. Es seien AB und CD diejenigen einander zugeordneten Durchmesser eines solchen Kegelschnitts, welche senkrecht auf einander stehen, CD der kleinere derselben. Beschreibt man nun aus dem Punkte C mit der Hälfte von AB einen Kreis, so wird dieser die Richtung AB in zwei Punkten K und J durchschneiden. Es ist aber einleuchtend, dass eine Ellipse, welche AB zur grossen Axe, K und J zu Brennpunkten hat, ganz mit dem gegebenen Kegelschnitt zusammenfallen muss. — Die Ellipse ist ein Kreis, wenn $AB = CD$ ist.

§. 217. Betrachtung des Kegelschnitts mit vier unendlichen Zweigen. (Fig. 115.)

1) Der Pol der Gegenaxe des Kreises P liegt hier ausserhalb desselben. Der Sehne AC, die verlängert durch P geht, entspricht ein Durchmesser, welcher zwei Punkte mit dem gegebenen Kegelschnitt gemein hat, d. h. ein reeller Durchmesser. Ist Q der Durchschnitt des Tangentenpaars, welches AC zur Berührungssehne hat, so ist derjenige Durchmesser, welcher der Geraden PQ entspricht, dem erstern zugeordnet, da den Geraden AQ, CQ, PQ, die sich auf der Gegenaxe schneiden, drei Parallelen entsprechen.

Da P, A, D, C eine harmonische Punktreihe ist, und der Punkt D auf der Gegenaxe liegt, so wird der Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts in der Mitte zwischen den beiden Punkten liegen, welche den Punkten A und C entsprechen.

Man überzeugt sich leicht, dass der gegebene Kegelschnitt

im Raume zweier Scheitelwinkel liegt, die von seinen Asymptoten gebildet werden.

In einem frühern Falle, wo wir die gleichseitige Hyperbel auf ihren Axenkreis bezogen, lag der Pol der Gegenaxe in unendlicher Entfernung.

2) Den beiden Strecken aa' und bb', welche durch die im Pol der Gegenaxe P sich schneidenden Tangenten EP und FP von zwei beliebigen Tangenten A und B abgeschnitten werden, entsprechen im gegebenen Kegelschnitt zwei Strecken, die man Substituten nennen kann. — Da sich die Geraden ab' und $a'b$ auf der Gegenaxe schneiden, so folgt, dass die entsprechenden Geraden parallel sind und dass also ein von einer Substitute zwischen den Asymptoten abgeschnittenes Dreieck einen constanten Inhalt hat.

Verlängert man die Gerade aa' bis zur Durchschneidung mit der Gegenaxe in Q, so ist $QaAa'$ eine harmonische Reihe, also wird jede Substitute durch ihren Berührungspunkt halbirt.

Hieraus folgt, dass ein Parallelogramm von constantem Inhalt entsteht, wenn man vom Berührungspunkt einer Substitute Parallellinien mit den Asymptoten zieht, da dieses Parallelogramm offenbar die Hälfte des durch die Substitute abgeschnittenen Dreiecks ist.

§. 218. *Lehrsatz.* Jeder Kegelschnitt mit vier unendlichen Zweigen ist eine Hyperbel. (Fig. 119.)

Beweis. Es seien AM und AN die Asymptoten des gegebenen Kegelschnitts, BC derjenige reelle Durchmesser desselben, welcher den Winkel MAN halbirt. Trägt man nun die Entfernung AC auf AM ab bis D, errichtet in D ein Loth DE bis zur Durchschneidung mit der Richtung AB, und construirt eine Hyperbel, welche BC zur Axe, den Punkt E zu einem ihrer Brennpunkte hat; so ist leicht zu zeigen, dass diese Hyperbel in allen Punkten mit dem gegebenen Kegelschnitt zusammenfallen wird.

Denn man überzeugt sich leicht, dass die Asymptoten der construirten Hyperbel in AM und AN fallen, und das Weitere folgt dann aus der letzten Bemerkung des vorigen Paragraphen.

§. 219. **Betrachtung des Kegelschnitts mit zwei unendlichen Zweigen.** Hier entspricht einer Kreissehne PA, welche durch den Berührungspunkt P der Gegenaxe UV geht

(Fig. 117.), ein Durchmesser, ferner der Sehne CD, welche die durch A gezogene Tangente auf der Gegenaxe in B durchschneidet, eine diesem Durchmesser zugeordnete Sehne. Indem man nun ganz den Weg verfolgt, den wir bei der Betrachtung der Parabel angewendet haben, wird man sich überzeugen, dass allemal ein harmonischer Büschel entsteht, sobald man irgend einen Punkt des gegebenen Kegelschnitts mit dem Scheitel eines Durchmessers und den Endpunkten einer ihm zugeordneten Sehne verbindet, und noch von demselben Punkte eine Parallele mit dem Durchmesser zieht.

Denkt man sich den Punkt B so bestimmt, dass zuerst das Projectionscentrum O mit dem Berührungspunkte P der Gegenaxe verbunden und sodann OB senkrecht auf OP errichtet wurde, so ist der Durchmesser, welcher der Sehne PA entspricht, parallel dem Projectionsstrahl OP, und die Tangente, welche der Tangente AB entspricht, parallel dem Projectionsstrahl PB; man kann also schliessen, dass es in jedem Kegelschnitt dieser dritten Art einen Durchmesser giebt, welcher senkrecht auf den ihm zugeordneten Sehnen steht.

§. 220. *Lehrsatz.* Jeder Kegelschnitt mit zwei unendlichen Zweigen ist eine Parabel.

Beweis. Es sei (Fig. 120.) AG die Richtung eines Durchmessers in einem solchen Kegelschnitt, welcher auf den ihm zugeordneten Sehnen BC und DE senkrecht steht. Verbindet man E mit A, B und C, und zieht EH parallel AG, so erhält man einen harmonischen Büschel und durch diesen auf der Richtung BC vier harmonische Punkte B, H, C, J. Der Durchmesser AG halbirt die Sehnen BC und DE, wie leicht zu erweisen ist, in F und G; also hat man zunächst:

$$FH:FC = FC:FJ,$$

sodann:

$$GE:GA = FJ:FA.$$

Setzt man zusammen, so kommt:

$$FH.GE:FC.GA = FC:FA,$$

woraus hervorgeht:

$$\frac{FC^2}{FA} = \frac{GE^2}{GA}.$$

Bestimmt man also die Länge p gemäss der Gleichung

$$p = \frac{\overline{GE}^2}{AG},$$

und construirt eine Parabel, deren Scheitel in A, deren Axe in die Richtung AG fällt und deren Parameter gleich p ist, so wird diese Parabel in allen Punkten mit dem gegebenen Kegelschnitte zusammenfallen.

§. 221. *Lehrsatz.* Jede einem Kreise (also auch jede einer Ellipse) affine Figur ist eine Ellipse.

Beweis. Der Beweis für die Eigenschaft der Ellipse, nach welcher jede Ordinate zur mittlern Proportionale aus den Abschnitten des zugeordneten Durchmessers in einem constanten Verhältniss steht, stützte sich auf ihre Affinität mit dem Kreise und gilt offenbar für jede dem Kreise affine Figur.

In einer solchen werden zugeordnete Durchmesser solche sein, die zweien auf einander senkrechten Kreisdurchmessern entsprechen. Lässt sich nun beweisen, dass unter den zugeordneten Durchmessern der gegebenen Figur wenigstens zwei auf einander senkrechte existiren, so wird dieselbe nichts Anderes als eine Ellipse sein können. Dies leistet aber der folgende Satz:

In zwei affinen Figuren lassen sich immer zwei Paare entsprechender Richtungen so bestimmen, dass diejenigen, welche einem und demselben Systeme angehören, auf einander senkrecht stehen. (Fig. 121.)

Es seien A und A' zwei entsprechende Punkte in affin liegenden Systemen, XY die Affinitätsaxe. Von dem Punkte P, in welchem ein in der Mitte von AA' errichtetes Loth die Axe schneidet, beschreibe man einen Kreis. Trifft er die Affinitätsaxe in M und N, so stellen die Geraden AM, $A'M$, AN und $A'N$ die Wahrheit der aufgestellten Behauptung vor Augen. Im Fall, dass das errichtete Loth mit XY parallel sein sollte, fallen zwei der in Rede stehenden Richtungen in den Affinitätsstrahl AA'.

Wird ein Cylinder mit kreisförmiger Basis durch eine der Basis nicht parallele Ebene durchschnitten, so ist die Durchschnittsfigur mit dem Grundkreise in räumlicher Affinitätslage. Dieselbe wird also eine Ellipse sein, und um ihre Axen auszumitteln, kann man sich einer der vorhin angegebenen ähnlichen Construction bedienen.

Bei einem schiefen Cylinder mit kreisförmiger Basis erhält man auch noch in einer andern Richtung als der des Grundkreises als Durchschnittsfigur einen Kreis, nämlich wenn eine von der Affinitätsaxe aus senkrecht durch die Axe des Cylinders gelegte Ebene den Winkel zwischen der Ebene des Grundkreises und der Durchschnittsebene halbirt.

Zusatz. Aus dem voranstehenden Lehrsatze folgt, dass jede der Gleichungen

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

und

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

allemal eine Ellipse bestimmt, mag die Richtung der Ordinaten gegen die Abscissen sein, welche sie will.

Denn eine so bestimmte Kurve wird dem Kreise affin sein.

Anmerkung. Es lässt sich zeigen, dass auch ein schiefer Kegel mit kreisförmiger Basis noch in einer andern Richtung als der des Grundkreises als Durchschnittsfigur einen Kreis giebt. Wir lassen uns aber aus Mangel an Raum nicht auf diese Untersuchung ein.

§. 222. *Lehrsatz.* Jede einer Hyperbel affine Figur ist eine Hyperbel, und jede einer Parabel affine Figur eine Parabel.

Beweis. Eine der Hyperbel affine Figur hat vier unendliche Zweige und ist mit dem Kreise homographisch. Die einzige homographische Beziehung, die aber zwischen ihr und dem Kreise Statt finden kann, ist die Conformität; folglich ist die gegebene Figur eine Hyperbel, u. s. f.

Jede der Gleichungen

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

$$uv = p^2$$

bestimmt also unter allen Umständen eine Hyperbel, die Gleichung

$$y^2 = px$$

eine Parabel.

Anmerkung. Die Sätze von der Aehnlichkeit und Congruenz der Kegelschnitte übergehen wir.

§. 223. *Lehrsatz.* Die Ellipse ist mit jedem ihrer Leitkreise in Conformitätslage: Centrum ist jedesmal der Mittelpunkt dieses Kreises, Axe aber diejenige Gerade, welcher die Eigenschaft der Potenzenlinie für den Leitpunkt in Rücksicht auf den Leitkreis zukommt. (Fig. 122.)

Beweis. Erstens. Eine Tangente der Ellipse und eine Tangente des Leitkreises, deren Berührungspunkte auf demselben Radius liegen, begegnen sich auf der Potenzenlinie des Leitpunkts A.

Denn da die Tangente $B'F$ der Ellipse senkrecht durch die Mitte von AB geht, so ist $AF = BF$, folglich F ein Punkt der Potenzenlinie des Punktes A.

Um die Potenzenlinie vollends zu bestimmen, wird man durch ein zweites Paar von Punkten, C' und C, die in derselben Beziehung stehen wie B' und B, Tangenten ziehen und ihren Durchschnittspunkt G nehmen.

Zweitens. Das von Kreistangenten und ihrer Berührungssehne gebildete Dreieck BCH liegt perspectivisch mit dem Dreiecke $B'C'H'$, welches zwei Tangenten der Ellipse zu Seiten hat. (Fig. 122.) Die Gerade OH, welche den Mittelpunkt O des Leitkreises mit dem Tangentendurchschnitt H verbindet, geht senkrecht durch die Mitte von BC. Desgleichen werden die Strecken AB und AC durch $B'H'$ und $C'H'$ lothrecht halbirt; folglich wird H' auf der Geraden OH liegen, da die drei Geraden, welche senkrecht durch die Halbirungspunkte der Seiten eines Dreiecks ABC gehen, sich in einem und demselben Punkte schneiden müssen. Weil nun aber die beiden Dreiecke BCH und $B'C'H'$ perspectivisch liegen, so liegen sie auch axial; folglich treffen sich BC und $B'C'$ auf der Geraden FG, d. h. auf der Potenzenlinie des Punktes A.

Zusatz. Die Gerade FG ist die Polare des Punktes A in Bezug auf die Ellipse.

Denn, wie leicht einzusehen, ist

$$\text{W. } B'AF = \text{W. } C'AF = R.$$

Geht also die Berührungssehne $B'C'$ durch A oder, was dasselbe sagt, fallen AB' und AC' in eine Gerade, so fallen AF und AG zusammen; folglich schneiden sich dann die Tangenten $B'D$ und $C'E$ auf der Potenzenlinie XY.

§. 224. *Lehrsatz.* Das von irgend einem Punkte einer Ellipse auf die Polare XY eines Brennpunkts gefällte Loth steht zu dem nach demselben Brennpunkte gezogenen Leitstrahl in einem constanten Verhältniss. (Fig. 122. a.)

Beweis. Zieht man $C'K$ parallel OB, so ist $C'K = C'C = C'A$. Nun verhält sich

$$C'K : B'B = JC' : JB'$$

oder

$$AC' : AB' = JC' : JB',$$

indem J den Durchschnitt der Geraden BC und $B'C'$ bezeichnet. Fällt man nun von B' und C' die Lothe $B'L$ und $C'M$ auf XY, so hat man auch:

$$C'M : B'L = JC' : JB';$$

folglich verhält sich

$$C'M : B'L = AC' : AB',$$

oder auch

$$C'M : AC' = B'L : AB'.$$

Anmerkung. Man sieht sogleich, dass $B'L$ grösser ist als AB'. Denn beschreibt man aus B' einen Kreis mit $B'A$, so berührt dieser den Leitkreis um O im Punkte B von innen; also wird dieser zweite Kreis um B' auch das Loth $B'L$ innerhalb des Kreises um O durchschneiden.

§. 225. *Lehrsatz.* Auch die Hyperbel ist mit jedem ihrer Leitkreise in Conformitätslage. Centrum und Axe wie bei der Ellipse.

Beweis. Es bedarf nur einer Betrachtung von Figur 123. Der Leitpunkt A_1 liegt hier ausserhalb des Leitkreises um O. Sind OB und OC zwei Radien des Leitkreises, so bestimmen sich die Punkte B_1 und C_1 der Hyperbel, welche auf deren Verlängerung liegen, indem man in den Halbirungspunkten von A_1B und A_1C in D und E Lothe errichtet u. s. f.

Ferner seien (Fig. 122. a.) von zwei Punkten einer Hyperbel B_1 und C_1 die Lothe B_1L_1 und C_1M_1 auf die Polare XY des Leit-

punkts A_1 gefällt, J sei der Punkt, in welchem B_1C_1 der entsprechenden Geraden begegnet, C_1K_1 parallel OB. Alsdann ist wieder das Dreieck $CC_1K \sim \triangle OBC$, also gleichschenklig, und es verhält sich

$$JC_1 : JB_1 = C_1K_1 : B_1B,$$

$$JC_1 : JB_1 = B_1L_1 : C_1M_1.$$

Zusatz. Die Ellipse und Hyperbel sind in Conformitätslage mit jedem Kreise, der einen ihrer Brennpunkte zum Mittelpunkte hat.

Beweis. Construirt man denjenigen Leitkreis, welcher denselben Brennpunkt zum Mittelpunkte hat, so hat man drei Systeme, von denen zwei mit dem dritten in perspectivisch axialer Lage sind: erstens der gegebene Kreis ist mit dem Leitkreise in Aehnlichkeitslage, und zwar ist der Aehnlichkeitspunkt der gemeinsame Mittelpunkt beider Kreise; zweitens der gegebene Kegelschnitt ist mit dem Leitkreise in Conformitätslage in Bezug auf dasselbe Centrum. Demnach bilden auch der gegebene Kreis und der gegebene Kegelschnitt zwei homographische Systeme, wenn man diejenigen Punkte als entsprechend auf einander bezieht, die einem und demselben Punkte des Leitkreises entsprechen. Da nun aber diese beiden letztern Systeme ebenfalls perspectivisch liegen, so liegen sie auch axial, und sind daher, wie eine kurze Ueberlegung zeigt, in Conformitätslage.

§. 226. *Lehrsatz.* Die Parabel ist mit jedem Kreise in Conformitätslage, der ihren Brennpunkt zum Mittelpunkte hat.

Beweis. Wir haben nur nöthig, zu beweisen, dass die Parabel mit irgend einem Kreise, der ihren Brennpunkt F zum Mittelpunkte hat (Fig. 117.), in Conformitätslage sei.

Es sei JK die Leitlinie der Parabel, UV die durch ihren Scheitel P gehende Tangente, $A'F$ ein innerer, $A'M$ ein äusserer Leitstrahl, also $A'F = A'M$. Wird nun der erste dieser Leitstrahlen von einem Kreise, der die Strecke PF zum Radius hat, in A, der andere von der Scheiteltangente in L durchschnitten, so ist $AA' = A'L$. Zieht man sodann in A eine Tangente an den Kreis bis zur Durchschneidung mit der Scheiteltangente in B, so ist BA' die Halbirungslinie des Winkels LBA, BF diejenige des Winkels PBA; mithin sind BA, BA', BF, BP vier harmonische Strahlen, und, wofern N den Durchschnitt der Richtungen UV und AF bezeichnet,

$$(NA, FA') = -1,$$

$$(NF, AA') + (NA, FA') = 1;$$

also

$$(NF, AA') = 2.$$

Die Strecke NF wird also von den beiden Punkten A und A' nach einem Doppelverhältniss von constantem Werthe $= 2$ getheilt; folglich hat man zwei Systeme in perspectivisch-axialer Lage, für welche F das Centrum und UV die Convergenzaxe ist. Die Gegenaxe RS für das System des Kreises ist diejenige Tangente desselben, deren Berührungspunkt Q auf der Axe der Parabel und dem Scheitel P gegenüber liegt.

§. 227. *Bemerkungen.* Aus der Conformität der Kegelschnitte mit dem Kreise folgt unmittelbar, dass allemal zwei conforme Strahlenbüschel entstehen, sobald man zwei Punkte des Kegelschnitts mit beliebig vielen andern verbindet. Im Allgemeinen werden diese Strahlenbüschel nicht congruent sein. In der gleichseitigen Hyperbel erhält man aber zwei congruente Strahlenbüschel, sobald man die Centra derselben in die beiden Endpunkte eines Durchmessers verlegt. Man wird sich hiervon leicht überzeugen, wenn man sich des Satzes erinnert, dass der von einer Sehne und einer Tangente gebildete Winkel dem entgegengesetzten Peripheriewinkel gleich ist. Die beiden congruenten Büschel haben aber hier eine solche Lage, dass die entsprechenden Strahlen nicht wie beim Kreise in demselben, sondern in entgegengesetztem Sinne auf einander folgen.

Ebenso gilt für jeden Kegelschnitt der Satz, dass zwei Tangenten durch Transversaltangenten in homographischen Punktreihen geschnitten werden. Im Allgemeinen werden diese beiden Reihen conform sein und ihre Gegenpunkte werden durch die beiden Transversaltangenten bestimmt, welche den beiden festen Tangenten parallel laufen. Sind die beiden festen Tangenten die Asymptoten einer Hyperbel, so fallen die beiden Gegenpunkte in den Durchschnittspunkt derselben, d. h. in den Mittelpunkt der Hyperbel.

Die Parabel hat keine parallelen Tangenten, also existiren auch keine Gegenpunkte. Die beiden homographischen Reihen können daher hier nur proportionale (bezüglich congruente) Reihen sein. Dies ergiebt sich noch deutlicher aus folgendem Satze:

§. 228. *Lehrsatz.* Werden zwei feste Tangenten einer Parabel von einer Transversaltangente durchschnitten, so erhält

man eine richtige Proportion, wenn man die dem Tangentendurchschnitt anliegenden Abschnitte zu äusseren, die den Berührungspunkten anliegenden zu innern Gliedern macht.

Beweis. Es seien AD und BD die beiden festen Tangenten (Fig. 124.), P und Q die Punkte, in denen sie von der Transversaltangente C geschnitten werden. Zieht man durch P, C, D und Q Durchmesser der Parabel: Pp, Cc, Dd, Qq, so wird die Berührungssehne AB durch den Durchmesser Dd, AC durch Pp, BC durch Qq halbirt. Liegen also die Punkte p, c, d, q auf AB, so ist auch p die Mitte von AC, q diejenige von Bc. Also ist

$$Ap = \tfrac{1}{2}(AB - Bc) = \tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{2}Bc = dq,$$

$$pd = qB.$$

Hieraus folgt:

$$DP : PA = BQ : QD.$$

Ist Dd die Axe der Parabel, so steht dieselbe senkrecht auf AB, also wird

$$AD = DB,$$

und folglich sind die Reihen

$$DPA \text{ und } BQD$$

einander congruent.

§. 229. *Lehrsatz.* Sind zwei homographische Büschel in nicht axialer Lage gegeben, so bestimmen die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt.

Beweis. Es seien (Fig. 109. und Fig. 109. a.) a' und b' die Centra von zwei homographischen Büscheln

$$a'm', \quad a'b', \quad a'c', \quad a'd', \quad a'e',$$

$$b'a_1', \quad b'm_1', \quad b'c', \quad b'd', \quad b'e'$$

in nicht axialer Lage, in denen $b'a_1'$ in die Verlängerung von $a'b'$, $b'm_1'$ in die Verlängerung von $b'm'$ fällt. Sind nun a und b die Centra von zwei congruenten Büscheln, die den beiden Büscheln a' und b' conform sind; so folgt zuerst aus der Congruenz der Büschel a und b, deren Strahlen wir uns in demselben Sinne auf einander folgend denken, dass die Durchschnittspunkte ent-

sprechender Strahlen c, d, e auf der Peripherie eines Kreises liegen, welche durch a und b geht. Nun aber sind die beiden Fünfecke $abcde$ und $a'b'c'd'e'$ homographisch; folglich liegen die Ecken des letztern auf einer dem Kreise homographischen Figur, d. h. auf einem Kegelschnitt.

§. 230. *Zusatz.* Auf ähnliche Art würde sich beweisen lassen, dass, wenn zwei homographische Punktreihen in nicht perspectivischer Lage gegeben sind, die Linien, welche entsprechende Punkte beider Reihen verbinden, einen bestimmten Kegelschnitt berühren.

Lehrsatz. Durch fünf Punkte, von denen niemals drei in gerader Linie liegen, ist allemal ein Kegelschnitt bestimmt.

Beweis. Nachdem man die Punkte a' und b' (Fig. 109. und 109. a.) mit c', d' und e' verbunden hat, lässt sich der Strahl $b'm_1'$ so bestimmen, dass die beiden Büschel

$$a'b', \quad a'c', \quad a'd', \quad a'e'$$
$$b'm_1', \quad b'c', \quad b'd', \quad b'e'$$

homographisch werden. Ebenso kann man den Strahl $a'm'$ so ziehen, dass

$$a'm, \quad a'c', \quad a'd', \quad a'e'$$
$$b'a', \quad b'c', \quad b'd', \quad b'e'$$

homographisch werden. Man hat also zwei homographische Strahlenbüschel a' und b' in nicht perspectivischer Lage, woraus hervorgeht, dass die Punkte a', b', c', d', e' auf einem Kegelschnitte liegen. Schaltet man nun aber dem Büschel a' noch einen beliebigen sechsten Strahl ein, so ist klar, dass der entsprechende Strahl des Büschels b' vollkommen bestimmt ist; folglich ist auch jeder sechste Punkt des durch $a'b'c'd'e'$ gehenden Kegelschnitts bestimmt.

§. 231. *Lehrsatz.* Zwei beliebige Kegelschnitte können auf unendlich viel verschiedene Arten als homographisch auf einander bezogen werden, und zwar kann man drei Paare von Punkten in denselben nach Willkühr als entsprechend setzen. Sodann aber entspricht jedem vierten Punkte des einen Kegelschnitts ein bestimmter Punkt des andern.

Beweis. Es seien a, b, c, andererseits a', b', c' (Fig. 109. und 109. a.), Punkte zweier Kegelschnitte. Zieht man in a und b, sowie in a' und b' Tangenten an beide Kegelschnitte: am, bm, $a'm'$ und $b'm'$; so wird, wofern man die beiden Büschel

$$am, \quad ab, \quad ac$$

$$a'm', \quad a'b', \quad a'c'$$

als conform auf einander bezieht, dem willkürlich gezogenen vierten Strahl ad ein bestimmter Strahl $a'd'$ entsprechen. Beide Strahlen werden auf dem gegebenen Kegelschnitte zwei Punkte d und d' bestimmen. Auf dieselbe Weise lässt sich ein fünftes Paar von Punkten e und e' finden u. s. f. Nun aber sind die beiden Fünfecke $abcdm$ und $a'b'c'd'm'$ homographisch. Denn zuerst sind die beiden Büschel a und b, und andererseits a' und b', homographisch gemäss der Eigenthümlichkeit der Kegelschnitte. Zweitens ist der Construction gemäss der Büschel a dem Büschel a' homographisch; folglich gilt dasselbe von den Büscheln b und b'. Nachdem also die beiden Vierecke $abcm$ und $a'b'c'm'$ als entsprechend zu Grunde gelegt sind, lässt sich zu jedem weiteren Punkte des einen Kegelschnitts ein bestimmter Punkt des andern nachweisen, so dass beide durch homographische Fünfecke bestimmt sind. Dies aber ist das Kennzeichen homographischer Figuren.

III.

Ueber die Segmente der Parabel und des elliptischen Paraboloides.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs - Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

I. Die Parabel.

1. Nehmen wir den Scheitel der Parabel zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy und den Durchmesser derselben zur positiven Halbaxe der Abscissen, so ist

$$(1) \qquad y^2 = 2px$$

ihre Gleichung. Wird diese Parabel parallel mit der Abscissenaxe und im Sinne der positiven x verschoben, bis der Scheitel um den Betrag h vom Coordinatenursprung absteht, so ist diese neue Lage der Kurve durch die Gleichung

$$(2) \qquad y^2 = 2p(x-h)$$

dargestellt, und diese zweite Parabel liegt innerhalb der ersten. Ziehen wir durch einen Punkt M der zweiten Parabel, dessen Coordinaten x_1, y_1 sein mögen, so dass auch

$$(3) \qquad y_1^2 = 2p(x_1-h)$$

ist, eine Tangente, so ist die Gleichung derselben:

$$(4) \qquad y = \frac{p}{y_1}x + \frac{p}{y_1}(x_1 - 2h).$$

Lassen wir die Gleichungen (1) und (4) gleichzeitig bestehen, so gibt die Auflösung derselben in Bezug auf y und x die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Tangente (4) mit der Parabel (1). Schreibt man die beiden Gleichungen (1) und (4) unter der Form:

$$x=\frac{y^2}{2p}, \quad x=\frac{y_1}{p}.y-(x_1-2h),$$

so hat man:

$$y^2=2y_1y-2p(x_1-2h), \quad (y-y_1)^2=y_1^2-2p(x_1-2h)=2ph.$$

Da diese Gleichung in Bezug auf y vom zweiten Grade ist, so schneidet die Tangente (4) die Parabel (1) im Allgemeinen in zwei Punkten L und N, und wenn wir die Coordinaten derselben durch L_y, L_x und N_y, N_x bezeichnen, so ist

$$(5) \qquad L_y=y_1+\sqrt{2ph}, \quad N_y=y_1-\sqrt{2ph}$$

und

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_x=\frac{y_1}{p}(y_1+\sqrt{2ph})-(x_1-2h)=x_1+\frac{y_1}{p}\sqrt{2ph}, \\ N_x=\frac{y_1}{p}(y_1-\sqrt{2ph})-(x_1-2h)=x_1-\frac{y_1}{p}\sqrt{2ph}. \end{array} \right.$$

Da aus diesen Werthen für die Coordinaten der Punkte L und N folgt:

$$y_1=\frac{L_y+N_y}{2}, \quad x_1=\frac{L_x+N_x}{2};$$

so liegt der Berührungspunkt M stets auf der Mitte der Sehne LN. Legen wir nun an die äussere Parabel (1) eine Tangente, so ist, wenn $x'y'$ die Coordinaten des Berührungspunktes sind, die Gleichung derselben:

$$(8) \qquad y=\frac{p}{y'}.x+\tfrac{1}{2}y',$$

und diese letztere wird mit der Tangente (4) parallel sein, wenn

$$(9) \qquad y'=y_1, \text{ also nach (3) } x'=x_1-h$$

ist, woraus hervorgeht, dass der Berührungspunkt $(x'y')$ auf der durch (x_1y_1) parallel zur Abscissenaxe gezogenen Geraden liegt, wie leicht vorherzusehen war. Das parabolische Segment, welches zwischen diesen beiden Tangenten (4) und (8) enthalten und im Voraus als eine Function der Coordinaten x_1, y_1 zu betrachten ist, soll nun bestimmt werden.

Zu diesem Ende denken wir uns in dem auf der positiven Halbaxe der x gezählten Abstande k, welcher kleiner als h sei, eine dritte gleichliegende Parabel construirt, deren Parameter $2p$ ist. Zieht man an diese Parabel

$$(10) \qquad y^2 = 2p(x-k)$$

in dem Punkte $(x_1'y_1')$ eine Tangente, so ist

$$(11) \qquad y = \frac{p}{y_1'}.x + \frac{p}{y_1'}(x_1' - 2k)$$

ihre Gleichung. Diese Gerade wird mit jener (8) parallel sein, wenn

$$y_1' = y', \text{ also nach (10) } x_1' = x' + k$$

ist, und man kann in diesem Falle statt (11) setzen:

$$(12) \qquad y = \frac{p}{y'}.x + \frac{y'^2 - 2pk}{2y'}.$$

Die Coordinaten l_x, l_y und n_x, n_y der Durchschnitte l und n dieser Tangente mit der Parabel (1) gehen aus den Gleichungen (5) und (6) hervor, wenn man x_1', y_1', k an die Stelle von x_1, y_1, h setzt. Es ist sonach:

$$(13) \qquad \begin{cases} l_x = x_1' + \dfrac{y_1'}{p}\sqrt{2pk}, & n_x = x_1' - \dfrac{y_1'}{p}\sqrt{2pk}; \\ l_y = y_1' + \sqrt{2pk}, & n_y = y_1' - \sqrt{2pk}. \end{cases}$$

Der Abstand P des Anfangspunktes von einer Geraden $y = A'x + B'$ wird bekanntlich durch die Gleichung

$$P = \pm \frac{B'}{\sqrt{1 + A'^2}}$$

bestimmt, wobei das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem B' positiv oder negativ ist. Bezeichnen daher $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ die Abstände des Anfangspunktes von den parallelen Tangenten (8) und (12), so ist

$$\mathfrak{p} = \frac{y'^2}{2\sqrt{p^2 + y'^2}}, \quad \mathfrak{p}' = \pm \frac{y'^2 - 2pk}{2\sqrt{p^2 + y'^2}},$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem $y'^2 \gtrless 2pk$ ist. Aus diesen beiden Entfernungen findet man den Abstand q der parallelen Tangenten (8) und (12), wenn man $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$ abzieht.

sobald beide Perpendikel auf derselben Seite des Anfangspunktes liegen, oder wenn man p und p' addirt, sobald die beiden Perpendikel auf entgegengesetzten Seiten des Anfangspunktes liegen. Um hierüber zu entscheiden, ist folgende Betrachtung nothwendig. Die beiden Tangenten (8) und (12) liegen auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite des Anfangspunktes, jenachdem die letzten Glieder ihrer Gleichungen

$$\frac{y'}{2} \text{ und } \frac{y'^2-2pk}{2y'}$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h., wenn beide Grössen mit y' multiplicirt werden, jenachdem

$$\frac{y'^2}{2} \text{ und } \frac{y'^2-2pk}{2}$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Hieraus folgt, dass die beiden Tangenten (8) und (12), mithin auch die Perpendikel p und p', auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite des Anfangspunktes liegen, jenachdem $y'^2 \gtrless 2pk$ ist. Im ersten Falle ist:

$$p' = \frac{y'^2-2pk}{2\sqrt{p^2+y'^2}} \text{ und } q' = p - p' = \frac{pk}{\sqrt{p^2+y'^2}};$$

im zweiten Falle ist:

$$p' = \frac{2pk-y'^2}{2\sqrt{p^2+y'^2}} \text{ und } q' = p + p' = \frac{pk}{\sqrt{p^2+y'^2}};$$

mithin ist in voller Allgemeinheit:

$$q' = \frac{pk}{\sqrt{p^2+y'^2}}. \tag{14}$$

Hieraus findet man den Abstand q der parallelen Tangenten (8) und (12), wenn man $k=h$ setzt:

$$q = \frac{ph}{\sqrt{p^2+y'^2}}. \tag{15}$$

Betrachtet man jetzt k als eine veränderliche Grösse und lässt dieselbe nach und nach alle Werthe von 0 bis h annehmen, so werden die stetig aufeinanderfolgenden Tangenten (12), welche den verschiedenen Parabeln (10) entsprechen, das parabolische Segment in eine unbegrenzte Anzahl von Streifen zerlegen von der Breite dq'. Der Inhalt eines solchen Streifens ist das Diffe-

renzial des Inhaltes des Segmentes. Bezeichnen wir dieses letztere mit dF und die Länge der Sehne ln mit R, so ist offenbar

$$dF = R.dq',$$

und wenn man zwischen den Grenzen 0 und q integrirt:

$$(16)\qquad F = \int_0^q R.dq'.$$

Nun ist bekanntlich:

$$R = \sqrt{(l_x - n_x)^2 + (l_y - n_y)^2},$$

oder, weil aus den Gleichungen (13)

$$l_x - n_x = \frac{2y'}{p}\sqrt{2pk}, \quad l_y - n_y = 2\sqrt{2pk}$$

folgt:

$$(l_x - n_x)^2 + (l_y - n_y)^2 = 8kp\left(1 + \frac{y'^2}{p^2}\right) = 8pk.\frac{p^2 + y'^2}{p^2},$$

$$R = 2\sqrt{2pk}.\frac{\sqrt{p^2 + y'^2}}{p};$$

ferner gibt die Gleichung (14):

$$dq' = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y'^2}}.dk.$$

Werden diese Werthe von R und dq' in das Integral (16) substituirt und die Integrationsgrenzen 0 und q in jene 0 und k verwandelt, wie es die Gleichung (15) erfordert, so findet man:

$$(A)\qquad F = 2\int_0^k \sqrt{2pk}.dk, \quad F = \frac{4}{3}\sqrt{2pk^3};$$

also ist der Flächenraum F von der Lage des Punktes $(x_1 y_1)$ unabhängig, woraus sich folgender Lehrsatz ergibt:

1. Lehrsatz.

Haben zwei Parabeln denselben Parameter und auf derselben Geraden gleichliegende Durchmesser, so schneidet jede an die innere Parabel gezogene Tangente von der äusseren Parabel Segmente von gleichem Inhalt ab und der Berührungspunkt liegt stets im Mittelpunkte der Sehne.

2. Um den Schwerpunkt eines solchen parabolischen Segmentes zu bestimmen, erinnern wir an die aus der Mechanik bekannten Gleichungen:

$$F.X=\int x_1'\,dF,\quad F.Y=\int y_1'\,dF;$$

in welchen X, Y die Coordinaten des Schwerpunktes des Flächenraumes F; x_1', y_1' jene des Schwerpunktes des Differenzials dF bezeichnen. In dem vorliegenden Falle ist offenbar:

$$x_1'=x'+k,\quad y_1'=y';$$

$$x_1'.dF=(x'+k).dF=x'.dF+k.2\sqrt{2pk}.dk=x'.dF+2\sqrt{2p}.k^{\frac{3}{2}}.dk,$$

$$y_1'.dF=y'.dF;$$

also, wenn man zwischen den Grenzen 0 und h integrirt:

$$F.X=x'.F+\frac{4}{5}\sqrt{2p}\,h^{\frac{5}{2}}=x'.F+\frac{4}{5}\sqrt{2ph^5}=x'.F+\frac{3}{5}h.F,$$

$$F.Y=y'.F;$$

mithin ist:

$$(17)\qquad X=x'+\tfrac{3}{5}h,\quad Y=y'.$$

Da nach dem Obigen $x_1=x'+h$, $y_1=y'$ ist, so liegt der Schwerpunkt auf der Verbindungslinie der Punkte (x_1y_1) und $(x'y')$, um $\frac{3}{5}h$ von dem letzteren entfernt.

Lässt man den Punkt (x_1y_1) nach und nach alle Lagen auf der Parabel (2) einnehmen, so beschreibt der correspondirende Punkt $(x'y')$ die Parabel (1), und der zugehörige Schwerpunkt (XY) beschreibt eine Kurve, deren Gleichung aus (17) und $y'^2=2px'$ hervorgeht, wenn man x' und y' eliminirt. Diese Elimination ausgeführt, erhält man:

$$(18)\qquad Y^2=2p(X-\tfrac{3}{5}h),$$

welche Gleichung eine gleichliegende Parabel mit demselben Parameter $2p$ bezeichnet, deren Scheitel, auf der positiven Halbaxe der x liegend, um $\frac{3}{5}h$ vom Anfangspunkte absteht. Diese Kurve ist demnach als der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Segmente zu betrachten, welche durch beliebige, an die innere Parabel gezogene Tangenten von der äusseren abgeschnitten werden.

3. Das Vorhergehende gestattet eine sehr einfache Auflösung des Problems: den Flächeninhalt und Schwerpunkt eines Segmentes zu bestimmen, welches eine beliebige Gerade

$$(19) \qquad y = Ax + B$$

von der Parabel (1) abschneidet. Denn betrachtet man diese Gerade als Tangente der Parabel $y^2 = 2p(x-h)$, und sind x_1, y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes, so dass auch

$$(20) \qquad y_1 = Ax_1 + B$$

ist, so muss diese Gerade mit jener (4) identisch sein, und man hat:

$$(21) \qquad A = \frac{p}{y_1}, \quad B = \frac{p}{y_1}(x_1 - 2h),$$

so dass aus den drei Gleichungen (20) und (21) die Unbekannten x_1, y_1 und h immer bestimmt werden können. In der That folgt aus den Gleichungen (21):

$$(22) \qquad x_1 = \frac{B}{A} + 2h, \quad y_1 = \frac{p}{A};$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (20) substituirt, so gibt diese die Unbekannte

$$(23) \qquad h = \frac{p - 2AB}{2A^2};$$

folglich sind auch die Coordinaten x_1, y_1 des Berührungspunktes bekannt, und weil $x' = x_1 - h$, $y' = y_1$ ist, so findet man leicht:

$$x' = \frac{p}{2A^2}, \quad y' = \frac{p}{A};$$

und hiermit nach den Gleichungen ($\varDelta$) und (17):

$$(24) \qquad F = \frac{2\sqrt{p(p-2AB)^3}}{3A^3}, \quad X = \frac{4p - 3AB}{5A^2}, \quad Y = \frac{p}{A}.$$

Zusatz. Ist $h = 0$, d. h. $p = 2AB$, so wird

$$F = 0, \quad X = \frac{B}{A} = x', \quad Y = 2B = y';$$

denn in diesem Falle bezeichnet $y = Ax + B$ die durch den Punkt $(x'y')$ gehende Tangente.

II. Das elliptische Paraboloid.

Nehmen wir den Scheitel eines elliptischen Paraboloides zum Anfangspunkte der Coordinaten, den Durchmesser desselben zur

positiven Halbaxe der z, und die Richtungen der Parameter p und q zu Axen der x und y, so ist die Gleichung dieser Fläche:

$$(1) \qquad z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}.$$

Wird dieses elliptische Paraboloid so fortbewegt, dass alle Punkte desselben Parallelen zur Axe der z beschreiben, bis sein Ast um die Länge h vom Anfangspunkte absteht, so wird diese neue Lage der Fläche durch die Gleichung

$$(2) \qquad z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+h$$

dargestellt. Das elliptische Paraboloid (2) liegt dann in seiner ganzen Ausdehnung innerhalb des elliptischen Paraboloids (1).

Es seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines bestimmten Punktes auf dem elliptischen Paraboloid (2), so dass auch

$$(3) \qquad z_1=\frac{x_1^2}{p}+\frac{y_1^2}{q}+h$$

ist und die durch diesen Punkt geführte Berührungsebene durch die Gleichung

$$(4) \qquad z=\frac{2x_1}{p}.x+\frac{2y_1}{q}.y-(z_1-2h)$$

dargestellt wird. Wir haben die Absicht, im Folgenden das Volumen desjenigen Segmentes zu berechnen, welches die Ebene (4) von dem äusseren Paraboloid (1) abschneidet, und es kommt hierbei zunächst darauf an, die Gestalt und Dimensionen der Kurve zu ermitteln, in welcher eben die Ebene (4) das elliptische Paraboloid (1) schneidet. Die Gleichungen dieser Kurve sind offenbar jene (1) und (4), sobald man die laufenden Coordinaten x, y, z auf dieselben Punkte des Raumes bezieht. Eliminirt man aus ihnen die Coordinate z, so erhält man:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=\frac{2x_1}{p}.x+\frac{2y_1}{q}.y-(z_1-2h),$$

oder, wie man leicht findet:

$$(5) \qquad \frac{(x-x_1)^2}{ph}+\frac{(y-y_1)^2}{qh}=1,$$

als Gleichung der Projection der Durchschnittslinie auf die Ebene der xy. Diese bezeichnet eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Coordinaten x_1, y_1 hat, und deren Halbaxen $\sqrt{ph}$, $\sqrt{qh}$ sind.

Hieraus folgt, dass auch die Durchschnittslinie im Raume, deren Gleichungen (1) und (4) sind, eine Ellipse ist, welche den Berührungspunkt $(x_1y_1z_1)$ zum Mittelpunkte hat.

Legt man durch einen Punkt $(x'y'z')$ des äusseren Paraboloides (1), für welchen also die Gleichung

$$z'=\frac{x'^2}{p}+\frac{y'^2}{q} \tag{6}$$

gilt, eine tangirende Ebene, so ist die bekannte Gleichung derselben:

$$z=\frac{2x'}{p}.x+\frac{2y'}{q}.y-z', \tag{7}$$

und diese wird zur tangirenden Ebene (4) parallel sein, wenn

$$x'=x_1,\quad y'=y_1,\quad z'=z_1-h \tag{8}$$

ist, wodurch also der Punkt $(x'y'z')$ in Hinsicht auf den Punkt $(x_1y_1z_1)$ vollkommen bestimmt ist. Das zwischen diesen beiden Ebenen enthaltene paraboloidische Segment ist dasjenige, dessen Volumen bestimmt werden soll.

Wird in dem Abstande $k<h$ vom Anfangspunkt ein drittes elliptisches Paraboloid beschrieben, welches mit den beiden ersteren (1) und (2) seinen Durchmesser auf der positiven Halbaxe der z und dieselben gleichliegenden Parameter p und q hat, so ist

$$z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+k \tag{9}$$

die Gleichung der Fläche, und eine durch den Punkt $(x_1'y_1'z_1')$ desselben gelegte Berührungsebene

$$z=\frac{2x_1'}{p}.x+\frac{2y_1'}{q}.y-(z_1'-2k) \tag{10}$$

wird mit der Ebene (7) parallel sein, wenn

$$x'=x_1',\quad y'=y_1',\quad z'=z_1'-k$$

ist, so dass man in diesem Falle statt (10) hat:

$$z=\frac{2x'}{p}.x+\frac{2y'}{q}.y-(z'-k). \tag{11}$$

Diese Ebene wird das elliptische Paraboloid (1) in einer Ellipse schneiden, welche den Berührungspunkt $(x_1'y_1'z_1')$ zum Mittelpunkt und deren Projection auf die Ebene der xy die Halbaxen $\sqrt{pk}$, $\sqrt{qk}$ hat. Der Flächenraum der Projections-Ellipse ist $\sqrt{pq}.k\pi$,

und wenn wir den Neigungswinkel der parallelen Ebenen (7) und (11) zur Ebene der xy mit γ bezeichnen, so ist $\frac{\sqrt{pq}.k\pi}{\cos\gamma}$ der Flächeninhalt der Durchschnitts-Ellipse.

Fällen wir vom Anfangspunkte aus auf die Berührungsebene (7) ein Perpendikel und bezeichnen die Länge desselben mit $\mathfrak{p}$ und den Winkel mit der positiven Halbaxe der z mit γ', ferner die analogen Stücke für die Berührungsebene (11) mit $\mathfrak{p}'$ und γ'', so ist bekanntlich:

$$\frac{\mathfrak{p}}{\cos\gamma'}=-z', \quad \frac{\mathfrak{p}'}{\cos\gamma''}=-(z'-k).$$

Aus der Gleichung (7) ist ersichtlich, dass die durch dieselbe dargestellte Berührungsebene stets die negative Halbaxe der z schneidet, mithin ist $\gamma'=180^0-\gamma$. Die Berührungsebene (11) schneidet die negative oder positive Halbaxe der z, jenachdem $-(z'-k)$ negativ oder positiv ist, d. h. jenachdem $z'>k$ oder $z'<k$. Im ersteren Falle ist auch $\gamma''=180^0-\gamma$ und die Perpendikel $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ liegen beide auf derselben Seite des Anfangspunktes. Im zweiten Falle ist $\gamma''=\gamma$ und die Perpendikel $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ liegen auf entgegengesetzten Seiten des Anfangspunktes. Bezeichnen wir den Abstand der parallelen Ebenen (7) und (11) mit q', so hat man nach dem Obigen, wenn $z'>k$ ist:

$$\frac{\mathfrak{p}}{\cos\gamma}=z', \quad \frac{\mathfrak{p}'}{\cos\gamma}=z'-k,$$

mithin

$$\mathfrak{p}'=\frac{z'-k}{z'}.\mathfrak{p} \quad \text{und} \quad q'=\mathfrak{p}-\mathfrak{p}'=\frac{k\mathfrak{p}}{z'};$$

wenn $z'<k$ ist:

$$\frac{\mathfrak{p}}{\cos\gamma}=z', \quad \frac{\mathfrak{p}'}{\cos\gamma}=k-z',$$

mithin

$$\mathfrak{p}'=\frac{k-z'}{z'}.\mathfrak{p} \quad \text{und} \quad q'=\mathfrak{p}+\mathfrak{p}'=\frac{k\mathfrak{p}}{z'}.$$

Es ist also in voller Allgemeinheit:

$$(12) \qquad q'=\frac{k\mathfrak{p}}{z'}.$$

Hieraus findet man den Abstand q der parallelen Ebenen (7) und (11), wenn man $k=h$ setzt:

(13) $$q = \frac{hp}{z'}.$$

Betrachten wir nun k als eine variable Grösse, welche successive alle Werthe von 0 bis h annimmt, so werden die den stetig aufeinanderfolgenden Paraboloiden (9) entsprechenden parallelen Berührungsebenen (11) das zwischen den Ebenen (4) und (7) enthaltene paraboloidische Segment in eine unbegrenzte Anzahl von Schichten zerlegen von der Dicke dq'. Der Inhalt dV einer solchen Schichte ist das Differenzial des Inhaltes V des Segmentes. Es ist sonach

$$dV = \frac{\pi\sqrt{pq}}{\cos\gamma} . kdq', \quad V = \frac{\pi\sqrt{pq}}{\cos\gamma} \int_0^q kdq';$$

nun folgt aus der Gleichung (12):

$$dq' = \frac{p}{z'} dk,$$

und wenn man diesen Werth von dq' substituirt und der Gleichung (13) entsprechend in Bezug auf k zwischen den Grenzen 0 und h integrirt:

(Δ) $$V = \pi\sqrt{pq} . \frac{p}{z'\cos\gamma} . \tfrac{1}{2}h^2,$$

oder weil $\frac{p}{\cos\gamma} = z'$ ist:

$$V = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{pq} . h^2,$$

woraus ersichtlich ist, dass das Volumen V von den Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Berührungspunktes **unabhängig**, mithin für alle Punkte des Paraboloides (2) **constant** ist.

Es gilt daher folgender

2. Lehrsatz.

Haben zwei gleichliegende elliptische Paraboloide dieselben Parameter, so schneidet jede an das innere Paraboloid geführte Berührungsebene von dem äusseren Paraboloid Segmente von constantem Inhalt ab, und der Berührungspunkt liegt stets im Mittelpunkte der Durchschnitts-Ellipse.

2) Bezeichnen X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunk-

tes des Volumens V und x_1', y_1', z_1' jene des Schwerpunktes des Differenzials dV, so ist allgemein:

$$V.X=\int x_1'dV,\quad V.Y=\int y_1'dV,\quad V.Z=\int z_1'dV;$$

wobei die Integration auf das ganze Volumen V auszudehnen ist. Weil der Schwerpunkt der Ellipse in ihrem Mittelpunkte $(x_1'y_1'z_1')$ liegt und nach dem Obigen $x_1'=x'$, $y_1'=y'$, $z_1'=z'+k$ ist, so hat man für den besonderen Fall unseres paraboloidischen Segmentes:

$$x_1'dV=\pi\sqrt{pq}\,.\,x'kdk,\quad y_1'dV=\pi\sqrt{pq}\,.\,y'kdk,$$

$$z_1'dV=\pi\sqrt{pq}\,.\,(z'+k)kdk;$$

mithin, wenn man zwischen den Grenzen 0 und h integrirt, die Resultate beziehungsweise gleich $V.X$, $V.Y$, $V.Z$ setzt, wobei V aus der Gleichung (Δ) zu nehmen ist, und dann abkürzt, was sich abkürzen lässt:

$$(14)\quad X=x'=x_1,\quad Y=y'=y_1,\quad Z=z'+\tfrac{2}{3}h=z_1-\tfrac{1}{3}h;$$

woraus ersichtlich ist, dass der Schwerpunkt ebenso leicht durch Construction, wie durch Rechnung gefunden werden kann.

Lässt man den Punkt $(x_1y_1z_1)$ nach und nach alle Lagen auf dem Paraboloid

$$(2)\qquad z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+h$$

annehmen, so beschreibt der entsprechende Punkt $(x'y'z')$ das elliptische Paraboloid (1); der Schwerpunkt (XYZ), welcher nach dem Obigen in der Verbindungslinie dieser beiden Punkte liegt, beschreibt eine krumme Fläche, deren Gleichung erhalten wird, wenn man aus den Gleichungen (6) und (14) x', y', z' eliminirt. Die Ausführung dieses Geschäftes gibt die Gleichung:

$$(15)\qquad Z=\frac{X^2}{p}+\frac{Y^2}{q}+\tfrac{2}{3}h,$$

welche ein gleichliegendes elliptisches Paraboloid bezeichnet, mit denselben Parametern p und q wie die gegebenen Flächen (1) und (2), dessen Scheitel auf der Axe der z liegt und um $\frac{2}{3}h$ vom Anfangspunkte absteht. Diese Fläche ist sonach der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Segmente, welche durch beliebige Berührungsebenen des inneren Paraboloides (2) von dem äusseren (1) abgeschnitten werden.

3) Wir wollen schliesslich das Obige noch anwenden, um

Volumen und Schwerpunkt eines Segmentes zu bestimmen, welches irgend eine gegebene Ebene

$$(16)\qquad z = Ax + By + C$$

von dem elliptischen Paraboloid

$$(1)\qquad z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$$

abschneidet.

Betrachtet man die gegebene Ebene als Berührungsebene eines elliptischen Paraboloides, wie

$$(2)\qquad z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + h,$$

wobei h eine noch zu bestimmende Grösse ist, und sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Berührungspunktes, so dass auch

$$(17)\qquad z_1 = Ax_1 + By_1 + C$$

ist, so muss die Ebene (16) mit jener (4) identisch sein, woraus folgt:

$$A = \frac{2x_1}{p}, \quad B = \frac{2y_1}{q}, \quad C = 2h - z_1$$

oder

$$x_1 = \tfrac{1}{2}Ap, \quad y_1 = \tfrac{1}{2}Bq, \quad z_1 = 2h - C;$$

welche Werthe von x_1, y_1, z_1 auch der Gleichung (17) genügen müssen. Die Substitution gibt alsdann mit Leichtigkeit den Werth von

$$(18)\qquad h = \tfrac{1}{4}(A^2p + B^2q + 4C),$$

mithin ist nach (Δ), (14):

$$(19)\qquad V = \tfrac{1}{32}\pi\sqrt{pq}(A^2p + B^2q + 4C)^2,$$

$$(20)\qquad X = \tfrac{1}{2}Ap, \quad Y = \tfrac{1}{2}Bq, \quad Z = \tfrac{5}{12}(A^2p + B^2q) + \tfrac{2}{3}C,$$

womit also der beabsichtigte Zweck vollkommen erreicht ist.

Zusatz. Ist $h = 0$, d. h. $C = -\tfrac{1}{4}(A^2p + B^2q)$, so wird die gegebene Ebene (16) das Paraboloid (1) berühren, und man hat $V = 0$, $X = x'$, $Y = y'$, $Z = z'$, indem der Punkt $(x'y'z')$ sein eigener Schwerpunkt ist.

III. Die Ellipse und die Parabel.

In der Abhandlung: „Ueber die Segmente der Ellipse und Hyperbel, des Ellipsoides und des zweitheiligen Hyperboloides“ (s. Archiv. Thl. XXVIII. p. 52.) habe ich gezeigt, dass die Segmente der durch die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

dargestellten Ellipse, welche durch beliebige an die Ellipse

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

gezogene Tangenten abgeschnitten werden, einen constanten Flächenraum haben, dessen Grösse F durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(3) \qquad F=ab.\{\operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}\},$$

und wobei nur die Bedingung obwaltet, dass h nicht kleiner als die Einheit sei. Verlegt man den Anfangspunkt in denjenigen Scheitel der Ellipse (1), dessen Coordinaten $-a$ und 0 sind, und lässt die Coordinatenaxen ihre alten Richtungen beibehalten, so werden die Ellipsen (1) und (2), auf das neue System bezogen, durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

und

$$(5) \qquad \frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{h^2}$$

dargestellt, für welche immerfort die Gleichung (3) ihre Giltigkeit hat. Setzt man nun

$$(6) \qquad h_1=a-\frac{a}{h}=a\frac{h-1}{h},$$

$$(7) \qquad \frac{b^2}{a}=p,$$

wobei also h_1 der Abstand der gleichliegenden Scheitel der zwei gegebenen Ellipsen, p die dritte stetige Proportionale zwischen a und b ist, führt in den Gleichungen (4), (5) und (3) statt

b und h die Constanten p und h_1 ein, und löset die beiden ersten Gleichungen in Bezug auf y^2 auf, so ergibt sich nach einer leichten Rechnung beziehungsweise:

$$(8)\qquad y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},$$

$$(9)\qquad y^2 = 2px - ph_1\left(2 - \frac{h_1}{a}\right) - \frac{px^2}{a},$$

$$(10)\qquad F = \frac{\text{Arc Cos}\,\frac{a-h_1}{a} - \frac{a-h_1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{a-h_1}{a}\right)^2}}{(a^3p)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Wenn man jetzt bedenkt, dass die Gleichungen (1), (2) und (3), von welchen wir ausgegangen sind, für beliebige Werthe von a, b und h ihre Giltigkeit haben, wofern nur h nicht kleiner als die Einheit ist, so kann man behaupten, dass auch die Gleichungen (8), (9) und (10) für beliebige Werthe von a, p und h_1 gelten, wenn nur h_1, der Gleichung (6) entsprechend, nicht kleiner als Null ist. Lässt man also a und b sich dem Unendlichen und h der Einheit dergestalt nähern, dass h_1 und p bestimmte constante Grössen bleiben, was laut der Beziehungsgleichungen (6) und (7) immer möglich ist, so erhält man als Grenzen statt der Ellipsen (8) und (9) die durch die Gleichungen

$$(11)\qquad y^2 = 2px,$$

$$(12)\qquad y^2 = 2p(x - h_1)$$

dargestellten Parabeln, und F bezeichnet den Flächenraum, welchen irgend eine Tangente der Parabel (12) von jener (11) abschneidet. Dieser Flächenraum erscheint aber für $a=\infty$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, und muss sein bestimmter Werth erst nach den Vorschriften der Differenzialrechnung ermittelt werden. Setzt man zur Abkürzung den Zähler von F gleich Z, den Nenner gleich N, und $\frac{a}{a-h_1} = h$, so wird für $a=\infty$:

$$F = \frac{Z}{N} = \frac{\frac{dZ}{da}}{\frac{dN}{da}},\quad Z = \text{Arc Cos}\frac{1}{h} - \frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2},\quad \frac{dZ}{da} = \frac{dZ}{dh}\cdot\frac{dh}{da};$$

es ist aber

$$\frac{dZ}{dk}=2\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^3},\quad \frac{dk}{da}=-\frac{h_1}{(a-h_1)^2}=-\frac{h_1k^2}{a^2};$$

also

$$\frac{dZ}{da}=-2\frac{h_1\sqrt{k^2-1}}{a^2k}=-2\frac{h_1}{a^2}\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}$$

und

$$\frac{dN}{da}=-\tfrac{1}{3}(a^3p)^{-\frac{2}{3}}.3a^2p,$$

mithin für $a=\infty$:

$$F=\frac{\frac{dZ}{da}}{\frac{dN}{da}}=+4\frac{h_1}{a^2}\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{(a^3p)^{\frac{2}{3}}}{3a^2p}=\tfrac{4}{3}h_1\sqrt{p}\cdot\sqrt{a(1-\frac{1}{k^2})},$$

oder weil

$$a(1-\frac{1}{k^2})=a[1-\frac{(a-h_1)^2}{a^2}]=\frac{(2a-h_1)h_1}{a}=(2-\frac{h_1}{a})h_1$$

ist, für $a=\infty$:

$$F=\tfrac{4}{3}h_1\sqrt{p}.\sqrt{(2-\frac{h_1}{a})h_1}=\tfrac{4}{3}h_1\sqrt{p}\,.\sqrt{2h_1},$$

$$(13)\qquad F=\tfrac{4}{3}\sqrt{2ph_1^3}.$$

Aus der Uebereinstimmung der Gleichungen (11), (12) und (13) mit jenen (1), (2) und (Δ) des I. Artikels dieses Aufsatzes ersieht man schon, dass der obige erste Lehrsatz in dem a. a. O. für die Ellipse gegebenen gewissermassen als besonderer Fall enthalten ist, sobald man die Parabel als Species der Ellipsen betrachtet.

IV. Das Ellipsoid und das elliptische Paraboloid.

In der am Eingange des vorigen Artikels citirten Abhandlung wurde auch gezeigt, dass die Segmente eines durch die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

repräsentirten Ellipsoides einen constanten Inhalt haben, wenn die schneidende Ebene eine Berührungsebene des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{h^2} \tag{2}$$

und h kleiner als die Einheit ist, und zwar wird das Volumen V durch die Gleichung bestimmt:

$$V=\tfrac{1}{3}\,\frac{(2h+1)(h-1)^2}{h^3}\,abc\pi. \tag{3}$$

Wenn man den Anfangspunkt in denjenigen Punkt des Ellipsoides (1) verlegt, in welchem dasselbe von der negativen Halbaxe der z geschnitten wird, und die Richtungen der Coordinatenaxen unverändert beibehält, so werden die Ellipsoide (1) und (2) nunmehr durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}=1, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}=\frac{1}{h^2} \tag{5}$$

dargestellt. Ist nun h_1 der Abstand des neuen Anfangspunktes von demjenigen Durchschnitt der positiven Halbaxe der z mit dem Ellipsoid (2), welcher ihm am nächsten liegt, mit andern Worten, der Unterschied der Halbaxen c und $\frac{c}{h}$ der Ellipsoide (1) und (2); ist ferner $\tfrac{1}{2}p$ die dritte stetige Proportionale von c und a, $\tfrac{1}{2}q$ jene von c und b, so hat man offenbar:

$$h_1=c-\frac{c}{h}=c\,\frac{h-1}{h}, \tag{6}$$

$$\frac{a^2}{c}=\tfrac{1}{2}p, \tag{7}$$

$$\frac{b^2}{c}=\tfrac{1}{2}q. \tag{8}$$

Werden jetzt die Constanten h_1, p, q statt jener h, a, b in die Gleichungen (4), (5) und (3) eingeführt, so findet man mit Leichtigkeit beziehungsweise:

$$z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+\frac{z}{2c}, \tag{9}$$

$$(10) \qquad z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + h_1\left(1 - \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{z^2}{2c},$$

$$(11) \qquad V = \tfrac{1}{2}\sqrt{pq}\,h_1^2\left(1 - \frac{h_1}{3c}\right).$$

Da nun die Gleichungen (1), (2) und (3) für beliebige Werthe von a, b, c und h gelten, sobald nur h nicht kleiner als 1 ist, so wird sogleich ersichtlich, dass auch die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen (9), (10) und (11) für beliebige Werthe von p, q, c und h_1 Geltung haben, wenn nur h_1 grösser als Null ist, wie die Gleichung (6) erfordert. Wenn sich daher a, b, c dem Unendlichen und h der Einheit dergestalt nähern, dass h_1, p, q stets endliche Grössen bleiben, was nach den Beziehungsgleichungen (6), (7) und (8) immer möglich ist, so erhält man aus (9), (10) und (11) für die Grenzen folgende zusammengehörige Gleichungen:

$$(12) \qquad z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q},$$

$$(13) \qquad z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + h_1,$$

$$(14) \qquad V = \tfrac{1}{2}\sqrt{pq}\,h_1^2.$$

Da diese Gleichungen mit jenen (1), (2) und ($\varDelta$) des zweiten Artikels übereinstimmen, so ist einleuchtend, dass der in der citirten Abhandlung für das Ellipsoid aufgeführte Lehrsatz obigen zweiten Lehrsatz involvirt, sobald man das elliptische Paraboloid als eine Species der Ellipsoide betrachtet.

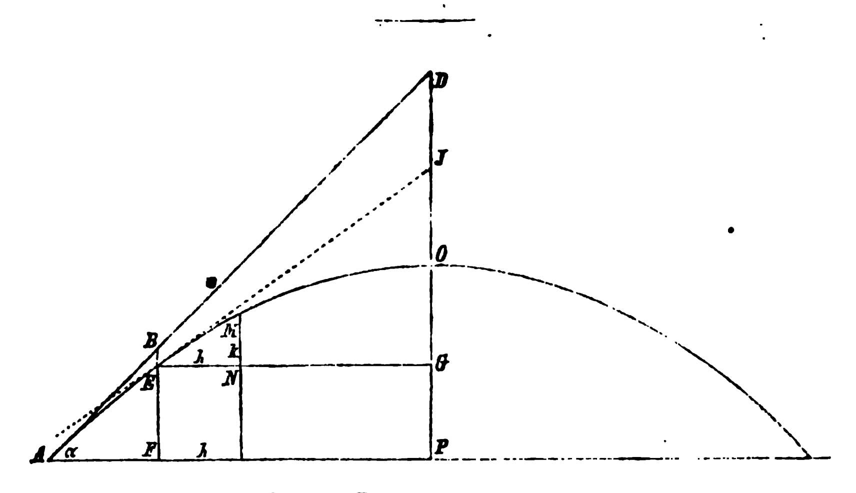
IV.

Die Lehre vom Wurfe.

(Ein Kapitel aus der mathematischen Physik.)

Von

Herrn Director Dr. *Brennecke*
an der Realschule zu Posen.



Es bezeichne *A* einen Punkt im Horizonte, von welchem eine Kugel unter dem Winkel α abgeschossen wird, so wird, wenn man von der Anziehungskraft der Erde absieht, die Kugel sich in der Richtung der geraden Linie *AD* mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit bewegen, d. h. in gleichen Zeiten gleiche Räume zurücklegen. Von dem Luftwiderstande wollen wir in der folgenden Behandlung ganz absehen. Die mitgetheilte einmalige Geschwindigkeit wollen wir durch c bezeichnen, d. h. annehmen, dass die geschossene Kugel, wenn keine Einwirkung der Anziehungs-

kraft der Erde erfolgte, in jeder Secunde c Fuss durchflöge. Wir können alsdann den in t Secunden durchlaufenen Weg der Kugel mit ct bezeichnen:

$$1)\quad AB = c.t.$$

Während auf der einen Seite durch das Beharrungsvermögen die Kugel die Richtung AB beibehält, wird ihr durch die Schwere in jedem Momente ein senkrechter Impuls mitgetheilt, der sie nach dem Mittelpunkte der Erde zieht. Die Kugel wird daher in jedem Momente ihrer Bahn fallen, und ihr Weg wird nicht durch die gerade Linie AB, sondern durch die Curve AE dargestellt werden. Nach Verlauf von t Secunden wird daher die Kugel einerseits in B angekommen sein, andererseits gt^2 Fuss nach den Gesetzen des freien Falles gefallen sein, wo unter g der Fallraum in der ersten Secunde im luftleeren Raume verstanden wird, also ungefähr $15\frac{5}{8}$ preuss. Fuss:

$$2)\quad BE = gt^2.$$

Es ist nun möglich, nach t Secunden die Weite AF und die Höhe EF der abgeschossenen Kugel zu bestimmen:

$$3)\quad AF = ct.\cos\alpha,$$

$$4)\quad EF = ct.\sin\alpha - gt^2.$$

Es ist nun leicht, die Zeitdauer des ganzen Wurfes zu berechnen. Man hat dazu nur nöthig, zu untersuchen, für welchen Werth von t die Höhe $EF = 0$ wird. Zunächst geschieht dies für $t = 0$, und dann für $c.\sin\alpha - gt = 0$; man erhält dadurch:

$$5)\quad \text{Zeitdauer des Wurfes} = \frac{c.\sin\alpha}{g}.$$

Die Zeitdauer des Wurfes ist daher ein Maximum für $\alpha = 90^0$, d. h. beim senkrechten Wurfe. Setze ich den Werth von 5) in 3) ein, so erhalte ich:

$$6)\quad \text{Weite des Wurfes} = \frac{c^2.\sin 2\alpha}{2g}.$$

Die Weite ist daher ein Maximum für $\alpha = 45^0$, und beträgt dann $\frac{c^2}{2g}$.

Es bleibt noch übrig, die Höhe des Wurfes zu bestimmen. Dafür muss man sehen, für welchen Werth von t der Ausdruck für EF in 4) ein Maximum wird. Wir werden untersuchen, was daraus wird für die drei benachbarten Werthe $t - \tau$, t, $t + \tau$, wo τ sehr klein angenommen werden soll.

Höhe für Zeit $t-\tau$ ist $=ct.\sin\alpha-gt^2-\tau(c.\sin\alpha-2gt)-g\tau^2$,

" " " t " $=ct.\sin\alpha-gt^2$,

" " " $t+\tau$ " $=ct.\sin\alpha-gt^2+\tau(c.\sin\alpha-2gt)-g\tau^2$.

Es erhellt, dass der mittlere Werth grösser ist als der vorhergehende und nachfolgende, wenn $c.\sin\alpha-2gt=0$, d. h. für $t=\frac{c.\sin\alpha}{2g}$, oder nach 5) für die halbe Zeitdauer des Wurfes. Setzen wir diesen Werth für t in 4) ein, so erhalten wir:

$$OP=c.\sin\alpha.\frac{c.\sin\alpha}{2g}-g.\frac{c^2\sin^2\alpha}{4g^2} \text{ oder } \frac{c^2\sin^2\alpha}{4g}.$$

$$7) \quad \text{Grösste Höhe } OP=\frac{c^2.\sin^2\alpha}{4g}.$$

Dieses ist ein Maximum für $\alpha=90^0$, d. h. beim senkrechten Wurfe, wo wir als grösste Höhe erhalten $\frac{c^2}{4g}$. Vergleichen wir diesen Werth mit 6), so erhellt, dass man im günstigsten Falle nur halb so hoch schiessen kann als weit.

Es handelt sich jetzt darum, die Richtung des Wurfes nach der Zeit t zu bestimmen, welche Richtung in der obigen Figur durch die Linie EJ, Tangente an die Curve in E, angedeutet worden ist. Wir ziehen zu diesem Zwecke eine Parallele EG mit dem Horizonte, so ist der $\angle JEG$, den wir durch θ bezeichnen wollen, der gesuchte. Sind nun E und M zwei benachbarte Punkte der Curve, so wird die Tangente in E mit dem Bogen EM (einem Elemente der Curve) zusammenfallen. Fällen wir ferner von M ein Loth auf den Horizont und bezeichnen seinen Durchschnittspunkt mit EG, welches parallel mit dem Horizonte sein soll, mit N, so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck ENM, indem wir das Element EM der Curve als eine gerade Linie, als die Hypotenuse dieses Dreiecks, ansehen können. Es ist $\frac{NM}{EN}=\text{tg}\theta$, wo $EN=h$ der Zuwachs der Weite des Wurfes für die Zeit τ ist und $NM=k$ der Zuwachs der Höhe sein soll. Wir können daher auch sagen $\text{tg}\theta=\frac{k}{h}$. Es handelt sich jetzt darum, h und k als Functionen von t darzustellen. Aus 3) ergiebt sich $h=c\tau.\cos\alpha$, aus 4) $k=c\tau\sin\alpha-2gt\tau-g\tau^2$:

$$8) \quad \begin{cases} h=c\tau.\cos\alpha, \\ k=c\tau.\sin\alpha-2gt\tau-g\tau^2. \end{cases}$$

Dividiren wir nun k durch h und setzen nachher Grenze von $\tau=0$, so erhalten wir:

$$9)\quad \operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\alpha-\frac{2gt}{c.\cos\alpha}.$$

Betrachten wir den für θ in 9) erhaltenen Werth, so finden wir zunächst, dass, für $t=0$, $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\alpha$; dass dann der $\angle\theta$ abnimmt, bis $\operatorname{tg}\alpha-\frac{2gt}{c.\cos\alpha}=0$ wird, d. h. für $t=\frac{c.\sin\alpha}{2g}$, d. h. nach 5) für die halbe Zeitdauer des Wurfes, oder: Wenn die Kugel auf ihrer höchsten Höhe angekommen ist, fliegt sie einen Augenblick parallel mit dem Horizont. Nachdem die Kugel ihren Culminationspunkt passirt hat, wird $\operatorname{tg}\theta$ negativ, d. h. der Winkel θ wird negativ, oder die Richtung wird entgegengesetzt der ursprünglichen AB. Nach Verlauf der ganzen Zeitdauer, in dem Augenblicke, wo die Kugel den Horizont wieder erreicht, für $t=\frac{c.\sin\alpha}{g}$ nach 5), erhalten wir $\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}\alpha$.

Es kann ferner nach der Geschwindigkeit der Kugel nach Verlauf irgend welcher Zeit gefragt werden. Dazu müssen wir folgende Betrachtung anstellen. Die Geschwindigkeit ist derjenige Quotient, welchen man erhält, wenn man den Weg durch die Zeit dividirt. Wir erhalten also die Geschwindigkeit der geworfenen Kugel in E, d. h. nach Verlauf von t Secunden, wenn wir EM durch τ dividiren, wo wir die Grenze von τ gleich Null nehmen.

$$EM=\sqrt{h^2+k^2}=\tau.\sqrt{c^2\cos^2\alpha+(c.\sin\alpha-2gt-g\tau)^2}.$$

Es ergiebt sich daher:

$$10)\quad \text{Geschwind. nach Verlauf von } t \text{ Sec.}=\sqrt{c^2.\cos^2\alpha+(c.\sin\alpha-2gt)^2},$$

$$\text{Grenze von } \tau=0.$$

Dieser Ausdruck ist ein Maximum für $t=0$ und $t=\frac{c.\sin\alpha}{g}$, den letzten möglichen Ausdruck für t, d. h. am Anfange und am Ende des Wurfes, wo wir alsdann die Geschwindigkeit c erhalten. Dagegen ist der Ausdruck ein Minimum für $c.\sin\alpha-2gt=0$, d. h. für $t=\frac{c.\sin\alpha}{2g}$ oder nach 5) in der Mitte des Wurfes, wenn die Kugel auf ihrem höchsten Punkte angekommen ist. In dem höchsten Punkte hat jeder geworfene Körper die Geschwindigkeit $c.\cos\alpha$. Bei dem senkrechten Schusse also giebt es einen Augenblick, wo die Geschwindigkeit der Kugel Null ist.

Der Ausdruck für die Geschwindigkeit der Kugel hat noch die praktische Bedeutung, dass er uns in jedem Augenblicke die Kraft des Schusses angiebt, z. B. anzeigt, dass die Kugel beim senkrechten Schusse auf ihrem höchsten Punkte todt ist.

Es bleibt nun noch übrig, die Frage zu beantworten über die Beschaffenheit der Curve, welche die Kugel beschreibt. Zu diesem Zwecke denke ich mir den Anfangspunkt des senkrechten Coordinatensystems in den höchsten Punkt O gelegt und nehme als Abscissenaxe an das auf den Horizont gefällte Loth OP. Die positive Halbaxe der Ordinaten denke ich mir nach der Seite gerichtet, wo der Anfangspunkt A des Wurfes liegt. Ist nun die Kugel in E angekommen, so ist $EG=y$, $OG=x$. Es handelt sich darum, zwischen beiden Grössen y und x eine Gleichung aufzustellen.

$$y=AP-AF.$$

Es ist aber AP nach 6) $=\frac{c^2.\sin 2\alpha}{4g}$, dagegen $AF=ct.\cos\alpha$, woraus folgt:

$$11)\quad y=\frac{c^2.\sin 2\alpha}{4g}-ct.\cos\alpha.$$

Dagegen ist

$$x=OP-EF,$$

$$12)\quad x=\frac{c^2.\sin^2\alpha}{4g}-ct.\sin\alpha+gt^2.$$

Man kann nun aus 11) t berechnen

$$=\frac{c.\sin 2\alpha}{4g.\cos\alpha}-\frac{y}{c.\cos\alpha}=\frac{c.\sin\alpha}{2g}-\frac{y}{c.\cos\alpha},$$

$$t^2=\frac{c^2.\sin^2\alpha}{4g^2}+\frac{y^2}{c^2.\cos^2\alpha}-\frac{y.\sin\alpha}{g.\cos\alpha}.$$

Setzt man diese Werthe für t und t^2 in 12) ein, so erhält man:

$$13)\quad x=\frac{g}{c^2.\cos^2\alpha}.y^2 \text{ oder } y^2=\frac{c^2.\cos^2\alpha}{g}.x.$$

Die Curve AEO, welche die geschossene Kugel beschreibt, ist also eine Parabel, deren Parameter, d. h. der Abstand ihres Brennpunktes von der Leitlinie, $=\frac{c^2.\cos^2\alpha}{2g}$ ist. Die Beschaffenheit dieser Parabel hängt also ab von den drei Werthen g, c, α.

Jedes Element der Parabel ist

$$= \tau . \sqrt{c^2 . \cos^2\alpha + (c . \sin\alpha - 2gt)^2}$$

(vergl. die Entwickelung vor Nr. 10) oder

$$= \tau . \sqrt{c^2 - 4cg \sin\alpha . t + 4g^2 . t^2}.$$

Es ist demnach leicht, die Länge des Weges, welchen die Kugel beschreibt, von A bis E nach Verlauf der Zeit t zu berechnen; wir finden:

$$14)\quad \text{Bahn} = \int_{t=0}^{t=t} dt . \sqrt{c^2 - 4cg \sin\alpha . t + 4g^2 . t^2}.$$

Beim ganzen Wege ist die obere Grenze des bestimmten Integrals $t = \frac{c . \sin\alpha}{g}$.

Nehmen wir das obige unbestimmte Integral mit Weglassung der Constante, so finden wir:

$$15)\quad \int dt \sqrt{c^2 - 4cg\sin\alpha . t + 4g^2t^2} = \frac{2gt - c\sin\alpha}{4g} . \sqrt{c^2 - 4cg\sin\alpha . t + 4g^2t^2}$$

$$+ \frac{c^2\cos^2\alpha}{4g} . \log\{2gt - c\sin\alpha + \sqrt{c^2 - 4cg\sin\alpha . t + 4g^2t^2}\}$$

$$= \frac{G}{4g}\sqrt{c^2\cos^2\alpha + G^2} + \frac{c^2\cos^2\alpha}{4g}\log\{G + \sqrt{c^2\cos^2\alpha + G^2}\},$$

$$\text{wo}\quad G = 2gt - c\sin\alpha.$$

Für den ganzen Weg hat man als obere Grenze $t = \frac{c . \sin\alpha}{g}$ und als untere Grenze $t = 0$ einzusetzen, und man erhält:

$$16)\quad \text{die Bahnlänge} = \frac{c^2\sin\alpha}{2g} + \frac{c^2\cos^2\alpha}{4g} . \log\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

$$= \frac{c^2}{2g}\left[\sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{2}\log\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}\right].$$

Dieser Ausdruck wird für den senkrechten Wurf, d. h. für $\alpha = 90^0$, gleich $\frac{c^2}{2g}$, was mit 7) übereinstimmt, d. h. gleich der grössten Weite bei 45^0.

Es ist hier immer der natürliche Logarithmus gemeint für die Basis $e = 2{,}7182818\ldots.$

Der erste Differenzialquotient des Ausdrucks für die Bahn ist

$$\frac{c^2 \cos\alpha}{2g}\left[2 - \sin\alpha . \log\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right].$$

Setzt man den in der Klammer befindlichen Ausdruck gleich Null, so findet man nahezu $\alpha = 56^0\ 27'\ 57''$, während der zweite Differenzialquotient dann negativ wird, also die Bahn selbst ein Maximum. Alsdann erhält man für die Länge der Bahn $\frac{c^2}{2g} . 1{,}1996786$, d. h. dieselbe ist in ihrem Maximum um beinahe ein Fünftel länger als die grösste Weite (bei 45^0). Berechnet man die Länge der Bahn für $\alpha = 45^0$, so erhält man einen viel kleineren Ausdruck, nämlich das 1,1477937fache der grössten Weite, d. h. die Bahn ist dann etwas länger als der siebente Theil der Weite des Wurfes.

Den Ausdruck $\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ kann man auch umformen in $\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(90^0 + \alpha)$, wodurch sich die Rechnungen noch mehr vereinfachen. Die Bahn selbst ist dann

$$\frac{c^2}{2g}\left[\sin\alpha + \cos^2\alpha . \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(90^0 + \alpha)\right].$$

Um das Maximum von der Länge der Bahn zu finden, hat man die Gleichung

$$1 - \sin\alpha . \log\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) = 0$$

nach α aufzulösen.

V.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Franz Unferdinger, Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

1. Es sind aus folgenden vier Gleichungen die vier Unbekannten x_1, x_2, y_1, y_2 zu bestimmen:

$$y_1 = e^{x_1} + e^{-x_1}, \quad y_2 = e^{x_2} + e^{-x_2}, \quad x_1 + x_2 = 2\alpha, \quad y_1 + y_2 = 2\beta.$$

2. Es soll gezeigt werden, dass der folgende Ausdruck A eine symmetrische Function von a, b, c ist:

$$A = \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(b+c-a) + \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c)}.$$

3. Wenn h und F constante Grössen bezeichnen, $k = e^{\frac{2\xi}{h}}$ ist und η als Function von ξ betrachtet wird, so soll aus folgender Gleichung $\frac{d\eta}{d\xi}$ durch Differenziation bestimmt werden:

$$F = h\eta \lg \cdot \frac{2k\eta + \sqrt{(2k\eta)^2 - h^2k(1+k)^2}}{2k\eta - \sqrt{(2k\eta)^2 - h^2k(1+k)^2}} - \frac{h}{k}\sqrt{(2k\eta)^2 - h^2k(1+k)^2}.$$

Resultat:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{k-1}{k+1} \frac{\sqrt{(2k\eta)^2 - h^2k(1+k)^2}}{hk} : \lg \cdot \frac{2k\eta + \sqrt{(2k\eta)^2 - h^2k(1+k)^2}}{2k\eta - \sqrt{(2k\eta)^2 - h^2k(1+k)^2}}.$$

VI.

Miscellen.

Bemerkungen zur analytischen Geometrie.

Von dem Herausgeber.

Besonders bequem für viele Untersuchungen ist der folgende Ausdruck der Bedingungsgleichung, dass drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden.

Die drei geraden Linien seien bestimmt durch die Punkte:

$$(x'y'),\ (X'Y');\quad (x''y''),\ (X''Y'');\quad (x'''y'''),\ (X'''Y''');$$

so sind ihre Gleichungen:

$$y-y'=\frac{Y'-y'}{X'-x'}(x-x'),$$

$$y-y''=\frac{Y''-y''}{X''-x''}(x-x''),$$

$$y-y'''=\frac{Y'''-y'''}{X'''-x'''}(x-x''');$$

und wenn nun X, Y die Coordinaten ihres gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts sind, so hat man die drei folgenden Gleichungen:

$$Y-y'=\frac{Y'-y'}{X'-x'}(X-x'),$$

$$Y-y''=\frac{Y''-y''}{X''-x''}(X-x''),$$

$$Y-y'''=\frac{Y'''-y'''}{X'''-x'''}(X-x''');$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$(X'-x')Y-(Y'-y')X=y'(X'-x')-x'(Y'-y'),$$
$$(X''-x'')Y-(Y''-y'')X=y''(X''-x'')-x''(Y''-y''),$$
$$(X'''-x''')Y-(Y'''-y''')X=y'''(X'''-x''')-x'''(Y'''-y''').$$

Multipliciren wir diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$(X''-x'')(Y'''-y''')-(Y''-y'')(X'''-x'''),$$
$$(X'''-x''')(Y'-y')-(Y'''-y''')(X'-x'),$$
$$(X'-x')(Y''-y'')-(Y'-y')(X''-x'')$$

und addiren sie dann zu einander, so erhalten wir die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned}0=&\{y'(X'-x')-x'(Y'-y')\}\{(X''-x'')(Y'''-y''')-(Y''-y'')(X'''-x''')\}\\&+\{y''(X''-x'')-x''(Y''-y'')\}\{(X'''-x''')(Y'-y')-(Y'''-y''')(X'-x')\}\\&+\{y'''(X'''-x''')-x'''(Y'''-y''')\}\{(X'-x')(Y''-y'')-(Y'-y')(X''-x'')\},\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}0=&(x'-x'')(Y'-y')(Y''-y'')(X'''-x''')+(y'-y'')(X'-x')(X''-x'')(Y'''-y''')\\&+(x''-x''')(Y''-y'')(Y'''-y''')(X'-x')+(y''-y''')(X''-x'')(X'''-x''')(Y'-y')\\&+(x'''-x')(Y'''-y''')(Y'-y')(X''-x'')+(y'''-y')(X'''-x''')(X'-x')(Y''-y''),\end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned}0=&(x'Y'-y'X')\{(X''-x'')(Y'''-y''')-(Y''-y'')(X'''-x''')\}\\&+(x''Y''-y''X'')\{(X'''-x''')(Y'-y')-(Y'''-y''')(X'-x')\}\\&+(x'''Y'''-y'''X''')\{(X'-x')(Y''-y'')-(Y'-y')(X''-x'')\}.\end{aligned}$$

Setzt man z. B.

$$X'=\tfrac{1}{2}(x''+x'''),\quad Y'=\tfrac{1}{2}(y''+y''');$$
$$X''=\tfrac{1}{2}(x'''+x'),\quad Y''=\tfrac{1}{2}(y'''+y');$$
$$X'''=\tfrac{1}{2}(x'+x''),\quad Y'''=\tfrac{1}{2}(y'+y'');$$

so zeigen sich die obigen Gleichungen identisch erfüllt, woraus der bekannte Satz vom ebenen Dreieck folgt, dass die drei Gera-

den, welche die Spitzen des Dreiecks mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, sich immer in einem Punkte schneiden.

Liegen die drei Punkte

$$(X'Y'),\quad (X''Y''),\quad (X'''Y''')$$

respective auf den, den Punkten

$$(x'y'),\quad (x''y''),\quad (x'''y''')$$

gegenüberliegenden Seiten des durch die drei letzteren Punkte bestimmten Dreiecks, so ist:

$$Y'-y''=\frac{y''-y'''}{x''-x'''}(X'-x''),$$

$$Y''-y'''=\frac{y'''-y'}{x'''-x'}(X''-x'''),$$

$$Y'''-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(X'''-x')$$

oder:

$$Y'-y'+(y'-y'')=\frac{y''-y'''}{x''-x'''}\{(X'-x')+(x'-x'')\},$$

$$Y''-y''+(y''-y''')=\frac{y'''-y'}{x'''-x'}\{(X''-x'')+(x''-x''')\},$$

$$Y'''-y'''+(y'''-y')=\frac{y'-y''}{x'-x''}\{(X'''-x''')+(x'''-x')\};$$

woraus, wenn man der Kürze wegen

$$\Delta=(x'y''-y'x'')+(x''y'''-y''x''')+(x'''y'-y'''x')$$

setzt, sogleich die drei folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$(x''-x''')(Y'-y')-(y''-y''')(X'-x')=\Delta,$$

$$(x'''-x')(Y''-y'')-(y'''-y')(X''-x'')=\Delta,$$

$$(x'-x'')(Y'''-y''')-(y'-y'')(X'''-x''')=\Delta;$$

die sich durch ihre symmetrische Form gleichfalls für manche Untersuchungen empfehlen.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Franz Unferdinger zu Triest an den Herausgeber.

In letzterer Zeit beschäftigte ich mich mit der Untersuchung des sphärischen Dreieckes in Bezug auf die Radien seiner eingeschriebenen und umschriebenen Kreise, und bin dabei zu einer ziemlichen Anzahl interessanter Relationen gelangt, von welchen ich Ihnen einige hier mitzutheilen mir erlaube, in der Absicht, Ihnen später darüber ausführlich zu berichten. — Bezeichnet man die Radien der vier Berührungskreise mit $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, den Radius des umschriebenen Kreises mit r und mit r_1, r_2, r_3 die Radien der den drei Nebendreiecken umschriebenen Kreise, so ist

$$\operatorname{tg}\varrho=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)},\quad \operatorname{tg}\varrho_1=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)},\quad \operatorname{tg}\varrho_2=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)},$$

u. s. w.,

$$\operatorname{tg}r=\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{H_1}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right),$$

$$\operatorname{tg}r_1=\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}{H_1}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right),\text{ u. s. w.}$$

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon=$$

$$\frac{4\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right)}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right)},$$

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{\operatorname{tg}r}{\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3},\text{ u. s. w.,}$$

wobei

$$H_1{}^2=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$
$$=\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3$$

und ε der sphärische Excess des Dreieckes ist.

De vero valore constantis, quae in logarithmo integrali occurrit.

Auct. Dre. Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengn.

In supplementis (II. pag. 813.), quibus Celus Grunert Lexi-

con Klügelianum auxit et locupletavit, duo hujus constantis ($=C$) valores exsistunt. Mascheroni invenit

$$C = 0{,}577215664901532860618112090082 39 \quad ;$$

et Soldner

$$C = 0{,}5772156649015328606065.$$

Quoniam decimales horum valorum XX^{a}, XXI^{a}, XXII^{a} inter se discrepant, mihi venit in mentem quaerere, quid verus valor esset. Constans illa multis modis computata est; quod si multae decimales desiderantur, via, quam secutus est Eytelwein (Grundlehren II. pag. 643., 644.), facillima videtur. Si igitur in formula cognita (Grunert, Suppl. I. p. 599.):

$$\overset{x=x}{\underset{x=1}{S}} \varphi(x) = C' + \int \varphi(x)dx + \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{B_3}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} + \text{etc.}$$

ponimus $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, invenitur

$$\overset{x=x}{\underset{x=1}{S}} \frac{1}{x} = C + lx + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_3}{4x^4} - \frac{B_5}{6x^6} + \text{etc} \; ,$$

ubi est C constans, de qua agitur. Posita serie

$$\frac{1}{2x} + \frac{B_1}{2x^2} - \frac{B_3}{4x^4} + \frac{B_5}{6x^6} - \text{etc.} = G\frac{1}{x},$$

habebimus

$$C = G1,$$

$$\overset{x=x}{\underset{x=1}{S}} \frac{1}{x} = G1 + lx + \frac{1}{x} - G\frac{1}{x}$$

vel, $x = n+1$ posita,

$$G1 = \overset{x=n+1}{\underset{x=1}{S}} \frac{1}{x} + G\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - l(n+1)$$

vel

$$C = \overset{x=n}{\underset{x=1}{S}} \frac{1}{x} + G\frac{1}{n+1} - l(n+1).$$

Numero $n = 99$ posito, inveni:

$$\overset{x=99}{\underset{x=1}{S}}\ \frac{1}{x}=5{,}17737751763962026080511767565825316$$

$$+\,G\frac{1}{100}=0{,}00500833325000396783737732379287772$$

$$5{,}18238585088962422864249499945113088$$

$$-\,l100=4{,}60517018598809136803598290936872841$$

$$C=0{,}57721566490153286060651209008240247.$$

Valores $\overset{x=99}{\underset{x=1}{S}}\ \frac{1}{x}$, $G\frac{1}{100}$ ipse computavi et e ratione, qua usus sum, sequitur, ut in $\overset{x=99}{\underset{x=1}{S}}\ \frac{1}{x}$ decimales XXXIII veri sint. $l100$ e tabulis Calleti sumpsi. Ne quid incerti hac in re maneret, constantem denuo computavi, posito $n=19$. Ita inveni

$$\overset{x=19}{\underset{x=1}{S}}\ \frac{1}{x}=3{,}5477396571436819114837691$$

$$+\,G\frac{1}{20}=0{,}0252082813118419425579669$$

$$3{,}5729479384555238540417360$$

$$-\,l20=2{,}9957322735539909934352236$$

$$C=0{,}5772156649015328606065124,$$

ubi XXIII decimales certo sunt verae. Sequitur, ut valor a Soldner datus recte se habeat.

B e r i c h t i g u n g e n.

Theil XXVI.

S. 476. Z. 2. v. u. statt $x=0$ setze man $x=a$.
„ 479. „ 5. v. o. „ $26x^2y$ „ „ $26x^2y$.

Theil XXVII.

S. 6. Z. 9. v. o. statt „major“ setze man „minor.“

„ 296. „ 9. v. u. „ $\frac{c\,\mathrm{Cos}(B-y)}{x_1}$ setze man $\frac{c\,\mathrm{Cos}(B-y)-x}{x_1}$.

„ 296. „ 3. v. u. „ $1-\frac{c\,\mathrm{Cos}(B-y)}{x_1}-\frac{a\,\mathrm{Cos}\,y}{x_2}=0$ setze man

$$1-\frac{c\,\mathrm{Cos}(B-y)-x}{x_1}-\frac{a\,\mathrm{Cos}\,y-x}{x_2}=0.$$

„ 297. „ 11. v. o. „ $\frac{a\,\mathrm{Cos}\,y}{x_2}$ setze man $\frac{a\,\mathrm{Cos}\,y-x}{x_2}$.

Literarischer Bericht
CXIV.

Arithmetik.

Theorie und Anwendung der Determinanten. Mit Beziehung auf die Originalquellen dargestellt von Doctor Richard Baltzer, Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Dresden. Leipzig. (Hirzel.) 1857. hoch 4°.

Im Literar. Ber. Nr. CVIII. S. 4. haben wir die schöne Schrift von Francesco Brioschi in der mit einer Vorrede des Herrn Prof. Schellbach in Berlin versehenen deutschen Uebersetzung von Herrn Oberlehrer Bertram in Berlin angezeigt. Herr Doctor Baltzer sagt in der Vorrede zu seiner Schrift: „Dass er den Muth gehabt habe, seine Schrift neben und nach der Schrift von Brioschi herauszugeben, gründe sich hauptsächlich auf die Verschiedenheit in der Anlage und Ausführung seiner Arbeit. Um den theoretischen Kern des Gegenstandes möglichst rein herauszuschälen, habe er die Haupteigenschaften der Determinanten und die darauf gegründeten Algorithmen in synthetisch genau articulirtem Vortrage, wie er den Lehrbüchern von Alters her eigne, abgehandelt und, wo es nöthig schien, durch einfache Beispiele erläutert. Es könne zur klaren Einsicht in die Lehrsätze eines Systems nur erwünscht sein, bei jedem Lehrsatze die Summe der Prämissen, auf denen er beruht, immer gegenwärtig zu sehen. Dagegen habe er die Anwendungen auf Algebra, Analysis und Geometrie in einen besonderen Abschnitt vereinigt, um durch grösseren Zusammenhang leichtere Auffassung und in den einzelnen Materien eine gewisse Vollständigkeit erreichen zu können. Ueberall aber habe er mit unablässigem Bemühen den Lehrsätzen und Beweisen möglichste Präcision zu verleihen gesucht,

wo sie derselben noch zu entbehren schienen. Bei Annahme von Bezeichnungen und Benennungen in diesem Gebiete habe er ängstliche Vorsicht anwenden zu müssen geglaubt, weil die neuere Mathematik ohnedies von manchen Ausschweifungen zügelloser Terminologie mit Sprachverwirrung bedroht werde*). Besonders aber habe er gewünscht, seiner Arbeit dadurch einigen Werth zu verleihen, dass er so viel als möglich bis zu den Originalquellen vorzudringen suchte, um die ersten Erfinder von Methoden und die ersten Entdecker von Lehrsätzen citiren zu können. Solche Citate seien nicht nur ein Opfer, welches die spätere Zeit den früheren Offenbarungen des Genius schulde, sie bilden ein Stück Geschichte der Wissenschaft und laden zum Studium der hohen Werke ein, aus denen die Wissenschaft aufgebaut ist, und in denen noch immer reiche Schätze ruhen. Freilich könne er nicht erwarten, dass sein Suchen hierbei allemal zum Finden des Richtigen geführt habe; er hoffe aber, dass verlautete Irrthümer zu gelegentlicher Aussprache des Richtigen Veranlassung geben würden." — Wir haben über diese so bescheidenen Aeusserungen über eine wahrhaft tüchtige, offenbar mit grosser Liebe zur Sache von ganz selbstständigem Standpunkte aus unternommene Arbeit eine grosse Freude gehabt, und stimmen dem Herrn Verfasser im Allgemeinen überall vollständig bei, namentlich aber auch darin, dass seine Arbeit neben der allerdings trefflichen Arbeit von Brioschi aus den von ihm selbst angegebenen Gründen sehr wohl bestehen kann und ihren eigenthümlichen Werth hat. Will uns jedoch der Herr Verfasser erlauben, uns selbst noch auszusprechen, worin wir den Hauptunterschied zwischen beiden Arbeiten finden, so wollen wir bemerken, dass uns derselbe hauptsächlich darin zu liegen scheint, dass der Charakter der Darstellungsweise seiner Schrift hauptsächlich und vorherrschend ein combinatorischer ist und schon darin den deutschen Mathematiker erkennen lässt, dass dagegen der italienische, vorzugsweise der französischen Darstellungsweise sich zuneigende Mathematiker darin sich kund giebt, dass seine Entwickelungen, wenn auch allerdings vielfach combinatorischer Natur, doch auf einem weit mehr eigentlich analytischen oder calculatorischen Wege zu den gesuchten Resultaten gelangen.

---

*) Eine sehr richtige und sehr zu beherzigende Bemerkung! Man denke nur z. B. an die Ohm'schen babylonischen Thürme in dieser Beziehung! an denen aber, Gott sei Dank, freilich jetzt nicht mehr gebaut wird, und die daher dem vollständigen Einsturze sehr nahe sind.
G.

Was wir hiemit ganz in der Kürze sagen und andeuten wollen, wird Jeder wissen, wer den Entwickelungsgang der ganzen analytischen Wissenschaft nach den verschiedenen Richtungen hin genau kennt und sorgfältig verfolgt hat; grösserer Ausführlichkeit bedarf es hier nicht. Aber eben dieser verschiedenartige Charakter beider Schriften ist für uns interessant gewesen, und bestimmt uns, nochmals auszusprechen, dass wir vollkommen der Meinung sind, dass beide sehr wohl neben einander bestehen können, und dass jede ihren eigenthümlichen Werth hat, weshalb wir auch nicht anstehen, die neue Baltzersche Schrift unseren Lesern recht sehr zur Beachtung zu empfehlen, ganz eben so, wie wir dies früher mit der Schrift von Brioschi gethan; das Studium derselben wird einem Jeden vielfache Belehrung gewähren, wobei wir uns auf die oben von uns angegebenen, von dem Herrn Verfasser selbst namhaft gemachten Gesichtspunkte beziehen.

Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apost. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der Sternwarte. Dritter Folge Sechster Band. Jahrgang 1856. Wien. 1857. 8.

Wir freuen uns sehr, wieder einen neuen Band der Annalen der so thätigen k. k. Sternwarte in Wien anzeigen zu können, durch deren überaus regelmässige Publicirung ihr so vielfach verdienter Director, Herr v. Littrow, sich ein grosses Verdienst um die Wissenschaft erwirbt, und wünschen sehr, dass er in dieser so erfolgreichen und wichtigen Thätigkeit nie ermüden möge. Der Inhalt dieses Bandes ist folgender: Resultate der Planeten-Beobachtungen am Meridiankreise in den Jahren 1844 bis 1850. — Beobachtungen der neuen Planeten am Refractor in den Jahren 1853 bis 1856 von Doctor K. Hornstein, Adjuncten der k. k. Sternwarte, wobei wir bemerken, dass überhaupt alle Refractorbeobachtungen an der Wiener Sternwarte von Herrn Doctor Hornstein herrühren und von demselben redigirt werden. — Den Schluss, als Fortsetzung von Annalen Folge 3. Band III., bilden Zusätze und Verbesserungen zu dem Kataloge der nördlichen Argelanderschen Zonenbeobachtungen von Herrn Wilhelm Oeltzen, Assistenten der Sternwarte. — Neben diesen eigentlichen astro-

nomischen Beobachtungen werden auch meteorologische Beobachtungen in den Kreis der Arbeiten der Wiener Sternwarte gezogen, die sich auf Barometer, Thermometer, Dunstdruck, Wind, Witterung, Maximum- und Minimum-Thermometer und Ombrometer, allgemeine Bemerkungen beziehen, und täglich dreimal: 6 Uhr Morgens, 2 Uhr Nachmittags, 10 Uhr Abends angestellt werden; von diesen meteorologischen Beobachtungen liegen uns die von Herrn Adolf Joseph Pick sorgfältig reducirten und zusammengestellten Jahrgänge 1851, 1852, 1853, 1854, 1855 vor.

Vermischte Schriften.

Annali di scienze matematiche e fisiche compilati da Barnaba Tortolini. (Vergl. Lit. Ber. Nr. CXII. S. 7.)

Gennajo 1857. Sulla partizione dei numeri. Nota del Sig. Prof. Francesco Brioschi. p. 5. — Teorema de Sig. Sylvester. Sulla partizione dei numeri (Estratto dal 2^0. Quaterly Journal ec. e dall' illustre autore comunicato al redattore nell' epoca della sua dimora in Napoli.) p. 12. — Sulla partizione dei numeri. Nota del Sig. Prof. Paolo Volpicelli. p. 22. — Sulle variazioni periodiche del magnetismo terrestre. Memoria seconda de P. A. Secchi D. C. D. G. p. 27.

VII.

Theorie der wahren und scheinbaren Bewegung eines nach den Gesetzen der allgemeinen Schwere die Sonne umkreisenden Weltkörpers, mit besonderer Rücksicht auf die Aufgabe von der Bestimmung der Bahn aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Das grosse Problem, in welchem alle Untersuchungen der theorischen Astronomie zuletzt wie in einem gemeinschaftlichen Brennpunkte zusammenlaufen, ist die Aufgabe: „die Bahn eines nach den Gesetzen der allgemeinen Gravitation um einen Centralkörper sich bewegenden Weltkörpers aus drei vollständigen Beobachtungen desselben zu bestimmen.“ Dieses Problem bildet auch den Hauptinhalt der „Theoria motus“ von Gauss, und die von diesem grossen Geometer gegebene Auflösung ist, wenigstens in Deutschland, in der Astronomie gegenwärtig allgemein im Gebrauch. Was die theoretische Darstellung dieser Auflösung betrifft, so wird schwerlich Jemand in Abrede zu stellen geneigt sein, dass es besondere Schwierigkeiten hat, dieselbe in ihrem innersten Wesen vollständig zu durchdringen, wovon der Grund allerdings wohl hauptsächlich in der von dem berühmten Geometer gebrauchten, weit mehr synthetischen als analytischen Darstellungsweise zu suchen ist; jedoch ist dies nach meiner Meinung nicht der alleinige Grund, indem es, wie mir scheint, noch tiefer liegende Gründe giebt, die selbst gewisse Zweifel erregen können, ob durch die gegebene, eine ziemlich grosse Anzahl vorbereitender Rechnungen in Anspruch nehmende Auflösung wirklich ganz im Allgemeinen eine fortwährende successive Annäherung erreicht wird, oder ob dieselbe vielmehr nur in einem gewissen eingeschränkteren, der praktischen Anwendung übrigens wahrscheinlich

keinen wesentlichen Eintrag thuenden Sinne erreicht wird, wobei ich ausdrücklich hervorhebe, dass der Umstand, dass alle numerischen Rechnungen in der That zu einer solchen successiven Annäherung geführt haben, durchaus noch kein Beweis a posteriori ist, dass die successive Annäherung nicht vielleicht bloss in einem gewissen eingeschränkteren Sinne, also in Bezug auf das vorliegende Problem nicht in völliger Allgemeinheit, stattfinde und vor sich gehe. Es ist aber gar nicht meine Absicht, meine Ansichten hierüber an diesem Orte weiter zu entwickeln, was einen viel zu grossen Raum in Anspruch nehmen und eine besondere Abhandlung erfordern würde.

Eine andere Auflösung unsers Problems hat Lagrange in der Mécanique analytique. Tome II. Nouvelle édition. Paris 1815. Septième section. §. III. gegeben, ganz in derselben überaus lichtvollen, alle wesentlichen Punkte mit der grössten Deutlichkeit hervorhebenden Weise, welche die sämmtlichen Arbeiten dieses grossen Mathematikers so sehr auszeichnet. Die von Pontecoulant in seinem bekannten Werke gegebene Auflösung ist eigentlich nur als eine weitere Ausführung der Lagrange'schen Auflösung zu betrachten, welche derselben wesentlich Neues nicht hinzufügt, übrigens sich ziemlich häufige Vernachlässigungen und Abkürzungen gestattet, die nicht immer vollständig gerechtfertigt und theilweise in der That etwas gewagt erscheinen. Hauptsächlich hat man bei der Lagrange'schen Methode als ein ihrer vortheilhaften Anwendung entgegenstehendes Moment geltend gemacht, dass sie eine fortwährende successive Annäherung nicht gestatte, was allerdings auch bei der von ihrem berühmten Urheber gebrauchten Darstellungsweise ganz richtig ist.

In der vorliegenden Abhandlung habe ich eine neue Auflösung des berühmten Problems gegeben, welche zwar mit der Lagrange'schen Auflösung im Wesentlichen auf gleichen Gründen beruhet, aber, wie ich hoffe, klar zeigt, dass diese Auflösung in veränderter Darstellung sehr wohl auch eine fortwährende successive Annäherung gestattet, und sich überhaupt nie und nirgends annähernde Voraussetzungen erlaubt, über deren Einfluss auf das Resultat sich nicht ein sicheres Urtheil fällen lässt, wobei ich mir noch besonders hervorzuheben erlaube, dass ich bei dieser Auflösung die Näherung durchaus nur von den verschiedenen Potenzen der sogenannten Constante des Sonnensystems abhängig gemacht habe, was wenigstens mit derselben vollständigen Consequenz wie hier früher noch nicht geschehen ist, mir aber in der That der theoretisch allein richtige Weg bei diesen Untersuchungen zu sein scheint. Auch ist die Auflösung ganz allgemein für jede Art des

Kegelschnitte anwendbar, und führt zu sicheren Criterien über die Art des Kegelschnitts in jedem besonderen Falle. Dabei bin ich zugleich zu einer ziemlich grossen Anzahl neuer, nach meiner Meinung zum Theil sehr bemerkenswerther analytischer Ausdrücke in Bezug auf die allgemeine Theorie der nach den Gesetzen der allgemeinen Gravitation vor sich gehenden Bewegung geführt worden, die ich der Aufmerksamkeit der Leser zu empfehlen mir erlaube, aber hier natürlich nicht einzeln namhaft machen kann, indem ich nur noch im Allgemeinen hinzufüge, dass diese Ausdrücke besonders bei der Berechnung der eigentlichen Elemente der Bahn vortreffliche Dienste leisten können. Auf die von mir bei der näherungsweisen Auflösung der betreffenden Gleichungen angewandten Methoden, die immer auf eine zwischen bestimmt angebbaren möglichst engen Gränzen eingeschlossene Grösse zurückgehen, erlaube ich mir gleichfalls noch besonders hinzuweisen.

Ausser der so eben näher besprochenen Auflösung der Aufgabe von der Bestimmung der wahren Bahn aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen habe ich noch eine zweite Auflösung dieser Aufgabe gegeben, die sich unmittelbar an die Bestimmung der scheinbaren Bahn anschliesst und aus dieser letzteren abgeleitet wird, lege aber hierauf weniger praktischen als theoretischen Werth, in Bezug auf die von mir mit grosser analytischer Allgemeinheit entwickelten Eigenschaften der scheinbaren Bahn, worüber schon früher Cauchy einige speciellere Untersuchungen angestellt hat, die ich unlängst in einem, in den Astronomischen Nachrichten. Band XLIII. 1856. S. 145. abgedruckten Aufsatze in systematischer Folge zusammengestellt und auf eigenthümliche Art bewiesen habe, da sie sich sonst nur sehr zerstreut in verschiedenen Jahrgängen der Comptes rendus finden. Bei den vorliegenden Untersuchungen habe ich, wie schon erwähnt, alle mögliche Allgemeinheit zu erreichen gesucht, und eine ziemliche Anzahl neuer Beziehungen hinzugefügt. Eine hierher gehörende Untersuchung hat schon Lambert im vorigen Jahrhundert angestellt, und ist insbesondere zu einem berühmten Satze (Mémoires de Berlin. 1771. pag. 352.) gelangt, mittelst welches man aus der Gestalt der scheinbaren Bahn beurtheilen kann, ob zur Zeit der Beobachtung die Entfernung des Weltkörpers von der Sonne grösser oder kleiner war als die Entfernung der Erde von der Sonne. Die Untersuchungen von Lambert über diesen Gegentsand halte ich aber für sehr wenig genügend, und bin der Meinung, dass der von ihm gegebene Ausdruck seines Satzes nicht der wahre ist, derselbe also auch in dieser Gestalt wenig Werth für die Praxis hat. Den

allein wahren analytischen Ausdruck dieses allerdings sehr merkwürdigen Satzes, mit allen dabei zur Geltung kommenden analytischen Bedingungen, wodurch derselbe nach meiner Meinung auch erst fruchtbar für die Anwendung wird, glaube ich in dem letzten Anhange zu dieser Abhandlung gegeben zu haben, und erlaube mir daher denselben schliesslich noch besonders der Aufmerksamkeit der Leser zu empfehlen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Bewegung eines Weltkörpers um die Sonne.

§. 1.

Wir wollen uns zwei Körper denken, welche vermöge der allgemeinen Gravitation, und ganz nach deren Gesetzen, entweder anziehend oder abstossend, auf einander wirken. Die Massen dieser beiden Körper seien M und m. Indem wir uns nun vornehmen, die Bahn des Köpers m in Bezug auf den Körper M, oder um denselben, zu bestimmen, legen wir ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume zu Grunde, und bezeichnen in Bezug auf dieses Coordinatensystem, immer ein bestimmtes Zeitmoment, welchem die von einem bestimmten Anfange an gerechnete Zeit t entspricht, im Auge habend, in diesem Zeitmomente die Coordinaten des Körpers M durch X, Y, Z. Denken wir uns dann durch den Körper M, in welcher Lage im Raume er sich auch befinden mag, ein dem angenommenen festen primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem gelegt, und bezeichnen in diesem Systeme, also in Bezug auf M als Anfangspunkt, die Coordinaten des Körpers m durch x, y, z; so sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten $X+x$, $Y+y$, $Z+z$ die primitiven Coordinaten des Körpers m.

Bezeichnen wir nun die Entfernung des Körpers m von dem Körper M durch r, alle Grössen natürlich immer auf die Zeit t bezogen, so ist die Wirkung des Körpers M auf den Körper m nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation:

$$\frac{M}{r^2},$$

und diese Wirkung ist von m nach M hin oder von M nach m hin gerichtet, jenachdem der Körper M anziehend oder abstossend auf den Körper m wirkt. Bezeichnen wir also die 180° nicht über-

steigenden Winkel, welche die von M nach m hin gezogene Linie mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, durch φ, ψ, χ; so sind die Composanten der Kraft $\frac{M}{r^2}$ nach den drei Coordinatenaxen, jenachdem der Körper M anziehend oder abstossend auf den Körper m wirkt:

$$\frac{M}{r^2}\cos(180^0-\varphi)=-\frac{M}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{M}{r^2}\cos(180^0-\psi)=-\frac{M}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{M}{r^2}\cos(180^0-\chi)=-\frac{M}{r^2}\cos\chi$$

oder:

$$\frac{M}{r^2}\cos\varphi=+\frac{M}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{M}{r^2}\cos\psi=+\frac{M}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{M}{r^2}\cos\chi=+\frac{M}{r^2}\cos\chi;$$

also:

$$\mp\frac{M}{r^2}\cos\varphi,\ \mp\frac{M}{r^2}\cos\psi,\ \mp\frac{M}{r^2}\cos\chi;$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Körper M anziehend oder abstossend auf den Körper m wirkt. Nun ist aber offenbar:

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\ \cos\psi=\frac{y}{r},\ \cos\chi=\frac{z}{r};$$

also sind die drei in Rede stehenden Composanten:

$$\mp\frac{Mx}{r^3},\ \mp\frac{My}{r^3},\ \mp\frac{Mz}{r^3};$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Betrachten wir aber die Masse M nicht, wie bisher, immer als positiv, sondern als positiv oder als negativ, jenachdem der Körper M anziehend oder abstossend auf den Körper m wirkt, so können wir die obigen Composanten allgemein durch

$$-\frac{Mx}{r^3},\ -\frac{My}{r^3},\ -\frac{Mz}{r^3}$$

ausdrücken; und nach den Grundlehren der Mechanik haben wir daher die drei folgenden Gleichungen:

$$1)\ \ldots\ \begin{cases} \frac{\partial^2(X+x)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{Mx}{r^3}, \\ \frac{\partial^2(Y+y)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{My}{r^3}, \\ \frac{\partial^2(Z+z)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-\frac{Mz}{r^3}. \end{cases}$$

Die Wirkung des Körpers m auf den Körper M ist nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation:

$$\frac{m}{r^2},$$

und diese Wirkung ist von M nach m oder von m nach M hin gerichtet, jenachdem der Körper m anziehend oder abstossend auf den Körper M wirkt; also sind, wenn φ, ψ, χ ihre aus dem Vorhergehenden bekannte Bedeutung behalten, die Composanten der obigen Wirkung nach den drei Coordinatenaxen, jenachdem der Körper m anziehend oder abstossend auf den Körper M wirkt:

$$\frac{m}{r^2}\cos\varphi=+\frac{m}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{m}{r^2}\cos\psi=+\frac{m}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{m}{r^2}\cos\chi=+\frac{m}{r^2}\cos\chi$$

oder:

$$\frac{m}{r^2}\cos(180^0-\varphi)=-\frac{m}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{m}{r^2}\cos(180^0-\psi)=-\frac{m}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{m}{r^2}\cos(180^0-\chi)=-\frac{m}{r^2}\cos\chi;$$

also:

$$\pm\frac{m}{r^2}\cos\varphi,\ \pm\frac{m}{r^2}\cos\psi,\ \pm\frac{m}{r^2}\cos\chi;$$

wenn man die oberen oder die unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Masse m anziehend oder abstossend auf M wirkt; folglich, weil nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\ \cos\psi=\frac{y}{r},\ \cos\chi=\frac{z}{r}$$

ist:

$$\pm\frac{mx}{r^3},\ \pm\frac{my}{r^3},\ \pm\frac{mz}{r^3};$$

immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Betrachten wir aber die Masse m nicht, wie bisher, immer als positiv, sondern als positiv oder als negativ, jenachdem dieselbe anziehend oder abstossend auf M wirkt; so können wir die obigen Composanten allgemein durch

$$+\frac{mx}{r^3},\ +\frac{my}{r^3},\ +\frac{mz}{r^3}$$

ausdrücken, und haben daher nach den Grundlehren der Mechanik die folgenden Gleichungen:

$$2)\ \ldots\ \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{mx}{r^3},\ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\frac{my}{r^3},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=\frac{mz}{r^3}.$$

Ziehen wir nun die Gleichungen 2) von den Gleichungen 1) ab, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{(M+m)x}{r^3},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{(M+m)y}{r^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-\frac{(M+m)z}{r^3}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $M+m=\mu$ setzen, die Gleichungen:

$$3)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\dfrac{\mu x}{r^3}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\dfrac{\mu y}{r^3}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\dfrac{\mu z}{r^3}=0;\end{cases}$$

durch welche die Bewegung des Körpers m in Bezug auf den

Körper M, oder um denselben, offenbar charakterisirt wird. Um aber diese Bewegung des Körpers m wirklich vollständig kennen zu lernen, müssen wir die vorstehenden Gleichungen zu integriren versuchen, wozu wir jetzt übergehen wollen, indem wir dabei immer festhalten, dass im Vorhergehenden die Massen M und m als positiv oder als negativ betrachtet worden sind, jenachdem sie respective auf die Massen m und M anziehend oder abstossend wirken.

§. 2.

Um jedoch ein vollständiges Verständniss des Folgenden zu vermitteln, müssen wir, bevor wir zur Integration der drei in Rede stehenden Gleichungen wirklich übergehen, vorher noch Nachstehendes bemerken. Hätte man einen festen Punkt von der Masse $M+m=\mu$, der nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation, und zwar, jenachdem μ positiv oder negativ ist, anziehend oder abstossend auf einen anderen Punkt wirkte, von dessen Wirkung auf den ersteren Punkt ganz abgesehen würde; so lege man, um die Bewegung des zweiten Punktes kennen zu lernen, durch den ersten festen Punkt von der Masse μ als Anfang ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und bezeichne die Coordinaten des zweiten Punktes in diesem Systeme zur Zeit t durch x, y, z. Wird dann zu dieser Zeit die Entfernung der beiden Punkte von einander durch r bezeichnet, so ist nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation die Wirkung des ersten Punktes auf den zweiten:

$$\frac{\mu}{r^2},$$

indem man diese Wirkung von dem zweiten Punkte nach dem ersten, oder von dem ersten nach dem zweiten Punkte hin gerichtet annimmt, oder als anziehend oder abstossend betrachtet, jenachdem die Grösse $\mu=M+m$ positiv oder negativ ist. Bezeichnen nun φ, ψ, χ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem ersten Punkte aus nach dem zweiten Punkte hin gezogene gerade Linie r mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, so sind, jenachdem μ positiv oder negativ ist, die Composanten der obigen Wirkung nach den drei Coordinatenaxen:

$$\frac{\mu}{r^2}\cos(180^0-\varphi)=-\frac{\mu}{r^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{\mu}{r^2}\cos(180^0-\psi)=-\frac{\mu}{r^2}\cos\psi,$$

$$\frac{\mu}{r^2}\cos(180^0-\chi)=-\frac{\mu}{r^2}\cos\chi$$

oder

$$\frac{-\mu}{r^2}\cos\varphi = -\frac{\mu}{r^3}\cos\varphi,$$

$$\frac{-\mu}{r^2}\cos\psi = -\frac{\mu}{r^3}\cos\psi,$$

$$\frac{-\mu}{r^2}\cos\chi = -\frac{\mu}{r^3}\cos\chi;$$

also allgemein:

$$-\frac{\mu}{r^2}\cos\varphi,\ -\frac{\mu}{r^2}\cos\psi,\ -\frac{\mu}{r^2}\cos\chi;$$

und folglich, weil

$$\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \cos\psi = \frac{y}{r},\ \cos\chi = \frac{z}{r}$$

ist:

$$-\frac{\mu x}{r^3},\ -\frac{\mu y}{r^3},\ -\frac{\mu z}{r^3}.$$

Daher erhält man zur Bestimmung der Bahn des zweiten Punktes nach den Lehren der Mechanik die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\mu x}{r^3},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\mu y}{r^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\mu z}{r^3};$$

oder:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen 3) in §. 1., so erhellet auf der Stelle, dass die Bewegung des Körpers m in Bezug auf den Körper M, oder die relative Bewegung des Körpers m rücksichtlich des Körpers M, ganz eben so vor sich geht, als wenn die Summe $\mu = M + m$ der mit ihren gehörigen Vorzeichen genommenen Massen M und m der beiden Körper in

einem gewissen festen Punkte vereinigt wäre, und dieser Punkt nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation auf einen zweiten Punkt wirkte, von dessen Wirkung auf den ersten Punkt ganz abgesehen würde. Aus diesem letzteren Gesichtspunkte wollen wir nun alles Folgende auffassen, was zur Erhöhung der Deutlichkeit wesentlich beitragen wird.

§. 3.

Aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\mu x}{r^3}=0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\mu y}{r^3}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\mu z}{r^3}=0;$$

wo $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist, ergeben sich sehr leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0;$$

$$z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0,$$

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$\frac{\partial(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t})}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial(z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t})}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})}{\partial t}=0;$$

also, wenn C, C_1, C_2 drei willkührliche Constanten bezeichnen:

$$4) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} y\dfrac{\partial z}{\partial t}-z\dfrac{\partial y}{\partial t}=C, \\[2mm] z\dfrac{\partial x}{\partial t}-x\dfrac{\partial z}{\partial t}=C_1, \\[2mm] x\dfrac{\partial y}{\partial t}-y\dfrac{\partial x}{\partial t}=C_2. \end{array}\right.$$

Multipliciren wir diese drei Gleichungen nach der Reihe mit x, y, z, und addiren die dadurch hervorgehenden Gleichungen dann zu einander, so ergiebt sich die Gleichung

$$5) \quad \ldots\ldots \quad Cx+C_1y+C_2z=0,$$

aus welcher unmittelbar hervorgeht, dass die Bahn des Körpers m eine Curve von einfacher Krümmung ist, welche ganz in einer, durch den als Anfang der xyz angenommenen Punkt M gehenden Ebene liegt.

Wir wollen uns nun durch M als Anfang ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$ gelegt denken. Die Ebene der x_1y_1 soll mit der Ebene der xy, und die Axe der x_1 soll mit der Durchschnittslinie der Ebene der Bahn des Körpers m mit der Ebene der xy zusammenfallen. Den auf der positiven Seite der Axe der x, in der Ebene der xy genommen, liegenden Theil der Axe der x_1 wollen wir als den positiven Theil der Axe der x_1 annehmen, und der positive Theil der Axe der y_1 soll so angenommen werden, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 an durch den rechten Winkel (x_1y_1) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen. Der positive Theil der Axe der z_1 endlich soll mit dem positiven Theile der Axe der z zusammenfallen. Den von den positiven Theilen der Axen der x und x_1 eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel wollen wir durch θ bezeichnen, und der 180° nicht übersteigende Winkel, unter welchem der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegende Theil der Ebene der Bahn des Körpers m nach der Seite der Axe x_1 hin, auf welcher der positive Theil der Axe der y liegt, gegen die Ebene der xy geneigt ist, soll durch i bezeichnet werden.

Weil nach 5) die Gleichung der Durchschnittslinie der Ebene der Bahn des Körpers m mit der Ebene der xy, d. i. die Gleichung der Axe der x_1, in dem Systeme der xy

$$Cx + C_1y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{C}{C_1}x$$

ist, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$6) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \tang\theta = -\frac{C}{C_1}.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man zwischen den Coordinaten der beiden Systeme der xyz und $x_1y_1z_1$ die folgenden Gleichungen:

$$x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta,$$

$$y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta,$$

$$z = z_1;$$

und fassen wir nun einen beliebigen Punkt der Durchschnittslinie der Ebene der Bahn des Körpers m mit der Ebene der y_1z_1 in's Auge, so ist für diesen Punkt $x_1 = 0$, also nach den vorstehenden Gleichungen:

$$x = -y_1\sin\theta,\ y = +y_1\cos\theta,\ z = z_1;$$

folglich nach 5):

$$-Cy_1\sin\theta + C_1y\cos\theta + C_2z_1 = 0,$$

woraus

$$\frac{z_1}{y_1} = \frac{C\sin\theta - C_1\cos\theta}{C_2}$$

folgt.

Wenn nun zuerst θ ein spitzer Winkel ist, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\tang i = \frac{z_1}{y_1},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\tang i = \frac{C\sin\theta - C_1\cos\theta}{C_2}.$$

Da in diesem Falle $\sin\theta, \cos\theta, \tang\theta$ sämmtlich positiv sind, so ist

$$\sin\theta = \frac{\tang\theta}{\sqrt{1+\tang\theta^2}},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tang\theta^2}};$$

also nach 6):

$$\sin\theta = -\frac{\frac{C}{C_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}};$$

und folglich, wie leicht erhellet, wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist:

$$\sin\theta = \mp\frac{C}{\sqrt{C^2+C_1^2}},\ \cos\theta = \pm\frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1^2}};$$

also:

$$C\sin\theta - C_1\cos\theta = \mp\frac{C^2+C_1^2}{\sqrt{C^2+C_1^2}} = \mp\sqrt{C^2+C_1^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang} i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1^2}}{C_2}.$$

Wenn ferner θ ein stumpfer Winkel ist, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\operatorname{tang} i = -\frac{z_1}{y_1},$$

also nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang} i = -\frac{C\sin\theta - C_1\cos\theta}{C_2}.$$

Da in diesem Falle $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{tang}\theta$ respective positiv, negativ, negativ ist, so ist

$$\sin\theta = -\frac{\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\theta^2}},\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\theta^2}};$$

also nach 6):

$$\sin\theta = \frac{\frac{C}{C_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}},\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}};$$

und folglich, wenn man wieder die oberen oder die unteren Zeichen nimmt, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist:

$$\sin\theta = \pm\frac{C}{\sqrt{C^2+C_1{}^2}},\ \cos\theta = \mp\frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1{}^2}};$$

also:

$$C\sin\theta - C_1\cos\theta = \pm\frac{C^2+C_1{}^2}{\sqrt{C^2+C_1{}^2}} = \pm\sqrt{C^2+C_1{}^2};$$

folglich nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang} i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1{}^2}}{C_2}.$$

Also ist immer, θ mag ein spitzer oder ein stumpfer Winkel sein,

$$7)\quad \ldots\ldots\quad \operatorname{tang} i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1{}^2}}{C_2},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist.

Durch die beiden Formeln:

$$8)\quad \ldots\quad \operatorname{tang}\theta = -\frac{C}{C_1},\ \operatorname{tang} i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1{}^2}}{C_2};$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist, ist die Lage der Ebene der Bahn des Körpers m im Raume vollkommen bestimmt, wenn die drei Constanten C, C_1, C_2 bekannt sind.

Nach 7) ist:

$$\sin i^2 = \frac{C^2+C_1{}^2}{C+C_1{}^2+C_2{}^2},\ \cos i^2 = \frac{C_2{}^2}{C+C_1{}^2+C_2{}^2}.$$

Setzen wir nun

$$9)\quad \ldots\ldots\quad K = \sqrt{C^2+C_1{}^2+C_2{}^2},$$

wo also K eine positive Grösse bezeichnet, so ist, weil $\sin i$ immer positiv ist, $\cos i$ mit $\operatorname{tang} i$ stets einerlei Vorzeichen hat, nach dem Obigen offenbar:

$$\sin i = \frac{\sqrt{C^2+C_1{}^2}}{K},\ \cos i = \mp\frac{C_2}{K}$$

mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Ist θ ein spitzer Winkel, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\sin\theta = \mp\frac{C}{\sqrt{C^2+C_1^2}},\ \cos\theta = \pm\frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1^2}};$$

also:

$$\sin\theta\sin i = \mp\frac{C}{K},\ \cos\theta\sin i = \pm\frac{C_1}{K}.$$

Ist θ ein stumpfer Winkel, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\sin\theta = \pm\frac{C}{\sqrt{C^2+C_1^2}},\ \cos\theta = \mp\frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1^2}};$$

also:

$$\sin\theta\sin i = \pm\frac{C}{K},\ \cos\theta\sin i = \mp\frac{C_1}{K}.$$

Folglich ist

10) $C = \mp K\sin\theta\sin i,\ C_1 = \pm K\cos\theta\sin i,\ C_2 = \mp K\cos i$

oder

10*) $C = \pm K\sin\theta\sin i,\ C_1 = \mp K\cos\theta\sin i,\ C_2 = \mp K\cos i$,

jenachdem θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, natürlich immer die oberen oder die unteren Zeichen genommen, jenachdem C_1 eine positive oder eine negative Grösse ist.

Aus der Form der Gleichung

$$Cx + C_1y + C_2z = 0$$

geht aber auf der Stelle hervor, dass es, ohne die Allgemeinheit irgend wie zu beeinträchtigen, verstattet ist, C_1 immer als positiv anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung hat man nach 10) und 10*) die Gleichungen:

11) $C = \mp K\sin\theta\sin i,\ C_1 = \pm K\cos\theta\sin i,\ C_2 = -K\cos i$;

in denen die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist.

§. 4.

Wenn wir jetzt die drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0$$

nach der Reihe mit

$$2\frac{\partial x}{\partial t},\ 2\frac{\partial y}{\partial t},\ 2\frac{\partial z}{\partial t}$$

multipliciren und dann zu einander addiren, so erhalten wir die Gleichung:

$$2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+2\frac{\mu}{r^3}\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)=0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}=2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right),$$

und, weil $r^2=x^2+y^2+z^2$ ist:

$$r\frac{\partial r}{\partial t}=x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t};$$

also wird die obige Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}+2\mu r^{-2}\frac{\partial r}{\partial t}=0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-2\mu\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial t}=0.$$

Bezeichnet daher $\mathfrak{R}$ eine Constante, so ist:

$$12)\quad \ldots \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-\frac{2\mu}{r}+\mathfrak{R}=0.$$

Wenn ferner die aus §. 3. bekannten Gleichungen

$$y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}=C,$$

$$z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t}=C_1,$$

$$x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}=C_2$$

quadrirt und dann zu einander addirt werden, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung 9) die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} x^2\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-2xy\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \\ +y^2\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right\}-2yz\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} \\ +z^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right\}-2zx\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} \end{array}\right\}=K^2,$$

also, wenn man auf der linken Seite die Grösse

$$x^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+y^2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+z^2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$$

addirt und subtrahirt, die Gleichung:

$$(x^2+y^2+z^2)\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=K^2,$$

folglich nach dem Obigen:

$$13)\quad . \; . \quad r^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=K^2.$$

Weil nun aber nach 12)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{2\mu}{r}-\mathfrak{R}$$

ist, so wird die Gleichung 13):

$$2\mu r-\mathfrak{R}r^2-r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=K^2,$$

oder

$$14)\quad . \; . \; . \; . \quad r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=2\mu r-\mathfrak{R}r^2-K^2,$$

oder

$$15)\quad . \; . \; . \; . \; . \quad \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2=\frac{r^2}{2\mu r-\mathfrak{R}r^2-K^2},$$

woraus sich

$$16)\quad \ldots\ldots\quad \frac{\partial t}{\partial r}=\pm\frac{r}{\sqrt{2\mu r-\mathfrak{K}r^2-K^2}}$$

oder

$$17)\quad \ldots\ldots\quad \partial t=\pm\frac{r\partial r}{\sqrt{2\mu r-\mathfrak{K}r^2-K^2}}$$

ergiebt, wenn man in diesen Gleichungen die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem wenn

$$t\left\{\begin{matrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right\}\text{ respective } r\left\{\begin{matrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right\},$$

oder wenn

$$t\left\{\begin{matrix}\text{zunimmt}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right\}\text{ respective } r\left\{\begin{matrix}\text{abnimmt}\\ \text{zunimmt}\end{matrix}\right\},$$

was in jedem Falle besonders entschieden werden muss.

§. 5.

In der Ebene der Bahn des Körpers m wollen wir uns jetzt von M aus eine beliebige gerade Linie gezogen denken, die wir der Kürze wegen die Axe nennen werden, und wollen den Winkel, welchen zur Zeit t der Vector r des Körpers m mit dieser Axe einschliesst, indem wir diesen Winkel von der Axe an nach einer solchen Richtung hin fortwährend wachsen lassen, dass er mit der Zeit t gleichzeitig zunimmt und abnimmt, durch V, den diesen Winkel messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise aber durch v bezeichnen. Lassen wir dann die Zeit t um Δt wachsen, so wächst v um Δv, und r verändert sich um Δr. Das Quadrat der die Endpunkte der Vectoren r und $r+\Delta r$ mit einander verbindenden Sehne der Bahn ist

$$r^2+(r+\Delta r)^2-2r(r+\Delta r)\cos\Delta v=4r(r+\Delta r)\sin\tfrac{1}{2}\Delta v^2+\Delta r^2.$$

Das Quadrat dieser Sehne ist aber auch $\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$. Daher ist

$$\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2=4r(r+\Delta r)\sin\tfrac{1}{2}\Delta v^2+\Delta r^2,$$

also

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2=r(r+\Delta r)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta v}{\frac{1}{2}\Delta v}\right)^2\cdot\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2,$$

und folglich, wenn man, indem man sich Δt der Null nähern lässt, auf beiden Seiten dieser Gleichung zu den Gränzen übergeht:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=r^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

oder

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=r^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung 13), so erhält man die Gleichung

$$r^4\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2=K^2,$$

woraus sich, weil unter den gemachten Voraussetzungen $\frac{\partial v}{\partial t}$ und auch K stets positiv ist, die Gleichung

$$18) \quad \ldots \quad r^2\frac{\partial v}{\partial t}=K \quad \text{oder} \quad r^2\frac{\partial r}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=K$$

ergiebt. Also ist nach 16):

$$\pm r\sqrt{2\mu r-\mathfrak{A}r^2-K^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=K,$$

woraus man

19)

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\pm\frac{K}{r\sqrt{2\mu r-\mathfrak{A}r^2-K^2}} \quad \text{oder} \quad \partial v=\pm\frac{K\partial r}{r\sqrt{2\mu r-\mathfrak{A}r^2-K^2}}$$

erhält, indem die am Ende des vorhergehenden Paragraphen gegebenen Bestimmungen wegen der Vorzeichen natürlich auch jetzt noch ganz ihre Gültigkeit behalten.

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$2\mu r-\mathfrak{A}r^2-K^2=r^2\left\{\frac{\mu^2}{K^2}-\mathfrak{A}-K^2\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{K^2}\right)^2\right\},$$

und es muss also, weil wegen der Gleichung 14) die Grösse $2\mu r-\mathfrak{A}r^2-K^2$ nothwendig positiv ist, offenbar auch

$$\frac{\mu^2}{K^2}-\mathfrak{A}=\frac{\mu^2-\mathfrak{A}K^2}{K^2}$$

eine positive Grösse sein, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch $\mu^2-\mathfrak{A}K^2$ positiv ist. Setzen wir nun

$$Cx+C_1y=0 \quad \text{oder} \quad y=-\frac{C}{C_1}x$$

ist, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tang\theta=-\frac{C}{C_1}.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten hat man zwischen den Coordinaten der beiden Systeme der xyz und $x_1y_1z_1$ die folgenden Gleichungen:

$$x=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta,$$

$$y=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta,$$

$$z=z_1;$$

und fassen wir nun einen beliebigen Punkt der Durchschnittslinie der Ebene der Bahn des Körpers m mit der Ebene der y_1z_1 in's Auge, so ist für diesen Punkt $x_1=0$, also nach den vorstehenden Gleichungen:

$$x=-y_1\sin\theta, \; y=+y_1\cos\theta, \; z=z_1;$$

folglich nach 5):

$$-Cy_1\sin\theta+C_1y\cos\theta+C_2z_1=0,$$

woraus

$$\frac{z_1}{y_1}=\frac{C\sin\theta-C_1\cos\theta}{C_2}$$

folgt.

Wenn nun zuerst θ ein spitzer Winkel ist, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\tang i=\frac{z_1}{y_1},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\tang i=\frac{C\sin\theta-C_1\cos\theta}{C_2}.$$

Da in diesem Falle $\sin\theta, \cos\theta, \tang\theta$ sämmtlich positiv sind, so ist

$$\sin\theta=\frac{\tang\theta}{\sqrt{1+\tang\theta^2}}, \; \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tang\theta^2}};$$

also nach 6):

$$\sin\theta = -\frac{\frac{C}{C_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}};$$

und folglich, wie leicht erhellet, wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist:

$$\sin\theta = \mp\frac{C}{\sqrt{C^2+C_1^2}}, \cos\theta = \pm\frac{C_1}{\sqrt{C^2+C_1^2}};$$

also:

$$C\sin\theta - C_1\cos\theta = \mp\frac{C^2+C_1^2}{\sqrt{C^2+C_1^2}} = \mp\sqrt{C^2+C_1^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\text{tang}\, i = \mp\frac{\sqrt{C^2+C_1^2}}{C_2}.$$

Wenn ferner θ ein stumpfer Winkel ist, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\text{tang}\, i = -\frac{z_1}{y_1},$$

also nach dem Obigen:

$$\text{tang}\, i = -\frac{C\sin\theta - C_1\cos\theta}{C_2}.$$

Da in diesem Falle $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\text{tang}\,\theta$ respective positiv, negativ, negativ ist, so ist

$$\sin\theta = -\frac{\text{tang}\,\theta}{\sqrt{1+\text{tang}\,\theta^2}}, \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}\,\theta^2}};$$

also nach 6):

$$\sin\theta = \frac{\frac{C}{C_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}}, \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{C_1}\right)^2}};$$

und folglich, wenn man wieder die oberen oder die unteren Zeichen nimmt, jenachdem C_1 positiv oder negativ ist:

$$\cos(v - v_0 + 2n\pi) = \cos(v - v_0)$$

ist, so ist:

$$28) \quad \ldots\ldots \quad r = \{A + B\cos(v - v_0)\}^{-1}.$$

Bezeichnen wir den, dem Werthe v_0 von v entsprechenden kleinsten Werth von r durch r_0, so ist nach der vorstehenden Gleichung:

$$29) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r_0 = (A + B)^{-1}.$$

Nimmt man den kleinsten Vector selbst als Axe an, so ist $v_0 = 0$, folglich:

$$30) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r = (A + B\cos v)^{-1}.$$

Bekanntlich hat A mit der Masse μ gleiches Vorzeichen und B ist stets positiv.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass die Masse μ positiv sei. Dann sind die Grössen A und B beide positiv.

Wenn nun K verschwindet, so ist nach 25):

$$A = \frac{\mu}{K^2}, \quad B = \frac{\mu}{K^2}, \quad A = B.$$

Also ist in diesem Falle nach der Theorie der Kegeschnitte*) die Bahn von m um M eine Parabel, deren Brennpunkt M ist.

Wenn $\mathfrak{K}$ nicht verschwindet und positiv ist, so ist nach 25):

$$A = \frac{\mu}{K^2}, \quad B = \frac{\mu}{K^2}\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{K}K^2}{\mu^2}}, \quad A > B.$$

Also ist in diesem Falle nach der Theorie der Kegelschnitte die Bahn von m um M eine Ellipse, deren einer Brennpunkt M ist.

Wenn $\mathfrak{K}$ nicht verschwindet und negativ ist, so ist nach 25):

$$A = \frac{\mu}{K^2}, \quad B = \frac{\mu}{K^2}\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{K}K^2}{\mu^2}}, \quad A < B.$$

Also ist in diesem Falle nach der Theorie der Kegelschnitte die Bahn von m um M der erste Zweig einer Hyperbel, deren einer

---

*) M. s. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme. Greifswald und Leipzig. 1857. S. 84. — Archiv der Mathematik und Physik. Theil XVII. S. 54.

Brennpunkt M ist, so dass nämlich die Bahn der Zweig dieser Hyperbel ist, innerhalb welches der Brennpunkt M liegt.

Ferner wollen wir annehmen, dass die Masse μ negativ sei. Dann ist von den Grössen A und B die erste negativ und die zweite positiv.

Wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{2\mu}{r}-\mathfrak{H}$$

ist in dem vorliegenden Falle offenbar $\mathfrak{H}<0$. Wäre nun $-A\overset{=}{>}B$, also nach 25)

$$\frac{-\mu}{K^2}\overset{=}{>}\frac{\sqrt{\mu^2-\mathfrak{H}K^2}}{K^2},$$

so wäre

$$-\mu\overset{=}{>}\sqrt{\mu^2-\mathfrak{H}K^2},\quad \mu^2\overset{=}{>}\mu^2-\mathfrak{H}K^2;$$

folglich offenbar

$$\mathfrak{H}K^2\overset{=}{>}0,\quad \text{also}\quad \mathfrak{H}\overset{=}{>}0,$$

was gegen das Obige streitet. Daher ist $-A<B$, und folglich nach der Theorie der Kegelschnitte in diesem Falle, wenn nämlich die Masse μ negativ ist, die Bahn von m um M immer der zweite Zweig einer Hyperbel, deren einer Brennpunkt M ist, so dass nämlich die Bahn der Zweig dieser Hyperbel ist, ausserhalb welches der Brennpunkt M liegt.

§. 6.

Nach 17) ist

$$\partial t=\pm\frac{r\partial r}{\sqrt{2\mu r-\mathfrak{H}r^2-K^2}},$$

und ausserdem ergiebt sich aus dem vorhergehenden Paragraphen leicht:

$$\sqrt{2\mu r-\mathfrak{H}r^2-K^2}=BKr\sqrt{1-w^2};$$

also ist

$$\partial t = \pm \frac{\partial r}{BK\sqrt{1-w^2}}.$$

Nun ist aber nach 20) und 25):

$$w = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{r} - A\right),$$

also nach 30):

$$w = \cos v;$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\partial t = \pm \frac{\partial r}{BK\sqrt{1-\cos v^2}},$$

in welcher Formel nach dem Obigen offenbar das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem $0 < v < \pi$ oder $\pi < v < 2\pi$ ist. Nun ist aber

$$\sin v = \pm \sqrt{1-\cos v^2},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $0 < v < \pi$ oder $\pi < v < 2\pi$ ist. Also ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\partial t = \frac{\partial r}{BK\sin v}.$$

Weil aber $r = (A + B\cos v)^{-1}$ ist, so ist

$$\partial r = B(A + B\cos v)^{-2}\sin v\partial v,$$

folglich:

$$31) \quad \ldots\ldots \quad \partial t = \frac{1}{K}\cdot\frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

oder nach 25):

$$32) \quad \ldots\ldots \quad \partial t = \sqrt{\frac{A}{\mu}}\cdot\frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Von nun an wollen wir die Zeiten immer von dem Zeitpunkte an rechnen, wo m seine kleinste Entfernung r_0 von M hat.

§. 7.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir nun zwei beliebige Zeiten t und t_1, wo t_1 grösser als t sein soll, betrachten, und

wollen annehmen, dass zu diesen Zeiten die Lage des Vectors des Körpers m in Bezug auf dessen kleinsten Vector als Axe durch die auf bekannte Weise genommenen Winkel V und V_1, welche durch die mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen v und v_1 gemessen werden, bestimmt sei. Ferner wollen wir annehmen, dass in dem Zeitintervall $t_1 - t$, welches durch τ bezeichnet werden mag, der Vector von m den ganz bestimmten Sector S_τ beschrieben habe.

Betrachten wir nun zuerst den Fall der Ellipse, so ist in demselben offenbar nach 32) in völliger Allgemeinheit:

$$\tau = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist aber gleichfalls in völliger Allgemeinheit:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2} \int_v^{v_1} r^2 \partial v,$$

also nach 30):

$$S_\tau = \tfrac{1}{2} \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden in diesem Falle in völliger Allgemeinheit:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot S_\tau.$$

Im Falle der Parabel und Hyperbel müssen wir die folgenden Fälle unterscheiden.

Wenn zuerst $0 < v < \pi$, $0 < v < \pi_1$ ist, so ist nach 32) offenbar:

$$\tau = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

und nach dem schon vorher angewandten Satze der analytischen Geometrie:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2} \int_v^{v_1} r^2 \partial v,$$

also nach 30):

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot S_\tau.$$

Wenn ferner $\pi < v < 2\pi$, $\pi < v_1 < 2\pi$ ist, so ist nach 32) offenbar

$$\tau = \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

und nach demselben Satze der analytischen Geometrie ist in diesem Falle augenscheinlich

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi - v} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi - v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Setzen wir $v = 2\pi - u$, also $\partial v = -\partial u$, $\cos v = \cos u$, so ist

$$\frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} = -\frac{\partial u}{(A + B\cos u)^2},$$

und folglich, weil für $v = 0, = 2\pi - v$ respective $u = 2\pi, = v$ ist:

$$\int_0^{2\pi - v} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} = -\int_{2\pi}^{v} \frac{\partial u}{(A + B\cos u)^2}$$

oder

$$\int_0^{2\pi - v} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} = \int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

und natürlich ganz ebenso:

$$\int_0^{2\pi - v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} = \int_{v_1}^{2\pi} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} - \tfrac{1}{2}\int_{v_1}^{2\pi} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2}.$$

Nun ist aber

$$\int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} = \int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2} + \int_{v_1}^{2\pi} \frac{\partial v}{(A + B\cos v)^2},$$

also offenbar

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_v^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}}\cdot S_\tau.$$

Wenn endlich $\pi < v < 2\pi$, $0 < v_1 < \pi$ ist, so ist, wie leicht erhellet, nach 32):

$$\tau = \sqrt{\frac{A}{\mu}}\cdot\int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} + \sqrt{\frac{A}{\mu}}\cdot\int_0^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2}.$$

Nun ist aber in diesem Falle offenbar:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi - v} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$S_\tau = \tfrac{1}{2}\int_v^{2\pi} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{v_1} \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2};$$

folglich nach dem Obigen offenbar:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}}\cdot S_\tau.$$

Hieraus sehen wir also, dass in völliger Allgemeinheit für alle Kegelschnitte unter den gemachten Voraussetzungen

$$33) \quad \ldots\ldots \quad \tau = 2\sqrt{\frac{A}{\mu}}\cdot S_\tau$$

ist, oder auch

$$34) \quad \ldots\ldots \quad \tau = 2\sqrt{\frac{A}{M+m}}\cdot S_\tau.$$

§. 8.

Zwischen den Grössen A, B und den Constanten $\mathfrak{K}, K$ finden nach 25) die folgenden Beziehungen Statt:

$$A=\frac{\mu}{K^2},\quad B=\frac{\sqrt{\mu^2-\mathfrak{K}K^2}}{K^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, da bekanntlich K eine positive Grösse ist:

$$35)\quad \ldots\ldots\quad K=\sqrt{\frac{\mu}{A}}$$

und

$$36)\quad \ldots\ldots\quad \mathfrak{K}=\frac{\mu(A^2-B^2)}{A}.$$

Für die Parabel ist bekanntlich $A=B$, also $\mathfrak{K}=0$. Bezeichnen wir nun für die beiden anderen Kegelschnitte die beiden Halbaxen und den Parameter durch a, b, p, so ist nach der Theorie der Kegelschnitte für die Ellipse bekanntlich:

$$A=\frac{2}{p}=\frac{a}{b^2},\quad B=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2};$$

also $\mathfrak{K}=\frac{\mu}{a}$. Für die Hyperbel ist, wenn man für den ersten Zweig die oberen, für den zweiten Zweig die unteren Zeichen nimmt:

$$A=\pm\frac{2}{p}=\pm\frac{a}{b^2},\quad B=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2};$$

also $\mathfrak{K}=\mp\frac{\mu}{a}$.

Nach 12) ist nun

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-\frac{2\mu}{r}+\mathfrak{K}=0,$$

also:

$$36)\quad \ldots\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-\mu\left(\frac{2}{r}\mp\frac{1}{a}\right)=0,$$

wenn man für die Ellipse und den zweiten Zweig der Hyperbel das obere, für den ersten Zweig der Hyperbel das untere Zeichen nimmt, und für die Parabel $\frac{1}{a}$ als verschwindend oder a als unendlich gross betrachtet.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Körpers m in seiner

Bahn am Ende der Zeit t durch $\mathfrak{v}$, so ist nach den Lehren der Mechanik bekanntlich

$$\mathfrak{v}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2},$$

also nach 36):

$$37) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{v}=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}\mp\frac{1}{a}\right)},$$

die Zeichen wie vorher genommen.

Für die Ellipse, Parabel und den ersten Zweig der Hyperbel ist daher respective:

$$\mathfrak{v}<\sqrt{\frac{2\mu}{r}},\quad \mathfrak{v}=\sqrt{\frac{2\mu}{r}},\quad \mathfrak{v}>\sqrt{\frac{2\mu}{r}}.$$

Für den zweiten Zweig der Hyperbel ist bekanntlich μ negativ, weshalb wir in diesem Falle

$$\mathfrak{v}=\sqrt{-\mu\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{r}\right)}$$

setzen wollen, woraus sich ergiebt, dass immer

$$\mathfrak{v}<\sqrt{-\frac{\mu}{a}}$$

ist. Auch findet man leicht, dass in diesem Falle, jenachdem

$$r<4a,\quad r=4a,\quad r>4a$$

ist, respective

$$\mathfrak{v}<\sqrt{-\frac{2\mu}{r}},\quad \mathfrak{v}=\sqrt{-\frac{2\mu}{r}},\quad \mathfrak{v}>\sqrt{-\frac{2\mu}{r}}$$

ist.

§. 9.

Von jetzt an wollen wir grösserer Einfachheit und Bestimmtheit wegen annehmen, dass die Massen M und m, und also auch die Grössen μ und A positiv seien, weil dieser Fall für die Anwendungen, welche wir von diesen allgemeinen Lehren späterhin zu machen beabsichtigen, uns zunächst interessirt.

Nach 34) ist in völliger Allgemeinheit

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{M+m}} \cdot S_\tau,$$

also unter der vorher gemachten Voraussetzung:

$$\tau = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{M} \cdot \sqrt{1+\frac{m}{M}}} \cdot S_\tau,$$

und folglich:

$$38) \quad \ldots\ldots \quad \sqrt{M} = \frac{2\sqrt{A}}{\tau\sqrt{1+\frac{m}{M}}} \cdot S_\tau,$$

oder, weil nach der Theorie der Kegelschnitte, wenn p den Parameter bezeichnet, für die Parabel, Ellipse und den ersten Zweig der Hyperbel allgemein $A = \frac{2}{p}$ ist:

$$39) \quad \ldots\ldots \quad \sqrt{M} = \frac{2\sqrt{2}}{\tau\sqrt{p} \cdot \sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau.$$

Hieraus sieht man, dass für jedes System von Körpern, die sich sämmtlich um den Centralkörper M bewegen, also z. B. für das System der um die Sonne als ihren Centralkörper sich bewegenden Planeten und Cometen, die Grösse

$$\frac{2\sqrt{A}}{\tau\sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau = \frac{2\sqrt{2}}{\tau\sqrt{p} \cdot \sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau$$

eine Constante ist, welche wir durch k bezeichnen, und daher

$$40) \quad \ldots \quad k = \frac{2\sqrt{A}}{\tau\sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau = \frac{2\sqrt{2}}{\tau\sqrt{p} \cdot \sqrt{1+\frac{m}{M}}} S_\tau$$

setzen wollen, wo sich nach dem Vorhergehenden von selbst versteht, dass

$$41) \quad \ldots\ldots \quad k = \sqrt{M}, \quad k^2 = M$$

ist.

Wenn einer der in Rede stehenden Körper, dessen Masse m sein mag, um den Centralkörper M eine Ellipse beschreibt, wie z. B. die Erde um die Sonne, und E und F den Flächeninhalt

der ganzen Ellipse und die ganze Umlaufszeit in derselben bezeichnen, so ist nach 40):

$$k = \frac{2E\sqrt{A}}{T\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$$

Sind aber a und b die beiden Halbaxen der Ellipse, so ist nach der Theorie der Kegelschnitte bekanntlich

$$A = \frac{a}{b^2},\quad E = ab\pi;$$

also $E\sqrt{A} = a^{\frac{3}{2}}\pi$, und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$42) \quad \ldots\ldots \quad k = \frac{2a^{\frac{3}{2}}\pi}{T\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$$

Nimmt man a, etwa die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, als Längeneinheit an, so ist

$$43) \quad \ldots\ldots \quad k = \frac{2\pi}{T\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$$

Beschreiben zwei Körper m und m_1 um die beiden Centralkörper M und M_1 Ellipsen, deren Halbaxen a, b und a_1, b_1 sind, so ist, wenn die Flächenräume dieser Ellipsen durch E und E_1, die Umlaufszeiten in denselben durch T und T_1 bezeichnet werden; überdies

$$A = \frac{a}{b^2},\quad A_1 = \frac{a_1}{b_1{}^2}$$

gesetzt wird, nach dem Obigen:

$$T = \frac{2E\sqrt{A}}{\sqrt{M+m}},\quad T_1 = \frac{2E_1\sqrt{A_1}}{\sqrt{M_1+m_1}};$$

also auf ähnliche Art wie vorher:

$$T = \frac{2a^{\frac{3}{2}}\pi}{\sqrt{M+m}},\quad T_1 = \frac{2a_1{}^{\frac{3}{2}}\pi}{\sqrt{M_1+m_1}};$$

und folglich

$$\frac{T^2}{a^3} : \frac{T_1{}^2}{a_1{}^3} = M_1+m_1 : M+m$$

oder

$$\frac{T^2}{a^3}:\frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{M_1}{M}+\frac{m_1}{M}:1+\frac{m}{M},$$

also

$$1+\frac{m}{M}=\frac{T_1^2}{T^2}\cdot\frac{a^3}{a_1^3}\left(\frac{M_1}{M}+\frac{m_1}{M}\right),$$

und folglich

$$44)\quad\ldots\quad\frac{m}{M}=\frac{T_1^2}{T^2}\cdot\frac{a^3}{a_1^3}\left(\frac{M_1}{M}+\frac{m_1}{M}\right)-1.$$

Ist nun $M_1=m$, d. h. ist M der Centralkörper für m, und m der Centralkörper für m_1, wie z. B. die Sonne, die Erde und der Mond, so ist

$$\frac{m}{M}=\frac{T_1^2}{T^2}\cdot\frac{a^3}{a_1^3}\left(\frac{m}{M}+\frac{m_1}{M}\right)-1,$$

woraus sich

$$45)\quad\ldots\ldots\quad\frac{m}{M}=\frac{\frac{T_1^2}{T^2}\cdot\frac{a^3}{a_1^3}\cdot\frac{m_1}{M}-1}{1-\frac{T_1^2}{T^2}\cdot\frac{a^3}{a_1^3}}$$

ergiebt.

Kann man aber den Bruch $\frac{m_1}{M}$ seiner Kleinheit wegen ohne merklichen Fehler als verschwindend betrachten, so geht vorstehende Formel in die folgende über:

$$46)\quad\ldots\ldots\quad\frac{m}{M}=\frac{1}{\frac{T_1^2}{T^2}\cdot\frac{a^3}{a_1^3}-1}$$

oder

$$47)\quad\ldots\ldots\quad\frac{m}{M}=\frac{T^2a_1^3}{T_1^2a^3-T^2a_1^3},$$

mittelst welcher Formeln der Bruch $\frac{m}{M}$ aus a, a_1, T, T_1 gefunden werden kann; dann kann man aber auch die Constante k mittelst der Formeln 42) oder 43) finden.

Für das System der Planeten und Cometen in Bezug auf die Sonne als Centralkörper hat man auf diese Weise gefunden:

$$k=0{,}01720209895$$

welche Zahl man die Constante des Sonnensystems zu nennen pflegt, wobei die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Längeneinheit zu Grunde liegt.

Bis auf eilf und zehn Decimalstellen genau ist:

$$k = 0{,}01720209895$$
$$k^2 = 0{,}00029591227$$
$$k^3 = 0{,}00000509031 0$$
$$k^4 = 0{,}00000008756$$
$$k^5 = 0{,}00000000151$$
$$k^6 = 0{,}00000000003$$

und

$$\log k = 0{,}2355814414-2$$
$$\log . k^2 = 0{,}4711628828-4$$
$$\log . k^3 = 0{,}7067443242-6$$
$$\log . k^4 = 0{,}9423257656-8$$
$$\log . k^5 = 0{,}1779072070-9$$
$$\log . k^6 = 0{,}4134886484-11.$$

Bis auf sieben Decimalstellen abgekürzt ist aber:

$$\log k = 0{,}2355814-2$$
$$\log . k^2 = 0{,}4711629-4$$
$$\log . k^3 = 0{,}7067443-6$$
$$\log . k^4 = 0{,}9423258-8$$
$$\log . k^5 = 0{,}1779072-9$$
$$\log . k^6 = 0{,}4134886-11.$$

§. 10.

Wir wenden uns nun zunächst noch zu einigen allgemeinen Betrachtungen, welche für alles Folgende von der grössten Wichtigkeit sind, und daher hier der sorgfältigsten Beachtung empfohlen werden müssen.

Der Kürze wegen wollen wir im Folgenden $\frac{1}{r} = \mathfrak{r}$ setzen. Weil nun nach 30)

$$r = (A + B\cos v)^{-1}$$

ist, so ist

$$r = A + B\cos v.$$

Ferner ist nach 18)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{r^2}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = Kr^2.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch successive Differentiation die folgenden Formeln:

$$r = A + B\cos v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Kr^2,$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -B\sin v\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 2Kr\frac{\partial r}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -B\left\{\sin v\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \cos v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = 2K\left\{r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -B\left\{\sin v\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + 3\cos v\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sin v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^3\right\},$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 2K\left\{r\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} + 3\frac{\partial r}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right\},$$

$$\frac{\partial^4 r}{\partial t^4} = -B\left\{\sin v\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + 4\cos v\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + 3\cos v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)^2 - 6\sin v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \cos v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^4\right\},$$

u. s. w.

und schliesst aus diesen Formeln, die man leicht weiter fortsetzen kann, sogleich, dass überhaupt die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\lambda v}{\partial t^\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^\lambda r}{\partial t^\lambda}$$

in Bezug auf die Grösse K von der Ordnung λ sind, d. h. in allen ihren Gliedern die Potenz K^λ enthalten. Weil nun aber nach 25) und 41)

$$K^2 = \frac{\mu}{A} = \frac{M(1+\frac{m}{M})}{A} = \frac{k^2(1+\frac{m}{M})}{A},$$

also

$$48) \quad \ldots\ldots \quad K = k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}}$$

ist, so sind die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\lambda v}{\partial t^\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^\lambda \mathfrak{r}}{\partial t^\lambda}$$

offenbar auch in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ, und enthalten also in allen Gliedern die Potenz k^λ.

Aus $r = \mathfrak{r}^{-1}$ erhält man leicht durch successive Differentiation:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\mathfrak{r}^{-2}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\left\{\mathfrak{r}^{-2}\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} - 2\mathfrak{r}^{-3}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\left\{\mathfrak{r}^{-2}\frac{\partial^3 \mathfrak{r}}{\partial t^3} - 6\mathfrak{r}^{-3}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} + 6\mathfrak{r}^{-4}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^3\right\},$$

$$\frac{\partial^4 r}{\partial t^4} = -\left\{\mathfrak{r}^{-2}\frac{\partial^4 \mathfrak{r}}{\partial t^4} - 8\mathfrak{r}^{-3}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^3 \mathfrak{r}}{\partial t^3} - 6\mathfrak{r}^{-3}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2}\right)^2 + 36\mathfrak{r}^{-4}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} - 24\mathfrak{r}^{-5}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^4\right\},$$

u. s. w.

und überzeugt sich hieraus sogleich, dass auch der Differentialquotient $\frac{\partial^\lambda r}{\partial t^\lambda}$ in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ ist.

Weil endlich

$$\frac{\partial.\mathfrak{r}^3}{\partial t} = 3\mathfrak{r}^2\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2.\mathfrak{r}^3}{\partial t^2} = 3\left\{\mathfrak{r}^2\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} + 2\mathfrak{r}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial^3 . r^3}{\partial t^3} = 3\{r^2\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} + 6r\frac{\partial r}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^3\},$$

$$\frac{\partial^4 . r^3}{\partial t^4} = 3\{r^2\frac{\partial^4 r}{\partial t^4} + 8r\frac{\partial r}{\partial t}\cdot\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} + 6r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right)^2 + 12\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\},$$

u. s. w.

ist, so ist klar, dass auch der Differentialquotient $\frac{\partial^\lambda . r^3}{\partial t^\lambda}$ in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ ist.

Nach 3) ist bekanntlich

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\mu x}{r^3},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\mu y}{r^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\mu z}{r^3};$$

also, weil

$$\mu = M + m = M(1+\frac{m}{M}) = k^2(1+\frac{m}{M})$$

ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})r^3 x,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})r^3 y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})r^3 z.$$

Also ist nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung, wenn man die Binomial-Coëfficienten auf gewöhnliche Weise bezeichnet:

$$\frac{\partial^\lambda x}{\partial t^\lambda} = -k^2(1+\frac{m}{M})\left\{\begin{aligned} & r^3\frac{\partial^{\lambda-2}x}{\partial t^{\lambda-2}} + (\lambda-2)_1\frac{\partial . r^3}{\partial t}\cdot\frac{\partial^{\lambda-3}x}{\partial t^{\lambda-3}} \\ & + (\lambda-2)_2\frac{\partial^2 . r^3}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^{\lambda-4}x}{\partial t^{\lambda-4}} \\ & \text{u. s. w.} \\ & + (\lambda-2)_{\lambda-3}\frac{\partial^{\lambda-3} . r^3}{\partial t^{\lambda-3}}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} \\ & + (\lambda-2)_{\lambda-2}\frac{\partial^{\lambda-2} . r^3}{\partial t^{\lambda-2}}x \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^\lambda y}{\partial t^\lambda}=-k^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\Big\{r^3\frac{\partial^{\lambda-2}y}{\partial t^{\lambda-2}}&+(\lambda-2)_1\frac{\partial.r^3}{\partial t}\cdot\frac{\partial^{\lambda-3}y}{\partial t^{\lambda-3}}\\&+(\lambda-2)_2\frac{\partial^2.r^3}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^{\lambda-4}y}{\partial t^{\lambda-4}}\\&\text{u. s. w.}\\&+(\lambda-2)_{\lambda-3}\frac{\partial^{\lambda-3}.r^3}{\partial t^{\lambda-3}}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\&+(\lambda-2)_{\lambda-2}\frac{\partial^{\lambda-2}.r^3}{\partial t^{\lambda-2}}y\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^\lambda z}{\partial t^\lambda}=-k^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\Big\{r^3\frac{\partial^{\lambda-2}z}{\partial t^{\lambda-2}}&+(\lambda-2)_1\frac{\partial.r^3}{\partial t}\cdot\frac{\partial^{\lambda-3}z}{\partial t^{\lambda-3}}\\&+(\lambda-2)_2\frac{\partial^2.r^3}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^{\lambda-4}z}{\partial t^{\lambda-4}}\\&\text{u. s. w.}\\&+(\lambda-2)_{\lambda-3}\frac{\partial^{\lambda-3}.r^3}{\partial t^{\lambda-3}}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\\&+(\lambda-2)_{\lambda-2}\frac{\partial^{\lambda-2}.r^3}{\partial t^{\lambda-2}}z\end{aligned}\right\}.$$

Kann man nun beweisen, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial t},\ \frac{\partial y}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial t}$$

in Bezug auf die Grösse k von der ersten Ordnung sind, so schliesst man, weil nach dem Vorhergehenden die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

in Bezug auf die Grösse k von der zweiten Ordnung sind, hieraus und aus dem Obigen leicht, dass überhaupt die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\lambda x}{\partial t^\lambda},\ \frac{\partial^\lambda y}{\partial t^\lambda},\ \frac{\partial^\lambda z}{\partial t^\lambda}$$

in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ sind.

Bekanntlich ist

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

und folglich durch Differentiation:

$$x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}=r\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Ferner ist nach 4):

$$y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}=C,$$

$$z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t}=C_1,$$

$$x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}=C_2.$$

Bestimmt man mittelst dieser Gleichungen und der zwei vorhergehenden Gleichungen die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial t},\ \frac{\partial y}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial t};$$

so erhält man leicht:

$$49)\quad\ldots\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t}&=\frac{C_1 z-C_2 y}{r}+\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},\\ \frac{\partial y}{\partial t}&=\frac{C_2 x-Cz}{r^2}+\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},\\ \frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{Cy-C_1 x}{r^2}+\frac{z}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Nach 11) ist aber:

$$C=\mp K\sin\theta\sin i,\quad C_1=\pm K\cos\theta\sin i,\quad C_2=-K\cos i;$$

also nach 48):

$$C=\mp k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}}\sin\theta\sin i,$$

$$C_1=\pm k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}}\cos\theta\sin i,$$

$$C_2=-k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}}\cos i;$$

indem man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem θ ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist; also sind C, C_1, C_2 in Bezug auf die Grösse k von der ersten Ordnung, und da nun nach dem Vorhergehenden auch $\frac{\partial r}{\partial t}$ in Bezug auf diese Grösse von der ersten Ordnung ist, so sind nach 49) in der That auch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial t},\ \frac{\partial y}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial t}$$

in Bezug auf die Grösse k von der ersten Ordnung, wie bewiesen werden sollte.

Wenn wir die Gleichungen 49) quadriren und dann zu einander addiren, so erhalten wir nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{(C^2+C_1^2+C_2^2)r^2-(Cx+C_1y+C_2z)^2}{r^4}+\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2,$$

also nach 9) und 5):

$$50)\quad v^2=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{K^2}{r^2}+\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2.$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen 49) leicht:

$$51)\quad \begin{cases} C_1\dfrac{\partial z}{\partial t}-C_2\dfrac{\partial y}{\partial t}=-\dfrac{K^2x}{r^3}+\dfrac{C_1z-C_2y}{r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial t}, \\[2ex] C_2\dfrac{\partial x}{\partial t}-C\dfrac{\partial z}{\partial t}=-\dfrac{K^2y}{r^3}+\dfrac{C_2x-Cz}{r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial t}, \\[2ex] C\dfrac{\partial y}{\partial t}-C_1\dfrac{\partial x}{\partial t}=-\dfrac{K^2z}{r^3}+\dfrac{Cy-C_1x}{r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial t}; \end{cases}$$

und wenn man nun die Gleichungen 49) differentiirt, so erhält man in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen leicht die folgenden Ausdrücke:

$$52)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\dfrac{K^2x}{r^4}+\dfrac{x}{r}\cdot\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\dfrac{K^2y}{r^4}+\dfrac{y}{r}\cdot\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-\dfrac{K^2y}{r^4}+\dfrac{z}{r}\cdot\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2} \end{cases}$$

oder nach 48):

$$53) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k^2\frac{1+\frac{m}{M}}{A}\cdot\frac{x}{r^4}+\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2\frac{1+\frac{m}{M}}{A}\cdot\frac{y}{r^4}+\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -k^2\frac{1+\frac{m}{M}}{A}\cdot\frac{z}{r^4}+\frac{z}{r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$54) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})\frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})\frac{y}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -k^2(1+\frac{m}{M})\frac{z}{r^3} \end{cases}$$

ist, so erhält man, wenn man diese Ausdrücke in die vorhergehenden Gleichungen einführt, die folgende Formel:

$$55) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = k^2(1+\frac{m}{M})\frac{1-Ar}{Ar^3}.$$

Hieraus erhält man durch fernere Differentiation:

$$56) \quad \ldots \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -k^2(1+\frac{m}{M}).\frac{3-2Ar}{Ar^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}$$

und

$$57) \quad \frac{\partial^4 r}{\partial t^4} = k^2(1+\frac{m}{M})\left\{\frac{6(2-Ar)}{Ar^5}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - \frac{3-2Ar}{Ar^4}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right\},$$

welche Differentialquotienten man auch leicht noch weiter entwickeln könnte.

§. 11.

Weil nach 30) bekanntlich

$$r = (A + B\cos v)^{-1}$$

ist, so ist

$$\frac{\partial r}{\partial v}=(A+B\cos v)^{-2}.B\sin v=\frac{B\sin v}{(A+B\cos v)^2},$$

und folglich, weil nach 18)

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{r^2}$$

ist:

$$58) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial r}{\partial t}=KB\sin v$$

oder

$$59) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial r}{\partial t}=\frac{kB}{\sqrt{A}}\sqrt{1+\frac{m}{M}}\cdot\sin v.$$

Setzt man aber für die Ellipse und Hyperbel respective

$$60) \quad \ldots\ldots \quad e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

und

$$61) \quad \ldots\ldots \quad e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

und nimmt im Folgenden für den ersten Zweig der Hyperbel immer die oberen, für den zweiten Zweig der Hyperbel die unteren Zeichen, so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten

$$B=\pm Ae,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$62) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial r}{\partial t}=ke\sqrt{\pm A(1+\frac{m}{M})}.\sin v.$$

Weil, wie man sogleich findet,

$$1-Ar=\frac{B\cos v}{A+B\cos v}=Br\cos v$$

ist, so ist nach 55):

$$63) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=K^2B\cos v(A+B\cos v)^2$$

oder

$$64) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=k^2\frac{B}{A}(1+\frac{m}{M})\cos v(A+B\cos v)^2,$$

oder auch für die Ellipse und Hyperbel, immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$65)\quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \pm k^2 e\left(1+\frac{m}{M}\right)\cos v(A+B\cos v)^2.$$

Wenn man die Gleichung 63) unter der Form

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = K^2 B r^{-2}\cos v$$

darstellt, und dann differentiirt, so erhält man:

$$\frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -K^2 B\left(2r^{-3}\cos v\,\frac{\partial r}{\partial t} + r^{-2}\sin v\,\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

also, wenn man

$$\frac{\partial r}{\partial t} = KB\sin v,\quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{r^2}$$

setzt, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$66)\quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{K^3 B}{r^3}\sin v(A+3B\cos v),$$

oder

$$67)\quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{k^3 B}{r^3}\left(\frac{1+\frac{m}{M}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}\sin v(A+3B\cos v),$$

also für die Ellipse und Hyperbel:

$$68)\quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = \mp\frac{k^3 Ae}{r^3}\left(\frac{1+\frac{m}{M}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}\sin v(A+3B\cos v.)$$

Will man B ganz eliminiren, so ist, immer mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher:

$$69)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial t} = ke\sqrt{\pm A\left(1+\frac{m}{M}\right)}.\sin v, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \pm k^2 A^2 e\left(1+\frac{m}{M}\right)\cos v(1\pm e\cos v)^2, \\[2ex] \dfrac{\partial^3 r}{\partial t^3} = \mp\dfrac{k^3 A^2 e}{r^3}\left(\dfrac{1+\frac{m}{M}}{A}\right)^{\frac{3}{2}}\sin v(1\pm 3e\cos v). \end{cases}$$

Für die Parabel muss man $A = B = \frac{2}{p}$ setzen, wenn p den Parameter bezeichnet. Dies giebt nach dem Vorhergehenden:

$$70)\quad \frac{\partial r}{\partial t} = KA \sin v = k\sqrt{A(1+\frac{m}{M})}.\sin v = k\sqrt{\frac{2}{p}(1+\frac{m}{M})}.\sin v;$$

ferner:

$$71)\quad . \quad . \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = K^2A^2 \cos v(1+\cos v)^2 = 4K^2A^2 \cos v \cos \tfrac{1}{2}v^4,$$

oder

$$72)\quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 4k^2A^2(1+\frac{m}{M}) \cos v \cos \tfrac{1}{2}v^4,$$

oder

$$73)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{16k^2}{p^2}(1+\frac{m}{M}) \cos v \cos \tfrac{1}{2}v^4;$$

endlich ist

$$74)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{K^3A^3}{r^3} \sin v\,(1+3\cos v).$$

oder

$$75)\quad . \quad . \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{k^3\sqrt{A}}{r^3}(1+\frac{m}{M})^{\frac{3}{2}} \sin v(1+3\cos v),$$

oder

$$76)\quad . \quad . \quad \frac{\partial^3 r}{\partial t^3} = -\frac{k^3\sqrt{2}}{r^3\sqrt{p}}(1+\frac{m}{M})^{\frac{3}{2}} \sin v(1+3\cos v).$$

§. 12.

Die besonders wichtigen Fälle der Ellipse und Parabel wollen wir nun noch der folgenden Betrachtung unterwerfen.

Ueber der Hauptaxe der Ellipse, deren Mittelpunkt C sein mag*), als Durchmesser denke man sich einen Kreis beschrieben, und bezeichne den Brennpunkt der Ellipse, in welchem sich der Körper M befindet, durch M. Die beiden Scheitel der Hauptaxe der Ellipse seien P und A, so dass P der dem Brennpunkte M zu-

*) Eine Figur beizufügen wird nicht nöthig sein. Erforderlichen Falls würde sich dieselbe ein Jeder selbst zeichnen können.

nächst liegende Scheitel ist. Der Ort des Körpers m zur Zeit t in der Ellipse sei m. Von m denke man sich ein Perpendikel auf die Hauptaxe gefällt, und verlängere selbiges über m hinaus so weit, bis der beschriebene Kreis in m' geschnitten wird. Dann ziehe man Cm' und Mm, und bezeichne den von Cm' mit CP eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von CP an nach derselben Seite hin von 0 bis 360° zählt, nach welcher hin der von Mm mit MP eingeschlossene Winkel v von MP an von 0 bis 360° gezählt wird, durch u*); so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$a\cos u = \sqrt{a^2-b^2} + r\cos v,$$

oder, wenn wie früher

$$77) \quad \ldots \quad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

gesetzt wird:

$$78) \quad \ldots \quad a\cos u = ae + r\cos v$$

oder

$$79) \quad \ldots \quad r\cos v = a(\cos u - e).$$

Nun ist aber nach 30)

$$r = (A + B\cos v)^{-1},$$

also, wenn man dies in die vorhergehende Gleichung einführt:

$$\cos v = \frac{aA(\cos u - e)}{1 - aB(\cos u - e)},$$

woraus sich

$$A + B\cos v = \frac{A}{1 - aB(\cos u - e)} = \frac{A}{1 + eaB - aB\cos u},$$

folglich nach dem Obigen

$$r = \frac{1 + eaB}{A} - \frac{aB}{A}\cos u$$

ergiebt. Nun ist aber bekanntlich

*) Eigentlich sind v und u die, die entsprechenden Winkel messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise. (S. oben.)

$$A=\frac{a}{b^2},\quad B=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}=\frac{ea}{b^2};$$

also, wie man leicht findet:

$$e=\frac{B}{A},\quad \frac{1+eaB}{A}=a;$$

folglich:

$$80)\quad \ldots\ldots\quad r=a(1-e\cos u).$$

Nach 79) und 80) ist:

$$81)\quad \ldots\ldots\quad \cos v=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u},$$

woraus sich mittelst leichter Rechnung

$$\sin v^2=\frac{(1-e^2)\sin u^2}{(1-e\cos u)^2},$$

also, weil offenbar $\sin u$ und $\sin v$ immer gleiche Vorzeichen haben und $1-e\cos u$ stets positiv ist,

$$82)\quad \ldots\ldots\quad \sin v=\frac{\sin u\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}$$

ergiebt.

Aus der Gleichung 81) folgt ferner mittelst leichter Rechnung:

$$1\mp\cos v=\frac{(1\pm e)(1\mp\cos u)}{1-e\cos u},$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}v^2=\frac{1+e}{1-e\cos u}\sin\tfrac{1}{2}u^2,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}v^2=\frac{1-e}{1-e\cos u}\cos\tfrac{1}{2}u^2;$$

woraus sich durch Division

$$\tan\tfrac{1}{2}v^2=\frac{1+e}{1-e}\tan\tfrac{1}{2}u^2$$

oder

$$(1-e)\tan\tfrac{1}{2}v^2=(1+e)\tan\tfrac{1}{2}u^2$$

ergiebt. Offenbar ist aber immer zugleich $0<v<\pi$, $0<u<\pi$ und $\pi<v<2\pi$, $\pi<u<2\pi$, also zugleich $0<\frac{1}{2}v<\frac{1}{2}\pi$, $0<\frac{1}{2}u<\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi<\frac{1}{2}v<\pi$, $\frac{1}{2}\pi<\frac{1}{2}u<\pi$, woraus sich ergiebt, dass $\sin\frac{1}{2}v$

und $\sin\frac{1}{2}u$, $\cos\frac{1}{2}v$ und $\cos\frac{1}{2}u$, $\tang\frac{1}{2}v$ und $\tang\frac{1}{2}u$ immer gleiche Vorzeichen haben. Also ist nach dem Obigen:

$$83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\frac{1}{2}v = \sin\frac{1}{2}u\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e\cos u}}, \\ \cos\frac{1}{2}v = \cos\frac{1}{2}u\sqrt{\dfrac{1-e}{1-e\cos u}} \end{array} \right.$$

und

$$84) \quad \tang\tfrac{1}{2}v.\sqrt{1-e} = \tang\tfrac{1}{2}u.\sqrt{1+e}.$$

Rechnen wir wie gewöhnlich die Zeit t von dem Zeitpunkte an, wo der Körper m seine kleinste Entfernung von M hat, so ist nach 32):

$$t = \sqrt{\frac{A}{\mu}}.\int_0^v \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2}.$$

Differentiirt man aber die Gleichung 81), so erhält man:

$$\sin v\partial v = \frac{(1-e^2)\sin u}{(1-e\cos u)^2}\partial u,$$

also nach 82):

$$85) \quad \partial v = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\partial u.$$

Ferner ist

$$A+B\cos v = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e\cos u)},$$

also

$$\frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} = a^2\sqrt{1-e^2}.(1-e\cos u)\partial u,$$

und folglich, weil u und v zugleich verschwinden:

$$\int_0^v \frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2} = a^2\sqrt{1-e^2}.(1-e\cos u)\partial u.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$t = \frac{a^2\sqrt{(1-e^2)A}}{\sqrt{\mu}}(u-e\sin u).$$

Nun ist aber

$$A = \frac{a}{b^2}, \quad 1-e^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad (1-e^2)A = \frac{1}{a};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$86) \quad \ldots\ldots \quad t=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}(u-e\sin u),$$

oder, weil

$$\mu=M+m=M(1+\frac{m}{M})$$

und nach 41) bekanntlich $k=\sqrt{M}$ ist:

$$87) \quad \ldots\ldots \quad t=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{1+\frac{m}{M}}}(u-e\sin u)$$

oder

$$88) \quad \ldots\ldots \quad \frac{k\sqrt{1+\frac{m}{M}}}{a^{\frac{3}{2}}}t=u-e\sin u.$$

Die drei im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen:

$$89) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} t=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{1+\frac{m}{M}}}(u-e\sin u), \\ r=a(1-e\cos u), \\ \tan\frac{1}{2}v=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}.\tan\frac{1}{2}u; \end{cases}$$

durch welche t, r, v sämmtlich durch u ausgedrückt werden, sind für die elliptische Bewegung der Weltkörper um die Sonne von der grössten Wichtigkeit.

Für die Parabel müssen wir

$$A=B=\frac{2}{p}$$

setzen; also ist in diesem Falle:

$$90) \quad \ldots \quad r=\frac{1}{A(1+\cos v)}=\frac{1}{2A\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{p}{4\cos\frac{1}{2}v^2}.$$

Ferner ist für $0<v<\pi$ bekanntlich, wenn t die seit dem Zeitpunkte, wo der Körper m seine kleinste Entfernung von M hatte, verflossene Zeit bezeichnet:

$$t=\sqrt{\frac{A}{\mu}}.\int_0^v\frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

also für $A=B$:

$$t=\frac{1}{A^2}\sqrt{\frac{A}{\mu}}.\int_0^v\frac{\partial v}{4\cos\frac{1}{2}v^4}=\frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}}\int_0^v\frac{\partial\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4}.$$

Nach einer bekannten Reductionsformel der Integralrechnung ist aber

$$\int\frac{\partial\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4}=\frac{\sin\frac{1}{2}v}{3\cos\frac{1}{2}v^3}+\tfrac{2}{3}\int\frac{\partial\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^2},\quad\int\frac{\partial\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v};$$

also, wie man leicht findet:

$$\int_0^v\frac{\partial\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3,$$

folglich nach dem Obigen:

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3).$$

Bezeichnet, wenn $\pi<v<2\pi$ ist, t die Zeit, welche bis zu dem Zeitpunkte verfliesst, wo der Körper m seine kleinste Entfernung von M hat, so ist offenbar:

$$t=\sqrt{\frac{A}{\mu}}.\int_v^{2\pi}\frac{\partial v}{(A+B\cos v)^2},$$

also nach dem Obigen:

$$t=\frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}}\int_v^{2\pi}\frac{\partial\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4}.$$

Nun ist aber allgemein

$$\int\frac{\partial\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3,$$

also

$$\int_v^{2\pi}\frac{\partial\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v^4}=-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v-\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3,$$

folglich

$$t=-\frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3).$$

Bezeichnen wir nun aber, jenachdem $0 < v < \pi$ oder $\pi < v < 2\pi$ ist, die seit dem Zeitpunkte, wo m seine kleinste Entfernung von M hat, verflossene, oder die bis zu diesem Zeitpunkte noch verfliessende Zeit, indem wir zugleich diese Zeit im ersten Falle als positiv, im zweiten Falle als negativ betrachten, durch t, so ist nach dem Vorhergehenden in völliger Allgemeinheit:

$$91) \quad \ldots \quad t = \frac{1}{2\sqrt{\mu A^3}}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3)$$

oder, weil $A = \frac{2}{p}$ ist:

$$92) \quad \ldots \quad t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2\mu}}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3),$$

oder:

$$93) \quad \ldots \quad t = \frac{(\frac{1}{2}p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\mu}}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3).$$

Weil

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{M}.\sqrt{1 + \frac{m}{M}} = k\sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

ist, so ist:

$$94) \quad \ldots \quad t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4k\sqrt{2(1 + \frac{m}{M})}}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3)$$

oder

$$95) \quad \ldots \quad t = \frac{(\frac{1}{2}p)^{\frac{3}{2}}}{2k\sqrt{1 + \frac{m}{M}}}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}v)^3,$$

welche Formeln besonders für die Theorie der Cometen von sehr grosser Wichtigkeit sind.

Nach dem berühmten **Lambert**'schen oder **Euler**'schen Theorem von der Quadratur parabolischer Sectoren *) ist, wenn dem Sector S_τ die Vectoren r_1, r_2 und die dazwischen liegende Sehne $s_{1,2}$ entsprechen:

$$S_\tau = \tfrac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}\,.\,\{(r_1 + r_2 + s_{1,2})^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s_{1,2})^{\frac{3}{2}}\},$$

*) Archiv. Thl. XVI. S. 439.

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der von den Vectoren r_1, r_2 nach der Seite der Parabel hin eingeschlossene Winkel ein concaver oder ein convexer Winkel ist. Weil nun nach 34) allgemein

$$\tau = 2\sqrt{\frac{A}{M+m}}\,.\,S_\tau = \frac{2\sqrt{2}}{k\sqrt{p}\,.\sqrt{1+\frac{m}{M}}}\,.\,S_\tau$$

ist, so ist für die Parabel:

$$96)\quad .\ \tau = \frac{1}{6k\sqrt{1+\frac{m}{M}}}\{(r_1+r_2+s_{1,2})^{\frac{3}{2}} \mp (r_1+r_2-s_{1,2})^{\frac{3}{2}}\},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der von den Vectoren r_1, r_2 nach der Seite der Parabel hin eingeschlossene Winkel ein concaver oder ein convexer Winkel ist.

Anhang.

Es giebt noch eine Klasse sehr merkwürdiger allgemein gültiger Formeln, zu deren Entwickelung sich im Vorhergehenden noch keine Gelegenheit dargeboten hat. Diese nach meiner Meinung sehr bemerkenswerthen Formeln will ich daher in diesem Anhange noch entwickeln.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von der Sonne als dem Anfange der Coordinaten nach dem Perihelium gezogene gerade Linie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, wollen wir respective durch λ, μ, ν bezeichnen. Dann ist, weil offenbar $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die Cosinus der 180° nicht übersteigenden Winkel sind, welche der Vector r mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, wie man sogleich übersieht, in völliger Allgemeinheit:

$$97)\quad \ldots\ .\ \cos v = \frac{x}{r}\cos\lambda + \frac{y}{r}\cos\mu + \frac{z}{r}\cos\nu,$$

oder:

$$98)\quad \ldots\ .\ x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = r\cos v.$$

Nun ist aber nach 30) allgemein:

$$r=(A+B\cos v)^{-1},$$

also:

$$99) \quad \cos v=\frac{1-Ar}{Br},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$100) \quad x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=\frac{1-Ar}{B},$$

also, wenn man differentiirt:

$$101) \quad \frac{\partial x}{\partial t}\cos\lambda+\frac{\partial y}{\partial t}\cos\mu+\frac{\partial z}{\partial t}\cos\nu=-\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{1-Ar}{B}=x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu,$$

$$-\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}\cos\lambda+\frac{\partial y}{\partial t}\cos\mu+\frac{\partial z}{\partial t}\cos\nu$$

erhält man sehr leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}=(z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t})\cos\nu-(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})\cos\mu,$$

$$\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}=(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})\cos\lambda-(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t})\cos\nu,$$

$$\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}=(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t})\cos\mu-(z\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial z}{\partial t})\cos\lambda;$$

folglich nach 4):

$$102) \quad \left\{\begin{aligned}\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}&=C_1\cos\nu-C_2\cos\mu,\\ \frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}&=C_2\cos\lambda-C\cos\nu,\\ \frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}&=C\cos\mu-C_1\cos\lambda.\end{aligned}\right.$$

Quadrirt man diese Gleichungen auf beiden Seiten und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$\cos\lambda^2+\cos\mu^2+\cos\nu^2=1$$

ist, sehr leicht die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$
$$=C^2+C_1{}^2+C_2{}^2-(C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu)^2,$$

und folglich nach 9):

$$\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$
$$=K^2-(C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu)^2.$$

Entwickelt man nun die Summe der Quadrate auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man für dieselbe, weil

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
$$x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}=r\frac{\partial r}{\partial t}$$

ist, zuvörderst leicht den folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{1-Ar}{B}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{A^2r^2}{B^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2+2\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{A}{B}\cdot r\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2,$$

also nach 50) den Ausdruck:

$$\left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2K^2+\left\{\left(\frac{1-Ar}{B}\right)^2+\frac{A^2r^2}{B^2}+2\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{Ar}{B}\right\}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2K^2+\frac{1}{B^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\frac{1-Ar}{Br}=\cos v,\text{ und nach 58): }\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}=K\sin v;$$

also ist offenbar:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{Ax}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\\+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{Ay}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\\+\left(\frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{Az}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\end{array}\right\}=K^2,$$

so dass man also nach dem Obigen die Gleichung

$$K^2=K^2-(C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu)^2$$

hat, aus welcher sich die Gleichung

$$103)\quad\ldots\quad C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu=0$$

ergiebt.

Daher haben wir jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$104)\quad\left\{\begin{array}{l}x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=\frac{1-Ar}{B},\\\frac{\partial x}{\partial t}\cos\lambda+\frac{\partial y}{\partial t}\cos\mu+\frac{\partial z}{\partial t}\cos\nu=-\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t},\\C\cos\lambda+C_1\cos\mu+C_2\cos\nu=0.\end{array}\right.$$

Um aus diesen Gleichungen $\cos\lambda$ zu bestimmen, multiplicire man dieselben nach der Reihe mit

$$C_2\frac{\partial y}{\partial t}-C_1\frac{\partial z}{\partial t},\quad C_1z-C_2y,\quad y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}$$

und addire sie dann zu einander, so erhält man:

$$\left\{x\left(C_2\frac{\partial y}{\partial t}-C_1\frac{\partial z}{\partial t}\right)+\frac{\partial x}{\partial t}(C_1z-C_2y)+C\left(y\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right\}\cos\lambda$$
$$=\frac{1-Ar}{B}\left(C_2\frac{\partial y}{\partial t}-C_1\frac{\partial z}{\partial t}\right)-\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}(C_1z-C_2y).$$

Führt man in den Factor von $\cos\lambda$ auf der linken Seite des Gleichheitszeichens für C, C_1, C_2 ihre Ausdrücke aus 4) ein, so erhält man für diesen Factor leicht den folgenden Ausdruck:

$$x^2\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-2xy\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+y^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-2yz\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$+z^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right\}-2zx\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}$$
$$=(x^2+y^2+z^2)\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}-\left(x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$$
$$=r^2\left\{\frac{K^2}{r^2}+\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right\}-r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=K^2,$$

und die obige Gleichung zur Bestimmung von $\cos\lambda$ erhält daher die folgende Form:

$$K^2\cos\lambda = \frac{1-Ar}{B}(C_2\frac{\partial y}{\partial t} - C_1\frac{\partial z}{\partial t}) - \frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}(C_1 z - C_2 y).$$

Führt man nun auch in die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens für C_1 und C_2 ihre Ausdrücke aus 4) ein, so erhält man für diese Grösse leicht den folgenden Ausdruck:

$$\frac{1-Ar}{B}\{x\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right] - \left(x\frac{\partial x}{\partial t} + y\frac{\partial y}{\partial t} + z\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t}\}$$

$$-\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\{(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial x}{\partial t} - x(x\frac{\partial x}{\partial t} + y\frac{\partial y}{\partial t} + z\frac{\partial z}{\partial t})\}$$

$$= \frac{1-Ar}{B}\{\frac{K^2x}{r^2} + x\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - r\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\}$$

$$-\frac{Ar}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}(r\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial r}{\partial t})$$

$$= \frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{K^2x}{r^2} + \left(\frac{1-Ar}{B} + \frac{Ar}{B}\right)x\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2$$

$$-\left(\frac{1-Ar}{B} + \frac{Ar}{B}\right)r\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{K^2x}{r^2} + \frac{1}{B}\{x\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - r\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\}$$

$$= \frac{1-Ar}{B}\cdot\frac{K^2x}{r^2} + BK^2x\sin v^2 - Kr\frac{\partial x}{\partial t}\sin v$$

$$= \frac{K^2x}{r^2}\left(\frac{1-Ar}{B} + Br^2\sin v^2\right) - Kr\frac{\partial x}{\partial t}\sin v$$

Nun ist aber

$$\sin v^2 = 1 - \left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2,$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\frac{1-Ar}{B} + Br^2\sin v^2 = r\frac{A-(A^2-B^2)r}{B};$$

also obige Grösse:

$$\frac{K^2x}{r}\cdot\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - Kr\frac{\partial x}{\partial t}\sin v.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$K\cos\lambda = \frac{Kx}{r} \cdot \frac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\frac{\partial x}{\partial t}\sin v,$$

und man hat also jetzt überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$105) \quad \begin{cases} K\cos\lambda = \dfrac{Kx}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\dfrac{\partial x}{\partial t}\sin v, \\[2ex] K\cos\mu = \dfrac{Ky}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\dfrac{\partial y}{\partial t}\sin v, \\[2ex] K\cos\nu = \dfrac{Kz}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\dfrac{\partial z}{\partial t}\sin v; \end{cases}$$

oder:

$$106) \quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{x}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \dfrac{r}{K} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t}\sin v, \\[2ex] \cos\mu = \dfrac{y}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \dfrac{r}{K} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial t}\sin v, \\[2ex] \cos\nu = \dfrac{z}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \dfrac{r}{K} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial t}\sin v; \end{cases}$$

oder nach 35), wenn wir $M+m$ für das dortige μ setzen:

$$107) \quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{x}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\sqrt{\dfrac{A}{M+m}} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t}\sin v, \\[2ex] \cos\mu = \dfrac{y}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\sqrt{\dfrac{A}{M+m}} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial t}\sin v, \\[2ex] \cos\nu = \dfrac{z}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - r\sqrt{\dfrac{A}{M+m}} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial t}\sin v. \end{cases}$$

Sind die Massen positiv, so ist nach 48):

$$K = k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}},$$

und, wenn man den Bruch $\frac{m}{M}$ vernachlässigt:

$$K = \frac{k}{\sqrt{A}};$$

also unter diesen Voraussetzungen nach 106):

$$108) \quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{x}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \dfrac{r\sqrt{A}}{k} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t} \sin v, \\ \cos\mu = \dfrac{y}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \dfrac{r\sqrt{A}}{k} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial t} \sin v, \\ \cos\nu = \dfrac{z}{r} \cdot \dfrac{A-(A^2-B^2)r}{B} - \dfrac{r\sqrt{A}}{k} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial t} \sin v; \end{cases}$$

wo nach dem Obigen bekanntlich

$$109) \quad \ldots \quad \sin v = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2}$$

ist, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem v zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegt

Im Falle der Ellipse ist bekanntlich:

$$A = \frac{a}{b^2}, \quad B = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} = \frac{ea}{b^2};$$

also

$$A^2 - B^2 = \frac{1}{b^2},$$

und folglich:

$$\frac{A-(A^2-B^2)r}{B} = \frac{a-r}{ea}.$$

Folglich ist in diesem Falle:

$$110) \quad \begin{cases} e\cos\lambda = \dfrac{x}{r} \cdot \dfrac{a-r}{a} - \dfrac{er\sqrt{a}}{kb} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t} \sin v, \\ e\cos\mu = \dfrac{y}{r} \cdot \dfrac{a-r}{a} - \dfrac{er\sqrt{a}}{kb} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial t} \sin v, \\ e\cos\nu = \dfrac{z}{r} \cdot \dfrac{a-r}{a} - \dfrac{er\sqrt{a}}{kb} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial t} \sin v; \end{cases}$$

wo bekanntlich $b = a\sqrt{1-e^2}$ ist.

Ferner ist

$$1-\left(\frac{1-Ar}{Br}\right)^2=\frac{2Ar-1-(A^2-B^2)r^2}{B^2r^2}$$

$$=\frac{2ar-b^2-r^2}{B^2b^2r^2}$$

$$=\frac{a^2-b^2-(a^2-2ar+r^2)}{B^2b^2r^2}$$

$$=\frac{a^2-b^2-(a-r)^2}{B^2b^2r^2}$$

$$=\frac{a^2\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}}{B^2b^2r^2}$$

$$=\frac{b^2\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}}{e^2r^2},$$

und folglich:

$$\frac{er\sqrt{a}}{b}\sin v=\pm\sqrt{a\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem v zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegt. Also ist mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens:

$$111)\quad\left\{\begin{aligned}e\cos\lambda&=\frac{x}{r}\cdot\frac{a-r}{a}\mp\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{a\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}},\\ e\cos\mu&=\frac{y}{r}\cdot\frac{a-r}{a}\mp\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\sqrt{a\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}},\\ e\cos\nu&=\frac{z}{r}\cdot\frac{a-r}{a}\mp\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\sqrt{a\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}};\end{aligned}\right.$$

oder:

$$112)\quad\left\{\begin{aligned}e\cos\lambda\pm\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{a\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}}-\frac{x}{r}\cdot\frac{a-r}{a}&=0,\\ e\cos\mu\pm\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\sqrt{a\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}}-\frac{y}{r}\cdot\frac{a-r}{a}&=0,\\ e\cos\nu\pm\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\sqrt{a\left\{e^2-\left(\frac{a-r}{a}\right)^2\right\}}-\frac{z}{r}\cdot\frac{a-r}{a}&=0.\end{aligned}\right.$$

Zweites Kapitel.

Bestimmung der Bahn eines Weltkörpers aus drei geocentrischen Beobachtungen desselben.

I.

Fundamental-Gleichungen.

§. 1.

Die Zeiten der drei Beobachtungen, aufsteigend nach ihrer Grösse geordnet, seien t_1, t_2, t_3; die Zeitintervalle t_3-t_2, t_3-t_1, t_2-t_1 sollen aber respective durch τ_1, τ_2, τ_3 bezeichnet werden, so dass also

$$\tau_1=t_3-t_2,\quad \tau_2=t_3-t_1,\quad \tau_3=t_2-t_1$$

ist. Die Sonne nehmen wir als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an; die Ebene der Ekliptik sei die Ebene der xy; der positive Theil der Axe der x sei nach dem Anfangspunkte der Längen, der positive Theil der Axe der y sei nach dem neunzigsten Grade der Längen, und der positive Theil der Axe der z sei nach dem Nordpole der Ekliptik gerichtet. Die den Zeiten

$$t_1,\quad t_2,\quad t_3$$

entsprechenden Coordinaten des Weltkörpers, dessen Bahn bestimmt werden soll, in diesem Systeme, und seine denselben Zeiten entsprechenden Vectoren seien

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3$$

und

$$r_1,\quad r_2,\quad r_3.$$

Die den obigen Zeiten entsprechenden geocentrischen Längen und Breiten des Weltkörpers seien

$$\lambda_1,\ \beta_1;\quad \lambda_2,\ \beta_2;\quad \lambda_3,\ \beta_3.$$

Die Coordinaten der Erde für dieselben Zeiten seien

$$X_1,\ Y_1;\quad X_2,\ Y_2;\quad X_3,\ Y_3;$$

e heliocentrischen Längen und ihre Vectoren seien

$$L_1,\ L_2,\ L_3 \text{ und } R_1,\ R_2,\ R_3.$$

Die heliocentrischen Längen der Erde können immer leicht aus den geocentrischen Längen der Sonne, welche bekanntlich die Tafeln geben, gefunden werden, weil, wenn $\mathfrak{L}$ eine beliebige geocentrische Länge der Sonne und L die entsprechende heliocentrische Länge der Erde ist, offenbar immer

$$L = \mathfrak{L} \pm 180^0$$

ist, wenn man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\mathfrak{L}$ kleiner oder grösser als 180^0 ist.

Die den Zeitintervallen

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$$

entsprechenden Sehnen der zu bestimmenden Bahn unsers Weltkörpers, und die denselben Zeitintervallen entsprechenden Sehnen der Erdbahn wollen wir respective durch

$$s_1,\ s_2,\ s_3 \text{ und } S_1,\ S_2,\ S_3$$

bezeichnen.

Endlich sollen die den Zeitintervallen

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$$

entsprechenden Dreiecksflächen der zu bestimmenden Bahn unsers Weltkörpers und der Erdbahn, welche respective von den Seiten

$$s_1 r_2 r_3,\ r_1 s_2 r_3,\ r_1 r_2 s_3$$

und

$$S_1 R_2 R_3,\ R_1 S_2 R_3,\ R_1 R_2 S_3$$

eingeschlossen werden, durch

$$f_1,\ f_2,\ f_3 \text{ und } F_1,\ F_2,\ F_3$$

bezeichnet werden.

§. 2.

Nach einem sehr bekannten Satze der analytischen Geometrie ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den folgenden Formeln auf einander:

$$2F_1 = \pm(X_2 Y_3 - X_3 Y_2),$$
$$2F_2 = \pm(X_1 Y_3 - X_3 Y_1),$$
$$2F_3 = \pm(X_1 Y_2 - X_2 Y_1);$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 X_1 - F_2 X_2 + F_3 X_3 = 0, \\ F_1 Y_1 - F_2 Y_2 + F_3 Y_3 = 0. \end{array} \right.$$

Die Projectionen von

$$f_1,\ f_2,\ f_3$$

auf der Ebene der xy seien respective

$$\overset{xy}{f_1},\ \overset{xy}{f_2},\ \overset{xy}{f_3};$$

so ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander nach demselben Satze wie vorher:

$$2\overset{xy}{f_1} = \pm(x_2 y_3 - x_3 y_2),$$
$$2\overset{xy}{f_2} = \pm(x_1 y_3 - x_3 y_1),$$
$$2\overset{xy}{f_3} = \pm(x_1 y_2 - x_2 y_1);$$

woraus sich ganz auf dieselbe Weise wie vorher die beiden Gleichungen

$$\overset{xy}{f_1} x_1 - \overset{xy}{f_2} x_2 + \overset{xy}{f_3} x_3 = 0,$$
$$\overset{xy}{f_1} y_1 - \overset{xy}{f_2} y_2 + \overset{xy}{f_3} y_3 = 0$$

ergeben. Nach einem allgemein bekannten geometrischen Satze ist aber

$$f_1 : f_2 : f_3 = \overset{xy}{f_1} : \overset{xy}{f_2} : \overset{xy}{f_3},$$

also nach dem Vorhergehenden auch:

$$f_1 x_1 - f_2 x_2 + f_3 x_3 = 0,$$
$$f_1 y_1 - f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0.$$

Stellt man nun die so eben für die Ebene der xy angestellte Betrachtung ganz in derselben Weise auch für die Ebenen der yz und zx an, so erhält man überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$2) \quad \ldots\ldots \begin{cases} f_1x_1 - f_2x_2 + f_3x_3 = 0, \\ f_1y_1 - f_2y_2 + f_3y_3 = 0, \\ f_1z_1 - f_2z_2 + f_3z_3 = 0. \end{cases}$$

§. 3.

Legen wir jetzt zu jeder der drei Zeiten t_1, t_2, t_3 durch die Erde als Anfang ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensystem, und bezeichnen in diesen drei Systemen die Coordinaten des Weltkörpers, dessen Bahn bestimmt werden soll, zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 respective durch

$$x_1', y_1', z_1'; \quad x_2', y_2', z_2'; \quad x_3', y_3', z_3';$$

so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$x_1 = X_1 + x_1', \quad y_1 = Y_1 + y_1', \quad z_1 = z_1';$$
$$x_2 = X_2 + x_2', \quad y_2 = Y_2 + y_2', \quad z_2 = z_2';$$
$$x_3 = X_3 + x_3', \quad y_3 = Y_3 + y_3', \quad z_3 = z_3';$$

aus denen sich, in Verbindung mit 2), die drei folgenden Gleichungen ergeben:

$$f_1(X_1 + x_1') - f_2(X_2 + x_2') + f_3(X_3 + x_3') = 0,$$
$$f_1(Y_1 + y_1') - f_2(Y_2 + y_2') + f_3(Y_3 + y_3') = 0,$$
$$f_1z_1' - f_2z_2' + f_3z_3' = 0.$$

Multipliciren wir nun diese Gleichungen nach der Reihe zuerst mit

$$y_2'z_3' - y_3'z_2', \quad z_2'x_3' - z_3'x_2', \quad x_2'y_3' - x_3'y_2';$$

dann nach der Reihe mit

$$y_3'z_1' - y_1'z_3', \quad z_3'x_1' - z_1'x_3', \quad x_3'y_1' - x_1'y_3';$$

endlich nach der Reihe mit

$$y_1'z_2' - y_2'z_1', \quad z_1'x_2' - z_2'x_1', \quad x_1'y_2' - x_2'y_1';$$

und addiren sie in jedem einzelnen Falle zu einander, so erhalten wir, wenn der Kürze wegen

$$3) \quad \Omega = x_1'(y_2'z_3' - y_3'z_2') + x_2'(y_3'z_1' - y_1'z_3') + x_3'(y_1'z_2' - y_2'z_1')$$

gesetzt wird, sehr leicht die drei folgenden Gleichungen:

4)

$$\begin{aligned}
0 = \;& f_1\Omega + f_1\{X_1(y_2'z_3'-y_3'z_2') + Y_1(z_2'x_3'-z_3'x_2')\}\\
& - f_2\{X_2(y_2'z_3'-y_3'z_2') + Y_2(z_2'x_3'-z_3'x_2')\}\\
& + f_3\{X_3(y_2'z_3'-y_3'z_2') + Y_3(z_2'x_3'-z_3'x_2')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -f_2\Omega + f_1\{X_1(y_3'z_1'-y_1'z_3') + Y_1(z_3'x_1'-z_1'x_3')\}\\
& - f_2\{X_2(y_3'z_1'-y_1'z_3') + Y_2(z_3'x_1'-z_1'x_3')\}\\
& + f_3\{X_3(y_3'z_1'-y_1'z_3') + Y_3(z_3'x_1'-z_1'x_3')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \;& f_3\Omega + f_1\{X_1(y_1'z_2'-y_2'z_1') + Y_1(z_1'x_2'-z_2'x_1')\}\\
& - f_2\{X_2(y_1'z_2'-y_2'z_1') + Y_2(z_1'x_2'-z_2'x_1')\}\\
& + f_3\{X_3(y_1'z_2'-y_2'z_1') + Y_3(z_1'x_2'-z_2'x_1')\}.
\end{aligned}$$

Auch hat man nach 1) offenbar die drei folgenden Gleichungen:

5)

$$\begin{aligned}
0 = \;& F_1\{X_1(y_2'z_3'-y_3'z_2') + Y_1(z_2'x_3'-z_3'x_2')\}\\
& - F_2\{X_2(y_2'z_3'-y_3'z_2') + Y_2(z_2'x_3'-z_3'x_2')\}\\
& + F_3\{X_3(y_2'z_3'-y_3'z_2') + Y_3(z_2'x_3'-z_3'x_2')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \;& F_1\{X_1(y_3'z_1'-y_1'z_3') + Y_1(z_3'x_1'-z_1'x_3')\}\\
& - F_2\{X_2(y_3'z_1'-y_1'z_3') + Y_2(z_3'x_1'-z_1'x_3')\}\\
& + F_3\{X_3(y_3'z_1'-y_1'z_3') + Y_3(z_3'x_1'-z_1'x_3')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \;& F_1\{X_1(y_1'z_2'-y_2'z_1') + Y_1(z_1'x_2'-z_2'x_1')\}\\
& - F_2\{X_2(y_1'z_2'-y_2'z_1') + Y_2(z_1'x_2'-z_2'x_1')\}\\
& + F_3\{X_3(y_1'z_2'-y_2'z_1') + Y_3(z_1'x_2'-z_2'x_1')\}.
\end{aligned}$$

§. 4.

Offenbar ist nun:

$$6)\quad \ldots \quad \left\{\begin{aligned}
X_1 &= R_1\cos L_1, & Y_1 &= R_1\sin L_1;\\
X_2 &= R_2\cos L_2, & Y_2 &= R_2\sin L_2;\\
X_3 &= R_3\cos L_3, & Y_3 &= R_3\sin L_3;
\end{aligned}\right.$$

und wenn wir die sogenannten curtirten Entfernungen unsers Weltkörpers von der Erde zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 durch ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bezeichnen, so ist offenbar:

$$7) \quad \begin{cases} x_1' = \varrho_1 \cos\lambda_1, \; y_1' = \varrho_1 \sin\lambda_1, \; z_1' = \varrho_1 \tang\beta_1; \\ x_2' = \varrho_2 \cos\lambda_2, \; y_2' = \varrho_2 \sin\lambda_2, \; z_2' = \varrho_2 \tang\beta_2; \\ x_3' = \varrho_3 \cos\lambda_3, \; y_3' = \varrho_3 \sin\lambda_3, \; z_3' = \varrho_3 \tang\beta_3. \end{cases}$$

Was nun zuerst die Grösse Ω betrifft, so ist nach 3) und 7):

$$\Omega = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda_1 (\sin\lambda_2 \tang\beta_3 - \sin\lambda_3 \tang\beta_2) \\ +\cos\lambda_2 (\sin\lambda_3 \tang\beta_1 - \sin\lambda_1 \tang\beta_3) \\ +\cos\lambda_3 (\sin\lambda_1 \tang\beta_2 - \sin\lambda_2 \tang\beta_1) \end{array} \right\},$$

also offenbar:

$$\Omega = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \{\sin(\lambda_3-\lambda_2)\tang\beta_1 - \sin(\lambda_3-\lambda_1)\tang\beta_2 + \sin(\lambda_2-\lambda_1)\tang\beta_3\},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

8)

$$\bar{\omega} = \sin(\lambda_3-\lambda_2)\tang\beta_1 - \sin(\lambda_3-\lambda_1)\tang\beta_2 + \sin(\lambda_2-\lambda_1)\tang\beta_3$$

oder

8*)

$$\bar{\omega} = -\{\sin(\lambda_2-\lambda_3)\tang\beta_1 + \sin(\lambda_3-\lambda_1)\tang\beta_2 + \sin(\lambda_1-\lambda_2)\tang\beta_3\}$$

setzen:

$$9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega = \varrho_1\varrho_2\varrho_3\bar{\omega}.$$

Wenn man von der Sonne oder einem anderen beliebigen Punkte im Raume aus Linien zieht, welche mit den zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 von der Erde aus nach dem Weltkörper gezogenen Geraden parallel und gleich gerichtet sind, und auf diesen Linien von dem in Rede stehenden Punkte aus Stücke abschneidet, welche den entsprechenden Entfernungen des Weltkörpers von der Erde gleich sind, so sind die Endpunkte dieser abgeschnittenen Stücke und der Punkt, von welchem aus die drei Linien gezogen worden sind, die vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide, deren sechsfacher körperlicher Inhalt der absolute Werth der Grösse Ω ist *). Also ist nach 9) die Grösse $\bar{\omega}$ der sechsfache Inhalt dieser Pyramide,

---

*) M. s. den Ausdruck 3) von Ω und meine Elemente der analytischen Geometrie. Thl. I. Leipzig. 1839. S. 257.

durch das Product der drei curtirten Entfernungen des Weltkörpers von der Erde oder durch das von diesen drei curtirten Entfernungen als in einer Ecke zusammenstossenden Kanten gebildete rechtwinklige Parallelepipedon dividirt, wobei es sich natürlich nur um den absoluten Werth der Grösse ϖ handelt.

Ferner ist, wenn wir der Kürze wegen

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 &= \sin(L_1-\lambda_3)\tang\beta_2-\sin(L_1-\lambda_2)\tang\beta_3,\\ A_2 &= \sin(L_2-\lambda_3)\tang\beta_2-\sin(L_2-\lambda_2)\tang\beta_3,\\ A_3 &= \sin(L_3-\lambda_3)\tang\beta_2-\sin(L_3-\lambda_2)\tang\beta_3;\end{aligned}\right.$$

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} B_1 &= \sin(L_1-\lambda_1)\tang\beta_3-\sin(L_1-\lambda_3)\tang\beta_1,\\ B_2 &= \sin(L_2-\lambda_1)\tang\beta_3-\sin(L_2-\lambda_3)\tang\beta_1,\\ B_3 &= \sin(L_3-\lambda_1)\tang\beta_3-\sin(L_3-\lambda_3)\tang\beta_1;\end{aligned}\right.$$

$$12)\quad \left\{\begin{aligned} C_1 &= \sin(L_1-\lambda_2)\tang\beta_1-\sin(L_1-\lambda_1)\tang\beta_2,\\ C_2 &= \sin(L_2-\lambda_2)\tang\beta_1-\sin(L_2-\lambda_1)\tang\beta_2,\\ C_3 &= \sin(L_3-\lambda_2)\tang\beta_1-\sin(L_3-\lambda_1)\tang\beta_2\end{aligned}\right.$$

setzen, nach den Gleichungen 4) und 5), wie man leicht findet:

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi f_1\varrho_1+A_1R_1f_1-A_2R_2f_2+A_3R_3f_3&=0,\\ -\varpi f_2\varrho_2+B_1R_1f_1-B_2R_2f_2+B_3R_3f_3&=0,\\ \varpi f_3\varrho_3+C_1R_1f_1-C_2R_2f_2+C_3R_3f_3&=0\end{aligned}\right.$$

und

$$14)\quad \left\{\begin{aligned} A_1R_1F_1-A_2R_2F_2+A_3R_3F_3&=0,\\ B_1R_1F_1-B_2R_2F_2+B_3R_3F_3&=0,\\ C_1R_1F_1-C_2R_2F_2+C_3R_3F_3&=0.\end{aligned}\right.$$

§. 5.

Die Coordinaten der Sonne in Bezug auf die zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 durch die Erde als Anfang gelegten Coordinatensysteme sind offenbar:

$$-R_1\cos L_1,\quad -R_1\sin L_1;$$

$$-R_2\cos L_2,\quad -R_2\sin L_2;$$

$$-R_3\cos L_3,\quad -R_3\sin L_3:$$

also haben wir nach den Lehren der analytischen Geometrie die drei folgenden Gleichungen:

$$(x_1'+R_1\cos L_1)^2+(y_1'+R_1\sin L_1)^2+z_1'^2=r_1^2,$$
$$(x_2'+R_2\cos L_2)^2+(y_2'+R_2\sin L_2)^2+z_2'^2=r_2^2,$$
$$(x_3'+R_3\cos L_3)^2+(y_3'+R_3\sin L_3)^2+z_3'^2=r_3^2;$$

folglich nach 7):

$$(\varrho_1\cos\lambda_1+R_1\cos L_1)^2+(\varrho_1\sin\lambda_1+R_1\sin L_1)^2+\varrho_1^2\operatorname{tang}\beta_1^2=r_1^2,$$
$$(\varrho_2\cos\lambda_2+R_2\cos L_2)^2+(\varrho_2\sin\lambda_2+R_2\sin L_2)^2+\varrho_2^2\operatorname{tang}\beta_2^2=r_2^2,$$
$$(\varrho_2\cos\lambda_3+R_3\cos L_3)^2+(\varrho_3\sin\lambda_3+R_3\sin L_3)^2+\varrho_3^2\operatorname{tang}\beta_3^2=r_3^2;$$

woraus man, wenn man die Quadrate entwickelt, mittelst einiger allgemein bekannten goniometrischen Relationen sogleich erhält:

$$15)\ \ldots \left\{\begin{aligned} &R_1^2+2\varrho_1R_1\cos(L_1-\lambda_1)+\varrho_1^2\sec\beta_1^2=r_1^2,\\ &R_2^2+2\varrho_2R_2\cos(L_2-\lambda_2)+\varrho_2^2\sec\beta_2^2=r_2^2,\\ &R_3^2+2\varrho_3R_3\cos(L_3-\lambda_3)+\varrho_3^2\sec\beta_3^2=r_3^2.\end{aligned}\right.$$

Ferner hat man offenbar die folgenden Gleichungen:

$$s_1^2=(x_2'-x_3')^2+(y_2'-y_3')^2+(z_2'-z_3')^2,$$
$$s_2^2=(x_3'-x_1')^2+(y_3'-y_1')^2+(z_3'-z_1')^2,$$
$$s_3^2=(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2;$$

also nach 7):

$$s_1^2=(\varrho_2\cos\lambda_2-\varrho_3\cos\lambda_3)^2+(\varrho_2\sin\lambda_2-\varrho_3\sin\lambda_3)^2+(\varrho_2\operatorname{tang}\beta_2-\varrho_3\operatorname{tang}\beta_3)^2,$$
$$s_2^2=(\varrho_3\cos\lambda_3-\varrho_1\cos\lambda_1)^2+(\varrho_3\sin\lambda_3-\varrho_1\sin\lambda_1)^2+(\varrho_3\operatorname{tang}\beta_3-\varrho_1\operatorname{tang}\beta_1)^2,$$
$$s_3^2=(\varrho_1\cos\lambda_1-\varrho_2\cos\lambda_2)^2+(\varrho_1\sin\lambda_1-\varrho_2\sin\lambda_2)^2+(\varrho_1\operatorname{tang}\beta_1-\varrho_2\operatorname{tang}\beta_2)^2;$$

woraus man nach Entwickelung der Quadrate erhält:

$$s_1^2=\varrho_2^2\sec\beta_2^2+\varrho_3^2\sec\beta_3^2-2\varrho_2\varrho_3\{\cos(\lambda_2-\lambda_3)+\operatorname{tang}\beta_2\operatorname{tang}\beta_3\},$$
$$s_2^2=\varrho_3^2\sec\beta_3^2+\varrho_1^2\sec\beta_1^2-2\varrho_3\varrho_1\{\cos(\lambda_3-\lambda_1)+\operatorname{tang}\beta_3\operatorname{tang}\beta_1\},$$
$$s_3^2=\varrho_1^2\sec\beta_1^2+\varrho_2^2\sec\beta_2^2-2\varrho_1\varrho_2\{\cos(\lambda_1-\lambda_2)+\operatorname{tang}\beta_1\operatorname{tang}\beta_2\};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$16) \quad \begin{cases} \cos\theta_1 = \sin\beta_2\sin\beta_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3\cos(\lambda_2-\lambda_3), \\ \cos\theta_2 = \sin\beta_3\sin\beta_1 + \cos\beta_3\cos\beta_1\cos(\lambda_3-\lambda_1), \\ \cos\theta_3 = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\lambda_1-\lambda_2) \end{cases}$$

etzen:

$$17) \quad \begin{cases} s_1^2 = (\varrho_2\sec\beta_2)^2 + (\varrho_3\sec\beta_3)^2 - 2(\varrho_2\sec\beta_2)(\varrho_3\sec\beta_3)\cos\theta_1, \\ s_2^2 = (\varrho_3\sec\beta_3)^2 + (\varrho_1\sec\beta_1)^2 - 2(\varrho_3\sec\beta_3)(\varrho_1\sec\beta_1)\cos\theta_2, \\ s_3^2 = (\varrho_1\sec\beta_1)^2 + (\varrho_2\sec\beta_2)^2 - 2(\varrho_1\sec\beta_1)(\varrho_2\sec\beta_2)\cos\theta_3; \end{cases}$$

dass an also s_1, s_2, s_3 ganz wie die dritten Seiten ebener ıen kann, deren zwei andere Seiten und davon Winkel

ϱ, θ_1; $\varrho_3\sec\beta_3$, $\varrho_1\sec\beta_1$, θ_2; $\varrho_1\sec\beta_1$, $\varrho_2\sec\beta_2$, θ_3

...d. Alle stgriffe, deren man sich zur Erleichterung und kürzung der Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe in der enen Trigonometrie bedient, finden daher auch hier bei der erechnung der Sehnen s_1, s_2, s_3 Anwendung. Man kann z. B. die obigen Ausdrücke der Quadrate der Sehnen auf die folgende Form bringen:

$$s_1^2 = (\varrho_2\sec\beta_2 - \varrho_3\sec\beta_3)^2\cos\tfrac{1}{2}\theta_1^2 + (\varrho_2\sec\beta_2 + \varrho_3\sec\beta_3)^2\sin\tfrac{1}{2}\theta_1^2,$$
$$s_2^2 = (\varrho_3\sec\beta_3 - \varrho_1\sec\beta_1)^2\cos\tfrac{1}{2}\theta_2^2 + (\varrho_3\sec\beta_3 + \varrho_1\sec\beta_1)^2\sin\tfrac{1}{2}\theta_2^2,$$
$$s_3^2 = (\varrho_1\sec\beta_1 - \varrho_2\sec\beta_2)^2\cos\tfrac{1}{2}\theta_3^2 + (\varrho_1\sec\beta_1 + \varrho_2\sec\beta_2)^2\sin\tfrac{1}{2}\theta_3^2;$$

und berechnet man dann die Hülfswinkel ω_1, ω_2, ω_3 mittelst der Formeln:

$$18) \quad \begin{cases} \tan\omega_1 = \dfrac{\varrho_2\cos\beta_3 + \varrho_3\cos\beta_2}{\varrho_2\cos\beta_3 - \varrho_3\cos\beta_2}\tan\tfrac{1}{2}\theta_1, \\ \tan\omega_2 = \dfrac{\varrho_3\cos\beta_1 + \varrho_1\cos\beta_3}{\varrho_3\cos\beta_1 - \varrho_1\cos\beta_3}\tan\tfrac{1}{2}\theta_2, \\ \tan\omega_3 = \dfrac{\varrho_1\cos\beta_2 + \varrho_2\cos\beta_1}{\varrho_1\cos\beta_2 - \varrho_2\cos\beta_1}\tan\tfrac{1}{2}\theta_3; \end{cases}$$

so ist, wenn man die absoluten Werthe der Grössen

$$(\varrho_2\sec\beta_2 - \varrho_3\sec\beta_3)\cos\tfrac{1}{2}\theta_1\sec\omega_1,$$
$$(\varrho_3\sec\beta_3 - \varrho_1\sec\beta_1)\cos\tfrac{1}{2}\theta_2\sec\omega_2,$$
$$(\varrho_1\sec\beta_1 - \varrho_2\sec\beta_2)\cos\tfrac{1}{2}\theta_3\sec\omega_3$$

durch

$$\text{val. abs.}\ (\varrho_2 \sec\beta_2 - \varrho_3 \sec\beta_3)\cos\tfrac{1}{2}\theta_1 \sec\omega_1,$$

$$\text{val. abs.}\ (\varrho_3 \sec\beta_3 - \varrho_1 \sec\beta_1)\cos\tfrac{1}{2}\theta_2 \sec\omega_2,$$

$$\text{val. abs.}\ (\varrho_1 \sec\beta_1 - \varrho_2 \sec\beta_2)\cos\tfrac{1}{2}\theta_3 \sec\omega_3$$

bezeichnet, nach dem Obigen, wie man sogleich übersieht:

$$19)\quad \left\{\begin{array}{l} s_1 = \text{val. abs.}\ (\varrho_2 \sec\beta_2 - \varrho_3 \sec\beta_3)\cos\tfrac{1}{2}\theta_1 \sec\omega_1, \\ s_2 = \text{val. abs.}\ (\varrho_3 \sec\beta_3 - \varrho_1 \sec\beta_1)\cos\tfrac{1}{2}\theta_2 \sec\omega_2, \\ s_3 = \text{val. abs.}\ (\varrho_1 \sec\beta_1 - \varrho_2 \sec\beta_2)\cos\tfrac{1}{2}\theta_3 \sec\omega_3. \end{array}\right.$$

Für die Quadrate der Sehnen S_1, S_2, S_3 der Erdbahn hat man nach den Lehren der analytischen Geometrie die folgenden Ausdrücke:

$$S_1^2 = (R_2 \cos L_2 - R_3 \cos L_3)^2 + (R_2 \sin L_2 - R_3 \sin L_3)^2,$$

$$S_2^2 = (R_3 \cos L_3 - R_1 \cos L_1)^2 + (R_3 \sin L_3 - R_1 \sin L_1)^2,$$

$$S_3^2 = (R_1 \cos L_1 - R_2 \cos L_2)^2 + (R_1 \sin L_1 - R_2 \sin L_2)^2;$$

also, wie man sogleich findet:

$$20)\quad \left\{\begin{array}{l} S_1 = \sqrt{R_2^2 + R_3^2 - 2R_2R_3\cos(L_2 - L_3)}, \\ S_2 = \sqrt{R_3^2 + R_1^2 - 2R_3R_1\cos(L_3 - L_1)}, \\ S_3 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(L_1 - L_2)}; \end{array}\right.$$

welche Formeln man auf ganz ähnliche Weise wie vorher durch Einführung von Hülfswinkeln zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten kann, was wir hier, als überdies aus der ebenen Trigonometrie hinreichend bekannt, nicht weiter erläutern wollen.

§. 6.

Zu den in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Gleichungen kommen als Fundamental-Gleichungen für unsere ferneren Untersuchungen nun hauptsächlich noch die folgenden, aus der im vorhergehenden Kapitel entwickelten allgemeinen Theorie der Bewegung eines Weltkörpers um die Sonne bekannten Gleichungen:

$$21) \ldots \ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0; \end{array} \right.$$

welche für jede Zeit t und die derselben entsprechenden Coordinaten x, y, z und den derselben Zeit entsprechenden Vector r unsers Weltkörpers gelten. Was die in diesen Gleichungen vorkommende Grösse μ betrifft, so ist, wenn M die Sonnenmasse und m die Masse unsers um die Sonne sich bewegenden Weltkörpers bezeichnet, bekanntlich

$$\mu = M + m = M(1 + \frac{m}{M}),$$

also, wenn, wie immer k die Constante des Sonnensystems bezeichnet:

$$22) \ldots \ldots \ldots \quad \mu = k^2(1 + \frac{m}{M});$$

und die Gleichungen 21) werden daher, wenn man in dieselben die Constante des Sonnensystems einführt:

$$23) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k^2(1 + \frac{m}{M})x}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{k^2(1 + \frac{m}{M})y}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{k^2(1 + \frac{m}{M})z}{r^3} = 0. \end{array} \right.$$

Wenn man aber den Bruch $\frac{m}{M}$ als sehr klein vorauszusetzen berechtigt ist, eine Voraussetzung, die wir bei allen unseren folgenden Betrachtungen festhalten werden, so wird man näherungsweise setzen können:

$$24) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k^2 x}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{k^2 y}{r^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{k^2 z}{r^3} = 0; \end{array} \right.$$

wie von nun an stets geschehen wird.

II.

Bestimmung der Bahn aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen.

§. 7.

Das Problem, mit dem wir uns jetzt beschäftigen werden, nämlich die Bestimmung der Bahn eines um die Sonne sich bewegenden Weltkörpers aus drei vollständigen geocentrischen Beobachtungen desselben, jemals in aller Strenge und Allgemeinheit auflösen zu können, ist bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis so gut wie gar keine Hoffnung vorhanden, was zunächst und hauptsächlich in der transcendenten Natur der hiebei vorzüglich zur Betrachtung und Geltung kommenden Grössen seinen Grund hat; vielmehr wird man bei der Auflösung dieses schweren und wichtigen Problems immer mehr oder weniger auf Näherungsmethoden oder auf Methoden, die auf mehr oder weniger nur näherungsweise richtigen Voraussetzungen beruhen, sonst übrigens eine völlig strenge Durchführung gestatten, hingewiesen sein. Es liegt daher in der Natur der Sache, dass auch die Methode, welche wir im Folgenden entwickeln werden, nur eine Näherungsmethode sein kann; wir werden uns aber bemühen, bei Entwickelung derselben so viel als möglich alle die Ansichten zur Geltung zu bringen, welche die neuere Analysis nun schon seit längerer Zeit als nothwendige Grundlage aller ihrer Entwickelungen bezeichnet hat, wenn dieselben, — natürlich jede in ihrem besonderen Bereiche und so weit es ihre eigenthümliche Natur überhaupt gestattet, — auf das Prädicat völliger analytischer Strenge sollen Anspruch machen können. Wir werden daher immer den Grad der Kleinheit der g a n z e n vernachlässigten Grössen, nicht bloss einzelner Glieder derselben, angeben, so weit dies überhaupt möglich ist, und die Natur des Gegenstandes es gestattet; vor-

züglich werden wir bei der Multiplication mehrgliedriger Grössen oder Ausdrücke in einander uns nie, wie die ältere Reihen-Analysis bei dergleichen Untersuchungen immer that, die Vernachlässigung irgend welcher Glieder gestatten, und, wie gesagt, überhaupt allen den Erfordernissen, so viel es bei diesem Gegenstande irgend möglich ist, zu genügen suchen, welche die neuere Analysis für ihre Untersuchungen in Anspruch nimmt, wenn dieselben so viel als möglich völliger analytischer Strenge entsprechen sollen. Natürlich werden wir auch zeigen, wie man auf dem Wege successiver Annäherungen die gesuchten Grössen immer genauer und genauer bestimmen kann, indem man entweder dieselben in immer engere und engere Gränzen einschliesst, oder bei ihrer Berechnung sich nach und nach die Vernachlässigung immer kleinerer und kleinerer Grössen gestattet. Hierbei bemerke ich aber ausdrücklich, dass ich bei der folgenden Auflösung unserer Aufgabe noch keineswegs das Ideal erreicht zu haben glaube, welches ich mir selbst von einer solchen Auflösung gebildet habe, dass dieselbe vielmehr, wovon Niemand vollkommener als ich selbst überzeugt sein kann, noch weit hinter diesem Ideal zurückgeblieben ist; ich bemerke aber auch, dass ich der Meinung bin, dass bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis nicht mehr zu leisten ist, als ich im Folgenden zu leisten eifrigst bemühet gewesen bin, was mir, wie ich offen gestehe, nur erst nach einer mehrjährigen Beschäftigung mit dieser so überaus wichtigen und interessanten Aufgabe in der Weise, wie ich im Folgenden zeigen werde, gelungen ist.

§. 8.

Weil die Coordinaten x, y, z unseres Weltkörpers natürlich im Allgemeinen als Functionen der Zeit t, welcher sie entsprechen, zu betrachten sind, so werden wir im Allgemeinen

$$x = F(t),\quad y = \Phi(t),\quad z = \mathfrak{F}(t)$$

zu setzen berechtigt sein, und haben nun, dies vorausgesetzt, uns zunächst mit der weiteren Entwickelung der aus §. 2. bekannten Grössen

$$2\overset{xy}{f_1} = \pm (x_2 y_3 - x_3 y_2),$$

$$2\overset{xy}{f_2} = \pm (x_1 y_3 - x_3 y_1),$$

$$2\overset{xy}{f_3} = \pm (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

zu beschäftigen.

Weil in den früher eingeführten Bezeichnungen

$$t_1 = t_2 - (t_2 - t_1) = t_2 - \tau_3,$$
$$t_3 = t_2 + (t_3 - t_2) = t_2 + \tau_1$$

ist, so können wir x_1, x_3 und y_1, y_3 mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes respective nach Potenzen von τ_3, τ_1 entwickeln. Bezeichnen nämlich ϑ, ϑ' und ϑ_1, ϑ_1' gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grössen, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wie denselben die neuere Analysis darstellt, wenn wir bei der Entwickelung bis auf Glieder gehen, die in Bezug auf τ_3, τ_1 von der $(n+1)$sten Ordnung sind, dabei aber zugleich die von der neueren Analysis eingeführten Reste der Taylor'schen Reihe berücksichtigen:

$$x_1 = x_2 - \frac{\tau_3}{1!}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_3^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} - \frac{\tau_3^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2^3} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\cdot\frac{\tau_3^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n x_2}{\partial t_2^n} + (-1)^{n+1}\cdot\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot F^{(n+1)}(t_2 - \vartheta\tau_3),$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\tau_1}{1!}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_1^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} + \frac{\tau_1^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\tau_1^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n x_2}{\partial t_2^n} + \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!}\cdot F^{(n+1)}(t_2 + \vartheta'\tau_1)$$

und

$$y_1 = y_2 - \frac{\tau_3}{1!}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_3^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} - \frac{\tau_3^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2^3} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\cdot\frac{\tau_3^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n y_2}{\partial t_2^n} + (-1)^{n+1}\cdot\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot \Phi^{(n+1)}(t_2 - \vartheta_1\tau_3),$$

$$y_3 = y_2 + \frac{\tau_1}{1!}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{\tau_1^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} + \frac{\tau_1^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\tau_1^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n y_2}{\partial t_2^n} + \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!}\cdot \Phi^{(n+1)}(t_2 + \vartheta_1'\tau_1);$$

wo der Kürze wegen im Allgemeinen

$$n! = 1.2.3\ldots n$$

gesetzt worden ist.

Was nun die Reste

$$\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!}.F^{(n+1)}(t_2-\vartheta\tau_3),\quad \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!}.F^{(n+1)}(t_2+\vartheta'\tau_1)$$

und

$$\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!}.\Phi^{(n+1)}(t_2-\vartheta_1\tau_3),\quad \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!}.\Phi^{(n+1)}(t_2+\vartheta_1'\tau_1)$$

betrifft, so ist die Analysis, bei dem gegenwärtigen Grade ihrer Ausbildung, bekanntlich ganz ausser Stande, dieselben im Allgemeinen zu bestimmen. Nur in gewissen Fällen, wo man die Form der betreffenden Function kennt, lassen sich Gränzen angeben, zwischen denen diese Reste liegen oder welche dieselben nicht übersteigen können. Im vorliegenden Falle liegt aber auch dies ganz ausser den Gränzen der Möglichkeit, weil man die Form der hier zur Betrachtung kommenden Functionen gar nicht kennt, und wir sind daher genöthigt, uns hier mit den folgenden Bemerkungen zu begnügen.

In I. §. 10. ist bewiesen worden, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\lambda x}{\partial t^\lambda},\quad \frac{\partial^\lambda y}{\partial t^\lambda},\quad \frac{\partial^\lambda z}{\partial t^\lambda};$$

also, in der oben eingeführten Bezeichnung, die Differentialquotienten

$$F^{(\lambda)}(t),\quad \Phi^{(\lambda)}(t),\quad \mathfrak{F}^{(\lambda)}(t),$$

für jede Zeit t in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung λ sind, d. h. in allen ihren Gliedern die Potenz k^λ als Factor enthalten. Daher sind die Reste

$$\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!}.F^{(n+1)}(t_2-\vartheta\tau_3),\quad \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!}.F^{(n+1)}(t_2+\vartheta'\tau_1)$$

und

$$\frac{\tau_3^{n+1}}{(n+1)!}.\Phi^{(n+1)}(t_2-\vartheta_1\tau_3),\quad \frac{\tau_1^{n+1}}{(n+1)!}.\Phi^{(n+1)}(t_2+\vartheta_1'\tau_1)$$

in Bezug auf die Grösse k von der $(n+1)$sten Ordnung, so dass sie in allen ihren Gliedern die Potenz k^{n+1} als Factor enthalten, wozu ausserdem noch kommt, dass alle Glieder dieser Reste noch durch das Product $(n+1)!$ dividirt sind und also eigentlich alle die Grösse

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{k^{n+1}}{1.2.3\ldots.(n+1)}$$

als Factor enthalten. Nach I. §. 9. ist nun z. B. für $n=3, 4, 5$:

$$k^4 = 0{,}00000008756$$
$$k^5 = 0{,}00000000151$$
$$k^6 = 0{,}00000000003$$

also:

$$\frac{k^4}{4!} = 0{,}00000000365$$
$$\frac{k^5}{5!} = 0{,}00000000001$$

und

$$\frac{k^6}{6!} = 0{,}00000000000004$$

woraus man sieht, wie ungemein klein diese Grössen sehr bald werden. Umfassen daher die Zeitintervalle τ_3 und τ_1 zwischen der ersten und zweiten und zweiten und dritten Beobachtung nur eine geringe Anzahl von Tagen, so wird man im Allgemeinen zu dem Schlusse berechtigt sein, dass die absoluten Werthe der obigen Reste, wenn man etwa n nicht kleiner als 3 annimmt, sehr klein sind, und wird dieselben also ohne merklichen Fehler vernachlässigen oder als verschwindend betrachten können. Dass hierbei übrigens der völligen mathematischen Strenge und Evidenz noch Manches zu wünschen übrig bleibt, kann und darf freilich nicht geleugnet werden; aber eben weil es sich hier nur um eine Näherungsmethode handelt, wird man sich mit den obigen Schlüssen begnügen dürfen und auch müssen, indem in der That in diesem Falle der gegenwärtige Zustand der Analysis noch einen Schritt weiter zu gehen nicht gestattet. Mit besonderer Deutlichkeit geht, wie es mir scheint, aus der obigen Darstellung hervor, warum es ein der Methode günstiger Umstand ist, wenn die Zeitintervalle τ_3 und τ_1 nur eine geringe Anzahl von Tagen umfassen, wovon nach meiner Meinung der Grund nicht bei allen früheren Entwickelungen dieses wichtigen Gegenstandes mit gleicher Deutlichkeit hervortritt, da diese Entwickelungen der Grösse k, auf die nach meiner Ansicht hier Alles ankommt, nicht gleich vom Anfange an die gebührende Aufmerksamkeit schenken.

Was nun unsere ferneren Entwickelungen betrifft, so werden dieselben sich von den früheren Darstellungen dieses wichtigen Gegenstandes in mehreren Punkten, namentlich aber auch darin wesentlich unterscheiden, dass wir, ausser der vorher namhaft gemachten unvermeidlichen Vernachlässigung der Reste der Taylor'schen Reihe, uns von nun an irgend welche andere Vernach-

lässigungen, streng genommen, gar nicht weiter gestatten, insbesondere also bei der Multiplication der für x_1, x_3 und y_1, y_3 gesetzten mehrgliedrigen Ausdrücke in einander gar keine Glieder unberücksichtigt lassen werden, Vernachlässigungen mancherlei Art, welche bekanntlich die ältere Reihen-Analysis sich ohne Weiteres gestatten zu dürfen glaubte.

Es würde gar keine Schwierigkeit haben, die folgenden Entwickelungen ganz allgemein für jedes n durchzuführen. Um aber unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir uns damit begnügen, die Entwickelung nur für $n=5$ vollständig durchzuführen, was in der That für den vorliegenden Gegenstand auch vollständig genügt. Wir werden also die Reste

$$\frac{\tau_3{}^6 F^{VI}(t_2-\vartheta\tau_3)}{1.2.3.4.5.6},\quad \frac{\tau_1{}^6 F^{VI}(t_2+\vartheta'\tau_1)}{1.2.3.4.5.6}$$

und

$$\frac{\tau_3{}^6 \Phi^{VI}(t_2-\vartheta_1\tau_3)}{1.2.3.4.5.6},\quad \frac{\tau_1{}^6 \Phi^{VI}(t_2+\vartheta_1'\tau_1)}{1.2.3.4.5.6}$$

als verschwindend betrachten, und daher im Folgenden näherungsweise

$$x_1=x_2-\frac{\tau_3}{1!}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\frac{\tau_3{}^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2{}^2}-\frac{\tau_3{}^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2{}^3}$$
$$+\frac{\tau_3{}^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 x_2}{\partial t_2{}^4}-\frac{\tau_3{}^5}{5!}\cdot\frac{\partial^5 x_2}{\partial t_2{}^5},$$

$$x_3=x_2+\frac{\tau_1}{1!}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\frac{\tau_1{}^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2{}^2}+\frac{\tau_1{}^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2{}^3}$$
$$+\frac{\tau_1{}^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 x_2}{\partial t_2{}^4}+\frac{\tau_1{}^5}{5!}\cdot\frac{\partial^5 x_2}{\partial t_2{}^5}$$

und

$$y_1=y_2-\frac{\tau_3}{1!}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2}+\frac{\tau_3{}^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2{}^2}-\frac{\tau_3{}^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2{}^3}$$
$$+\frac{\tau_3{}^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 y_2}{\partial t_2{}^4}-\frac{\tau_3{}^5}{5!}\cdot\frac{\partial^5 y}{\partial t_2{}^5},$$

$$y_3=y_2+\frac{\tau_1}{1!}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2}+\frac{\tau_1{}^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2{}^2}+\frac{\tau_1{}^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2{}^3}$$
$$+\frac{\tau_1{}^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 y_2}{\partial t_2{}^4}+\frac{\tau_1{}^5}{5!}\cdot\frac{\partial^5 y_2}{\partial t_2{}^5}$$

setzen.

§. 9.

Wenn wir der Kürze wegen im Allgemeinen

$$25) \quad \ldots \quad \Pi_{\lambda,\mu} = \frac{\partial^\lambda x_2}{\partial t_2^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu y_2}{\partial t_2^\mu} - \frac{\partial^\lambda y_2}{\partial t_2^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu x_2}{\partial t_2^\mu}$$

setzen, wobei die Grössen x_2 und y_2 selbst als ihre 0ten Differentialquotienten betrachtet werden, so erhalten wir aus dem vorhergehenden Paragraphen unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$26) \quad \ldots \ldots \quad x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$= \frac{\tau_1}{1!} \cdot \Pi_{0,1} + \frac{\tau_1^2}{2!} \cdot \Pi_{0,2} + \frac{\tau_1^3}{3!} \cdot \Pi_{0,3} + \frac{\tau_1^4}{4!} \cdot \Pi_{0,4} + \frac{\tau_1^5}{5!} \cdot \Pi_{0,5}$$

und

$$27) \quad \ldots \ldots \quad x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$= \frac{\tau_3}{1!} \cdot \Pi_{0,1} - \frac{\tau_3^2}{2!} \cdot \Pi_{0,2} + \frac{\tau_3^3}{3!} \cdot \Pi_{0,3} - \frac{\tau_3^4}{4!} \cdot \Pi_{0,4} + \frac{\tau_3^5}{5!} \cdot \Pi_{0,5}.$$

Ferner ist ein allgemeines Glied von $x_1 y_3$ offenbar

$$(-1)^\lambda \cdot \frac{\tau_3^\lambda \tau_1^\mu}{\lambda! \mu!} \cdot \frac{\partial^\lambda x_2}{\partial t_2^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu y_2}{\partial t_2^\mu},$$

und das entsprechende, nämlich gleiche Potenzen von τ_1 und τ_3 enthaltende Glied von $x_3 y_1$ ist

$$(-1)^\lambda \cdot \frac{\tau_3^\lambda \tau_1^\mu}{\lambda! \mu!} \cdot \frac{\partial^\lambda y_2}{\partial t_2^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu x_2}{\partial t_2^\mu}.$$

Also ist von $x_1 y_3 - x_3 y_1$ ein allgemeines Glied:

$$(-1)^\lambda \cdot \frac{\tau_3^\lambda \tau_1^\mu}{\lambda! \mu!} \left(\frac{\partial^\lambda x_2}{\partial t_2^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu y_2}{\partial t_2^\mu} - \frac{\partial^\lambda y_2}{\partial t_2^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu x_2}{\partial t_2^\mu} \right)$$

oder nach 25):

$$(-1)^\lambda \cdot \frac{\tau_3^\lambda \tau_1^\mu}{\lambda! \mu!} \cdot \Pi_{\lambda,\mu}.$$

In diesem allgemeinen Gliede muss man, um die Grösse

$$x_1 y_3 - x_3 y_1$$

zu bilden, für $\lambda\mu$ die folgenden Combinationen setzen:

00	01	02	03	04	05
10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55

Weil aber nach 25) für $\lambda=\mu$ offenbar

$$\Pi_{\lambda,\mu}=0$$

ist, so braucht man in dem obigen Ausdrucke des allgemeinen Gliedes für $\lambda\mu$ nur die folgenden Combinationen zu setzen:

01	02	03	04	05
10	12	13	14	15
20	21	23	24	25
30	31	32	34	35
40	41	42	43	45
50	51	52	53	54

Unter der Voraussetzung aber, dass λ und μ ungleich sind, ist nach 25) offenbar

$$\Pi_{\lambda,\mu}+\Pi_{\mu,\lambda}=0.$$

Wenn man also je zwei Glieder von der Form

$$(-1)^\lambda.\frac{\tau_3{}^\lambda\tau_1{}^\mu}{\lambda!\mu!}.\Pi_{\lambda,\mu} \text{ und } (-1)^\mu.\frac{\tau_3{}^\mu\tau_1{}^\lambda}{\lambda!\mu!}.\Pi_{\mu,\lambda},$$

wo λ und μ ungleich sein sollen, in ein Glied zusammenzieht, so erhält man für das allgemeine Glied von $x_1y_3-x_3y_1$ den Ausdruck:

$$\frac{(-1)^\lambda\tau_3{}^\lambda\tau_1{}^\mu-(-1)^\mu\tau_3{}^\mu\tau_1{}^\lambda}{\lambda!\mu!}\Pi_{\lambda,\mu},$$

in welchem offenbar λ kleiner als μ angenommen werden kann, und daher für $\lambda\mu$ nur die folgenden Combinationen gesetzt zu werden brauchen:

01	02	03	04	05
	12	13	14	15
		23	24	25
			34	35
				45

indem man, wie sich nach dem Obigen von selbst versteht, immer $0!=1$ zu setzen hat.

Auf diese Weise erhält man für $x_1y_3-x_3y_1$ den folgenden Ausdruck:

28) . . . . $x_1y_3-x_3y_1$

$$=\frac{\tau_1+\tau_3}{1!}\Pi_{0,1}+\frac{\tau_1^2-\tau_3^2}{2!}\Pi_{0,2}+\frac{\tau_1^3+\tau_3^3}{3!}\Pi_{0,3}+\frac{\tau_1^4-\tau_3^4}{4!}\Pi_{0,4}+\frac{\tau_1^5+\tau_3^5}{5!}\Pi_{0,5}$$

$$-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}\Pi_{1,2}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}\Pi_{1,3}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)}{1!4!}\Pi_{1,4}$$

$$-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^4-\tau_3^4)}{1!5!}\Pi_{1,5}$$

$$+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}\Pi_{2,3}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}\Pi_{2,4}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{2!5!}\Pi_{2,5}$$

$$-\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}\Pi_{3,4}-\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{3!5!}\Pi_{3,5}$$

$$+\frac{\tau_1^4\tau_3^4(\tau_1+\tau_3)}{4!5!}\Pi_{4,5}.$$

Wegen 26) und 27) kann man diesen Ausdruck auch auf die folgende Form bringen:

29) . . . . $x_1y_3-x_3y_1$

$$=(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)$$

$$-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}\Pi_{1,2}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}\Pi_{1,3}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)}{1!4!}\Pi_{1,4}$$

$$-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^4-\tau_3^4)}{1!5!}\Pi_{1,5}$$

$$+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}\Pi_{2,3}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}\Pi_{2,4}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{2!5!}\Pi_{2,5}$$

$$-\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}\Pi_{3,4}-\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{3!5!}\Pi_{3,5}$$

$$+\frac{\tau_1^4\tau_3^4(\tau_1+\tau_3)}{4!5!}\Pi_{4,5}.$$

Nach I. §. 10. ist $\Pi_{\lambda,\mu}$ in Bezug auf die Grösse k von der Ordnung $\lambda+\mu$; will man also die Grösse $x_1y_3-x_3y_1$ so ordnen,

dass die Glieder nach den Potenzen der Grösse k fortschreiten, so muss man dieselbe auf folgende Art schreiben:

$$30) \quad x_1y_3 - x_3y_1$$

$$\begin{aligned}
= \; & \frac{\tau_1+\tau_3}{1!}\Pi_{0,1} \\
& + \frac{\tau_1^2-\tau_3^2}{2!}\Pi_{0,2} \\
& + \frac{\tau_1^3+\tau_3^3}{3!}\Pi_{0,3} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}\Pi_{1,2} \\
& + \frac{\tau_1^4-\tau_3^4}{4!}\Pi_{0,4} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}\Pi_{1,3} \\
& + \frac{\tau_1^5+\tau_3^5}{5!}\Pi_{0,5} - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)}{1!4!}\Pi_{1,4} + \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}\Pi_{2,3} \\
& - \frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^4-\tau_3^4)}{1!5!}\Pi_{1,5} + \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}\Pi_{2,4} \\
& + \frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{2!5!}\Pi_{2,5} - \frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}\Pi_{3,4} \\
& - \frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{3!5!}\Pi_{3,5} \\
& + \frac{\tau_1^4\tau_3^4(\tau_1+\tau_3)}{4!5!}\Pi_{4,5}.
\end{aligned}$$

§. 10.

Es ist nun nöthig, die im Vorhergehenden im Allgemeinen durch Π bezeichneten Grössen weiter zu entwickeln, was zuerst die Entwickelung der Differentialquotienten der Coordinaten x_2, y_2 erfordert.

Bekanntlich ist aber nach 24):

$$31) \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} = -k^2\frac{x^2}{r_2^3}, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} = -k^2\frac{y_2}{r_2^3};$$

woraus man durch fernere Differentiation ohne Schwierigkeit erhält:

$$32) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 x_2}{\partial t_2^3} = -\dfrac{k^2}{r_2^3}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dfrac{3k^2}{r_2^4}\cdot\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}x_2, \\[2ex] \dfrac{\partial^3 y_2}{\partial t_2^3} = -\dfrac{k^2}{r_2^3}\cdot\dfrac{\partial y_2}{\partial t_2} + \dfrac{3k^2}{r_2^4}\cdot\dfrac{\partial r_2}{\partial t_2}y_2; \end{cases}$$

ferner:

33)

$$\frac{\partial^4 x_2}{\partial t_2^4} = -\frac{k^2}{r_2^3}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} + \frac{6k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{3k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}x_2 - \frac{12k^2}{r_2^5}\cdot\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 x_2,$$

$$\frac{\partial^4 y_2}{\partial t_2^4} = -\frac{k^2}{r_2^3}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} + \frac{6k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \frac{3k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}y_2 - \frac{12k^2}{r_2^5}\cdot\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 y_2;$$

und hieraus:

34)

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^5 x_2}{\partial t_2^5} = &-\frac{k^2}{r_2^3}\cdot\frac{\partial^3 x_2}{\partial t_2^3} + \frac{9k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2^2} + \frac{9k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\
&+ \frac{3k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}x_2 - \frac{36k^2}{r_2^5}\cdot\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} - \frac{36k^2}{r_2^5}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}x_2 \\
&+ \frac{60k^2}{r_2^6}\cdot\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^3 x_2, \\
\frac{\partial^5 y_2}{\partial t_2^5} = &-\frac{k^2}{r_2^3}\cdot\frac{\partial^3 y_2}{\partial t_2^3} + \frac{9k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial^2 y_2}{\partial t_2^2} + \frac{9k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2} \\
&+ \frac{3k^2}{r_2^4}\cdot\frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}y_2 - \frac{36k^2}{r_2^5}\cdot\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2\cdot\frac{\partial y_2}{\partial t_2} - \frac{36k^2}{r_2^5}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}y_2 \\
&+ \frac{60k^2}{r_2^6}\cdot\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^3 y_2.
\end{aligned}\right.$$

Weiter zu gehen, liegt bekanntlich zunächst nicht in unserer Absicht. Entwickeln wir nun aber mittelst der vorhergehenden Ausdrücke der Differentialquotienten der Coordinaten x_2, y_2 die im Allgemeinen durch Π bezeichneten Grössen, so finden wir, dass dieselben sämmtlich die Grösse

$$\Pi_{0,1} = x_2\frac{\partial y_2}{\partial t_2} - y_2\frac{\partial x_2}{\partial t_2}$$

als Factor enthalten; und wenn wir daher der Kürze wegen im Allgemeinen

$$35) \quad \ldots\ldots\ldots \quad G_{\lambda,\mu} = \frac{\Pi_{\lambda,\mu}}{\Pi_{0,1}}$$

setzen, so erhalten wir mittelst einer nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegenden Rechnung die folgenden Ausdrücke:

36)

$$G_{0,1} = 1,$$

$$G_{0,2} = 0,$$

$$G_{0,3} = -\frac{k^2}{r_2^3},$$

$$G_{0,4} = \frac{6k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

$$G_{0,5} = \frac{k^4}{r_2^6} - \frac{36k^2}{r_2^5} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{9k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2},$$

$$G_{1,2} = \frac{k^2}{r_2^3},$$

$$G_{1,3} = -\frac{3k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

$$G_{1,4} = -\left\{\frac{k^4}{r_2^6} - \frac{12k^2}{r_2^5} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{3k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\right\},$$

$$G_{1,5} = \frac{12k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} - \frac{60k^2}{r_2^6} \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^3 + \frac{36k^2}{r_2^5} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} - \frac{3k^2}{r_2^4} \cdot \frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3},$$

$$G_{2,3} = \frac{k^4}{r_2^6},$$

$$G_{2,4} = -\frac{6k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

$$G_{2,5} = -\left\{\frac{k^6}{r_2^9} - \frac{36k^4}{r_2^8} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{9k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\right\},$$

$$G_{3,4} = \frac{k^6}{r_2^9} + \frac{6k^4}{r_2^8} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{3k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2},$$

$$G_{3,5} = -\left\{\frac{9k^4}{r_2^{10}} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} + \frac{48k^4}{r_2^9} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^3 + \frac{9k^4}{r_2^8} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} - \frac{3k^4}{r_2^7} \cdot \frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}\right\},$$

$$G_{4,5} = \frac{k^8}{r_2^{12}} + \frac{24k^6}{r_2^{11}} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 + \frac{12k^6}{r_2^{10}} \cdot \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} + \frac{72k^4}{r_2^{10}} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^4$$
$$+ \frac{27k^4}{r_2^8} \cdot \left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\right)^2 - \frac{18k^4}{r_2^8} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3}.$$

Dass überhaupt $G_{\lambda,\mu}$ in Beziehung auf die Grösse k von der Ordnung $\lambda+\mu-1$ ist, erhellet aus dem, was früher bewiesen worden ist, unmittelbar.

Da es nun, wie aus allem Obigen ganz von selbst hervorgeht, bei dieser ganzen Untersuchung durchaus nicht auf die wirklichen Werthe der Grössen f_1, f_2, f_3, sondern bloss auf deren Verhältniss unter einander ankommt; da ferner bekanntlich

$$f_1:f_2:f_3=\overset{xy}{f_1}:\overset{xy}{f_2}:\overset{xy}{f_3}$$

und

$$2\overset{xy}{f_1}=\pm(x_2y_3-x_3y_2),$$

$$2\overset{xy}{f_2}=\pm(x_1y_3-x_3y_1),$$

$$2\overset{xy}{f_3}=\pm(x_1y_2-x_2y_1)$$

ist, so kann man im Obigen offenbar

$$f_1=\frac{x_2y_3-x_3y_2}{\Pi_{0,1}},$$

$$f_2=\frac{x_1y_3-x_3y_1}{\Pi_{0,1}},$$

$$f_3=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{\Pi_{0,1}}$$

setzen, und erhält dadurch nach 26), 30), 27), mit Rücksicht auf die Gleichung 35), für die Grössen f_1, f_2, f_3 die folgenden Ausdrücke:

$$37)\quad f_1=\frac{\tau_1}{1!}.G_{0,1}+\frac{\tau_1^2}{2!}.G_{0,2}+\frac{\tau_1^3}{3!}.G_{0,3}+\frac{\tau_1^4}{4!}.G_{0,4}+\frac{\tau_1^5}{5!}.G_{0,5},$$

$$\begin{aligned}f_2= & \frac{\tau_1+\tau_3}{1!}.G_{0,1}\\ & +\frac{\tau_1^2-\tau_3^2}{2!}.G_{0,2}\\ & +\frac{\tau_1^3+\tau_3^3}{3!}.G_{0,3}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}.G_{1,2}\\ & +\frac{\tau_1^4-\tau_3^4}{4!}.G_{0,4}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}.G_{1,3}\\ & +\frac{\tau_1^5+\tau_3^5}{5!}.G_{0,5}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)}{1!4!}.G_{1,4}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}G_{2,3}\\ & -\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^4-\tau_3^4)}{1!5!}.G_{1,5}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}G_{2,4}\\ & +\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{2!5!}.G_{2,5}-\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}.G_{3,4}\\ & -\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{3!5!}G_{3,5}\\ & +\frac{\tau_1^4\tau_3^4(\tau_1+\tau_3)}{4!5!}G_{4,5},\end{aligned}$$

$$f_3=\frac{\tau_3}{1!}.G_{0,1}-\frac{\tau_3^2}{2!}.G_{0,2}+\frac{\tau_3^3}{3!}.G_{0,3}-\frac{\tau_3^4}{4!}.G_{0,4}+\frac{\tau_3^5}{5!}.G_{0,5};$$

wobei man zu beachten hat, dass

$$G_{0,1}=1,\quad G_{0,2}=0 \quad\text{und}\quad \tau_1+\tau_3=\tau_2$$

ist.

Nach 26), 27), 29) ist auch:

38)

$$f_1=\frac{\tau_1}{1!}\cdot G_{0,1}+\frac{\tau_1^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_1^3}{3!}\cdot G_{0,3}+\frac{\tau_1^4}{4!}\cdot G_{0,4}+\frac{\tau_1^5}{5!}\cdot G_{0,5},$$

$$f_3=\frac{\tau_3}{1!}\cdot G_{0,1}-\frac{\tau_3^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_3^3}{3!}\cdot G_{0,3}-\frac{\tau_3^4}{4!}\cdot G_{0,4}+\frac{\tau_3^5}{5!}\cdot G_{0,5},$$

$$\begin{aligned}f_2=f_1+f_3&-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}G_{1,2}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}G_{1,3}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3-\tau_3^3)}{1!4!}G_{1,4}\\&-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^4-\tau_3^4)}{1!5!}G_{1,5}\\&+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}G_{2,3}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}G_{2,4}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{2!5!}G_{2,5}\\&+\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}G_{3,4}+\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{3!5!}G_{3,5}\\&+\frac{\tau_1^4\tau_3^4(\tau_1+\tau_3)}{4!5!}G_{4,5}.\end{aligned}$$

Wenn man die Reste

$$\frac{\tau_3^4F^{IV}(t_2-\vartheta\tau_3)}{1.2.3.4},\quad \frac{\tau_1^4F^{IV}(t_2+\vartheta'\tau_1)}{1.2.3.4}$$

und

$$\frac{\tau_3^4\Phi^{IV}(t_2-\vartheta_1\tau_3)}{1.2.3.4},\quad \frac{\tau_1^4\Phi^{IV}(t_2+\vartheta_1'\tau_1)}{1.2.3.4}$$

bei einer ersten Näherung vernachlässigt, so muss man, wie aus dem Obigen sich leicht ergiebt:

39)

$$f_1=\frac{\tau_1}{1!}\cdot G_{0,1}+\frac{\tau_1^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_1^3}{3!}\cdot G_{0,3},$$

$$f_3=\frac{\tau_3}{1!}\cdot G_{0,1}-\frac{\tau_3^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_3^3}{3!}\cdot G_{0,3},$$

$$f_2=f_1+f_3-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}.G_{1,2}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}.G_{1,3}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}.G_{2,3};$$

also, wie man mittelst 36) leicht findet:

$$40)\begin{cases} f_1 = \tau_1(1-\frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}), \\ f_3 = \tau_3(1-\frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}), \\ f_2 = f_1+f_3-\frac{k^2\tau_1\tau_2\tau_3}{2r_2^3}(1-\frac{\tau_1-\tau_3}{r_2}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}-\frac{k^2\tau_1\tau_3}{6r_2^3}); \end{cases}$$

oder, weil

$$f_1+f_3=\tau_1+\tau_3-\frac{k^2(\tau_1^3+\tau_3^3)}{6r_2^3}=\tau_2\{1-\frac{k^2(\tau_1^2-\tau_1\tau_3+\tau_3^2)}{6r_2^3}\}$$

und folglich

$$f_1+f_3-\frac{k^2\tau_1\tau_2\tau_3}{2r_2^3}=\tau_2\{1-\frac{k^2(\tau_1^2+2\tau_1\tau_3+\tau_3^2)}{6r_2^3}\}=\tau_2(1-\frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3})$$

ist,

$$41)\begin{cases} f_1 = \tau_1(1-\frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}), \\ f_2 = \tau_2\{1-\frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}+\frac{k^2\tau_1\tau_3(\tau_1-\tau_3)}{2r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}+\frac{k^4\tau_1^2\tau_3^2}{12r_2^6}\}, \\ f_3 = \tau_3(1-\frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}) \end{cases}$$

setzen.

Wenn man die Reste

$$\frac{\tau_3^5F^V(t_2-\vartheta\tau_3)}{1.2.3.4.5},\quad \frac{\tau_1^5F^V(t_2+\vartheta'\tau_1)}{1.2.3.4.5}$$

und

$$\frac{\tau_3^5\Phi^V(t_2-\vartheta_1\tau_3)}{1.2.3.4.5},\quad \frac{\tau_1^5\Phi^V(t_2+\vartheta_1'\tau_1)}{1.2.3.4.5}$$

vernachlässigt, so muss man

42)

$$f_1=\frac{\tau_1}{1!}\cdot G_{0,1}+\frac{\tau_1^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_1^3}{3!}\cdot G_{0,3}+\frac{\tau_1^4}{4!}\cdot G_{0,4},$$

$$f_3=\frac{\tau_3}{1!}\cdot G_{0,1}-\frac{\tau_3^2}{2!}\cdot G_{0,2}+\frac{\tau_3^3}{3!}\cdot G_{0,3}-\frac{\tau_3^4}{4!}\cdot G_{0,4},$$

$$\begin{aligned}f_2=f_1+f_3&-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1+\tau_3)}{1!2!}G_{1,2}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^2-\tau_3^2)}{1!3!}G_{1,3}-\frac{\tau_1\tau_3(\tau_1^3+\tau_3^3)}{1!4!}G_{1,4}\\&+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1+\tau_3)}{2!3!}G_{2,3}+\frac{\tau_1^2\tau_3^2(\tau_1^2-\tau_3^2)}{2!4!}G_{2,4}\\&-\frac{\tau_1^3\tau_3^3(\tau_1+\tau_3)}{3!4!}G_{3,4},\end{aligned}$$

und folglich nach 36), wie man mittelst leichter Rechnung findet:

43)

$$f_1=\tau_1\left(1-\frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}+\frac{k^2\tau_1^3}{4r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right),$$

$$f_2=\tau_2\left\{\begin{aligned}&1-\frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}+\frac{k^4\tau_1\tau_3(\tau_2^2-\tau_1\tau_3)}{24r_2^6}-\frac{k^4\tau_1^2\tau_3^2}{144r_2^6}\\&+\frac{k^2(\tau_1-\tau_3)}{4r_2^4}\left(\tau_2^2-\frac{k^2\tau_1^2\tau_3^2}{2r_2^3}\right)\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\\&+\frac{k^2\tau_1\tau_3}{8r_2^4}\left(\tau_2^2-3\tau_1\tau_3-\frac{k^2\tau_1^2\tau_3^2}{6r_2^3}\right)\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\\&-\frac{k^2\tau_1\tau_3}{2r_2^5}\left(\tau_2^2-3\tau_1\tau_3+\frac{k^2\tau_1^2\tau_3^2}{12r_2^3}\right)\left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2\end{aligned}\right\},$$

$$f_3=\tau_3\left(1-\frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}-\frac{k^2\tau_3^3}{4r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)$$

setzen, wo man bei der Entwickelung von f_2 nach den Formeln 42) zu beachten hat, dass

$$f_1+f_3=\tau_2\left\{1-\frac{k^2(\tau_1^2-\tau_1\tau_3+\tau_3^2)}{6r_2^3}+\frac{k^2(\tau_1-\tau_3)(\tau_1^2+\tau_3^2)}{4r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right\}$$

oder

$$f_1+f_3=\tau_2\left\{1-\frac{k^2(\tau_2^2-3\tau_1\tau_3)}{6r_2^3}+\frac{k^2(\tau_1-\tau_3)(\tau_1^2+\tau_3^2)}{4r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right\}$$

ist.

Wie man sich nun der im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen bei der Bestimmung der Bahn eines Weltkörpers aus

drei geocentrischen Beobachtungen desselben zu bedienen hat, soll in den folgenden Paragraphen gezeigt werden.

§. 11.

Nach 13) und 15) hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$44)\quad .\begin{cases} \varrho_2 = \frac{1}{\overline{\omega}} \{B_1 R_1 \frac{f_1}{f_2} + B_3 R_3 \frac{f_3}{f_2} - B_2 R_2\}, \\ r_2^2 = R_2^2 + 2\varrho_2 R_2 \cos(L_2 - \lambda_2) + \varrho_2^2 \sec\beta_2^2. \end{cases}$$

Wenn man nun Behufs einer ersten Näherung die Reste

$$\frac{\tau_3^4 F^{IV}(t_2 - \vartheta\tau_3)}{1.2.3.4}, \quad \frac{\tau_1^4 F^{IV}(t_2 + \vartheta'\tau_1)}{1.2.3.4}$$

und

$$\frac{\tau_3^4 \Phi^{IV}(t_2 - \vartheta_1\tau_3)}{1.2.3.4}, \quad \frac{\tau_1^4 \Phi^{IV}(t_2 + \vartheta_1'\tau_1)}{1.2.3.4}$$

vernachlässigt, welche in Bezug auf die Grösse k bekanntlich von der vierten Ordnung sind, wo

$$k^4 = 0{,}00000008756$$

oder vielmehr

$$\tfrac{1}{24} k^4 = 0{,}00000000365$$

ist, so ist nach 41):

$$45)\quad .\begin{cases} f_1 = \tau_1 (1 - \frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}), \\ f_2 = \tau_2 \{1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3} + \frac{k^2\tau_1\tau_3(\tau_1 - \tau_3)}{2r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2} + \frac{k^4\tau_1^2\tau_3^2}{12r_2^6}\}, \\ f_3 = \tau_3 (1 - \frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}). \end{cases}$$

In diesen Formeln muss man nun aber bei der ersten Näherung nothwendig auch das den Differentialquotienten $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ enthaltende Glied

$$\frac{k^2\tau_1\tau_3(\tau_1 - \tau_3)}{2r_2^4} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

welches, weil der in Rede stehende Differentialquotient in Bezug auf die Grösse k bekanntlich von der ersten Ordnung ist, in Be-

zug auf dieselbe Grösse der dritten Ordnung angehört *), vernachlässigen. Die Vernachlässigung dieses Gliedes ist aber mit desto grösserem Rechte gestattet, je näher $\tau_1 - \tau_3$ der Null kommt **), d. h. je genauer die Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten und zweiten und dritten Beobachtung einander gleich sind, woraus sich die sehr wichtige Regel ergiebt, dass man bei Rechnungen dieser Art jederzeit vorzugsweise drei solche der Rechnung zur Grundlage dienende Beobachtungen des betreffenden Weltkörpers auszuwählen hat, bei denen die erste und zweite und zweite und dritte Beobachtung durch möglichst nahe gleiche Zwischenzeiten von einander getrennt sind. Dies vorausgesetzt, werden wir also bei der ersten Näherung nach dem Obigen

$$46) \quad \ldots \quad \begin{cases} f_1 = \tau_1 (1 - \dfrac{k^2 \tau_1^2}{6 r_2^3}), \\ f_2 = \tau_2 (1 - \dfrac{k^2 \tau_2^2}{6 r_2^3} + \dfrac{k^4 \tau_1^2 \tau_3^2}{12 r_2^6}), \\ f_3 = \tau_3 (1 - \dfrac{k^2 \tau_3^2}{6 r_2^3}) \end{cases}$$

zu setzen haben, und haben daher in Verbindung mit den Gleichungen 44) zwischen den Grössen ϱ_2 und r_2 jetzt zwei Gleichungen, die zur Bestimmung dieser beiden Grössen, nämlich der curtirten Entfernung des Weltkörpers von der Erde und seines Vectors zur Zeit der zweiten Beobachtung, vollständig hinreichen; und wie diese Gleichungen aufzulösen sind, was in zweckmässiger Weise nur durch Näherung geschehen kann, ist daher jetzt zunächst zu zeigen.

Bei der ersten Näherung wird man sich, da

$$\tfrac{1}{12} k^4 = 0{,}00000000730$$

ist, unbedenklich noch die Vernachlässigung des Gliedes $\dfrac{k^4 \tau_1^2 \tau_3^2}{12 r_2^6}$ gestatten dürfen, und daher nach 46)

*) $\frac{1}{6} k^2 = 0{,}00002545$.

**) Dass die Zwischenzeiten τ_1, τ_3 nie zu gross sein dürfen, ist im Vorhergehenden schon hervorgehoben worden, und als eine allgemeine, bei Rechnungen der vorliegenden Art stets zu beobachtende Regel zu betrachten, auf die wir daher auch von jetzt an nie wieder von Neuem hinweisen werden.

$$47) \quad \ldots \quad \begin{cases} f_1 = \tau_1 (1 - \frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}), \\ f_2 = \tau_2 (1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}), \\ f_3 = \tau_3 (1 - \frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}) \end{cases}$$

zu setzen haben.

Bezeichnen wir die Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung durch $\mathfrak{R}_2$, so ist

$$48) \quad \ldots \quad \varrho_2 = \mathfrak{R}_2 \cos\beta_2, \quad \mathfrak{R}_2 = \varrho_2 \sec\beta_2;$$

und berechnen wir nun den Hülfswinkel $\varDelta_2$ mittelst der Formel

$$49) \quad \ldots \quad \cos\varDelta_2 = -\cos\beta_2 \cos(L_2 - \lambda_2),$$

so erhält die zweite der Gleichungen 44), wie man sogleich übersieht, die folgende Form:

$$50) \quad \ldots \quad r_2 = (R_2^2 - 2R_2\mathfrak{R}_2\cos\varDelta_2 + \mathfrak{R}_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir aber

$$51) \quad \ldots \quad \frac{\mathfrak{R}_2}{R_2} = \cos\varDelta_2 + v\sin\varDelta_2,$$

so erhalten wir mittelst einiger bekannten goniometrischen Transformationen sehr leicht:

$$R_2^2 - 2R_2\mathfrak{R}_2\cos\varDelta_2 + \mathfrak{R}_2^2 = R_2^2\sin\varDelta_2^2(1 + v^2);$$

und nehmen wir nun, damit $\sin\varDelta_2$ jederzeit positiv werde, den Hülfswinkel $\varDelta_2$ stets zwischen 0 und 180°, was vermöge der Gleichung 49) offenbar unter allen Bedingungen möglich ist, so können wir wegen der Gleichung 50) offenbar

$$52) \quad \ldots \quad r_2 = R_2 \sin\varDelta_2 (1 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

setzen.

Wegen der ersten der Gleichungen 44) und der Gleichungen 47) ist nun:

$$\varpi\varrho_2 = B_1R_1 \frac{\tau_1(1 - \frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3})}{\tau_2(1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3})} + B_3R_3 \frac{\tau_3(1 - \frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3})}{\tau_2(1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3})} - B_2R_2,$$

also:

$$\tau_1 B_1 R_1 \left(1-\frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}\right)+\tau_3 B_3 R_3 \left(1-\frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}\right)-\tau_2(\varpi\varrho_2+B_2R_2)\left(1-\frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}\right)=0,$$

woraus sich sogleich

$$\frac{1}{r_2^3}=\frac{6}{k^2}\cdot\frac{\tau_1 B_1 R_1+\tau_3 B_3 R_3-\tau_2(\varpi\varrho_2+B_2R_2)}{\tau_1^3 B_1 R_1+\tau_3^3 B_3 R_3-\tau_2^3(\varpi\varrho_2+B_2R_2)}$$

oder nach 48) und 52)

$$\frac{1}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6R_2^3\sin\varDelta_2^3}{k^2}\cdot\frac{\tau_1 B_1 R_1+\tau_3 B_3 R_3-\tau_2(B_2R_2+\varpi\mathfrak{R}_2\cos\beta_2)}{\tau_1^3 B_1 R_1+\tau_3^3 B_3 R_3-\tau_2^3(B_2R_2+\varpi\mathfrak{R}_2\cos\beta_2)}$$

ergiebt. Führen wir aber in diese Gleichung für $\mathfrak{R}_2$ den aus 51) sich ergebenden Werth

$$\mathfrak{R}_2=R_2(\cos\varDelta_2+v\sin\varDelta_2)$$

ein, und setzen der Kürze wegen:

$$53)\quad\left\{\begin{aligned}
G\;&=\tau_1 B_1 R_1-\tau_2 B_2 R_2+\tau_3 B_3 R_3-\varpi\tau_2 R_2\cos\beta_2\cos\varDelta_2,\\
G_1&=\varpi\tau_2 R_2\cos\beta_2\sin\varDelta_2;\\
G'\;&=\tau_1^3 B_1 R_1-\tau_2^3 B_2 R_2+\tau_3^3 B_3 R_3-\varpi\tau_2^3 R_2\cos\beta_2\cos\varDelta_2,\\
G_1'&=\varpi\tau_2^3 R_2\cos\beta_2\sin\varDelta_2;\\
F\;&=\frac{6R_2^3\sin\varDelta_2^3}{k^2};
\end{aligned}\right.$$

so wird die in Rede stehende Gleichung:

$$\frac{1}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}=F\frac{G-G_1v}{G'-G_1'v},$$

aus welcher Gleichung nun v bestimmt werden muss.

Zu dem Ende setzen wir

$$54)\quad\ldots\ldots\ldots\quad u=\frac{1}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}}},$$

wobei u als positiv angenommen wird, und also

$$0<u\leqq 1$$

ist; dann ist, wie man leicht findet:

$$55)\quad\ldots\ldots\quad v=\pm\frac{\sqrt{(1-u)(1+u)}}{u},$$

und die aufzulösende Gleichung wird also:

$$u^3 = F\frac{Gu \mp G_1\sqrt{(1-u)(1+u)}}{G'u \mp G_1'\sqrt{(1-u)(1+u)}},$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$56) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad G'' = FG, \quad G_1'' = FG_1$$

gesetzt wird:

$$u^3 = \frac{G''u \mp G_1''\sqrt{(1-u)(1+u)}}{G'u \mp G_1'\sqrt{(1-u)(1+u)}},$$

woraus sich sogleich die Gleichung

$$57) \quad (G'' - G'u^3)u \mp (G_1'' - G_1'u^3)\sqrt{(1-u)(1+u)} = 0$$

oder

$$58) \quad . \; . \; (G'' - G'u^3)u \mp (G_1'' - G_1'u^3)\sqrt{1-u^2} = 0$$

ergiebt, welche man nun auf gewöhnliche Weise durch successive Näherung auflösen muss, indem man für u nach dem Obigen die wichtige Gränzenbestimmung $0 < u \overline{\overline{<}} 1$ hat, wodurch natürlich die Auflösung dieser Gleichung ungemein erleichtert wird.

Die Berechnung der Coefficienten G', G_1' und G'', G_1'' führt man am besten nach den folgenden Formeln aus:

59)

$$\cos\Delta_2 = -\cos\beta_2\cos(L_2 - \lambda_2), \quad 0 < \Delta_2 < 180^0;$$

$$A = \tau_1 B_1 R_1,$$

$$B = \tau_2 B_2 R_2,$$

$$C = \tau_3 B_3 R_3,$$

$$D = \overline{\omega}\tau_2 R_2 \cos\beta_2 \cos\Delta_2;$$

$$A' = \tau_1^2 A,$$

$$B' = \tau_2^2 B,$$

$$C' = \tau_3^2 C,$$

$$D' = \tau_2^2 D;$$

$$G = A - B + C - D,$$

$$G' = A' - B' + C' - D';$$

$$G_1 = D\,\mathrm{tang}\,\varDelta_2,$$

$$G_1' = D'\,\mathrm{tang}\,\varDelta_2;$$

$$F = \frac{6R_2^3 \sin\varDelta_2^3}{k^2},$$

$$G'' = FG,$$

$$G_1'' = FG_1.$$

Bei der Auflösung der Doppelgleichung 57) oder 58) hat man immer das Intervall zwischen 0 und 1 in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, die an den Gränzen dieser kleineren Intervalle liegenden Werthe für u zu setzen, und daraus auf bekannte Weise die engeren Gränzen, zwischen denen u liegen muss, zu ermitteln, worauf man durch weitere Theilung der kleineren Intervalle, in denen die, der in Rede stehenden Gleichung genügenden Werthe von u liegen müssen, noch engere Gränzen für u findet: eine Rechnung, die man in derselben Weise jederzeit so lange oder so weit fortführen muss, bis man die reellen Wurzeln der aufzulösenden Gleichung, auf die es natürlich hier nur allein ankommen kann, in der verlangten Anzahl von Decimalstellen genau gefunden hat.

Wenn man auf diese Weise u, und mittelst der Formel 55) dann auch v gefunden hat, so ergeben sich ferner r_2, $\mathfrak{R}_2$, ϱ_2 leicht mittelst der folgenden, unmittelbar aus dem Vorhergehenden fliessenden Formeln:

$$60)\quad\left\{\begin{aligned} r_2 &= \frac{R_2 \sin\varDelta_2}{u},\\ \mathfrak{R}_2 &= R_2(\cos\varDelta_2 + v\sin\varDelta_2),\\ \varrho_2 &= \mathfrak{R}_2 \cos\beta_2; \end{aligned}\right.$$

und f_1, f_2, f_3 findet man mittelst der Formeln 47) oder genauer mittelst der Formeln 46).

Dann erhält man ϱ_1, ϱ_3 und r_1, r_3 mittelst der folgenden, aus 13) und 15) sich ergebenden Formeln:

$$61)\quad\left\{\begin{aligned} \varrho_1 &= -\frac{1}{\overline{\omega}}\left\{A_1R_1 - A_2R_2\frac{f_2}{f_1} + A_3R_3\frac{f_3}{f_1}\right\},\\ \varrho_3 &= -\frac{1}{\overline{\omega}}\left\{C_3R_3 - C_2R_2\frac{f_2}{f_3} + C_1R_1\frac{f_1}{f_3}\right\} \end{aligned}\right.$$

oder

$$61^*)\left\{\begin{aligned} \varrho_1 &= -\frac{\left\{\begin{array}{l}\tau_1 A_1 R_1 - \tau_2 A_2 R_2 + \tau_3 A_3 R_3 \\ -\frac{k^2}{6 r_2^3}(\tau_1^3 A_1 R_1 - \tau_2^3 A_2 R_2 + \tau_3^3 A_3 R_3)\end{array}\right\}}{\varpi \tau_1 \left(1 - \frac{k^2 \tau_1^2}{6 r_2^3}\right)}, \\ \varrho_3 &= -\frac{\left\{\begin{array}{l}\tau_1 C_1 R_1 - \tau_2 C_2 R_2 + \tau_3 C_3 R_3 \\ -\frac{k^2}{6 r_2^3}(\tau_1^3 C_1 R_1 - \tau_2^3 C_2 R_2 + \tau_3^3 C_3 R_3)\end{array}\right\}}{\varpi \tau_3 \left(1 - \frac{k^2 \tau_3^2}{6 r_2^3}\right)};\end{aligned}\right.$$

und

$$62) \;.\;.\; \left\{\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{R_1^2 + 2\varrho_1 R_1 \cos(L_1 - \lambda_1) + \varrho_1^2 \sec\beta_1^2}, \\ r_3 &= \sqrt{R_3^2 + 2\varrho_3 R_3 \cos(L_3 - \lambda_3) + \varrho_3^2 \sec\beta_3^2};\end{aligned}\right.$$

wobei wir bemerken, dass man sich bei der Berechnung der Verhältnisse zwischen den Grössen f_1, f_2, f_3 auch der am Ende der folgenden Anmerkung zu diesem Paragraphen angegebenen Formeln bedienen kann, die deshalb nicht unbequem sind, weil sie eigentlich bloss die Berechnung sehr kleiner Correctionen zu schon aus den früheren Rechnungen bekannten oder sehr leicht unmittelbar aus den gegebenen Grössen abzuleitenden Näherungswerthen dieser Verhältnisse erfordern.

Endlich erhält man die Coordinaten

$$x_1,\, y_1,\, z_1;\quad x_2,\, y_2,\, z_2;\quad x_3,\, y_3,\, z_3$$

mittelst der folgenden, leicht aus 6) und 7) sich ergebenden Formeln:

63)

$$x_1 = R_1 \cos L_1 + \varrho_1 \cos\lambda_1,\quad y_1 = R_1 \sin L_1 + \varrho_1 \sin\lambda_1,\quad z_1 = \varrho_1 \operatorname{tang}\beta_1;$$

$$x_2 = R_2 \cos L_2 + \varrho_2 \cos\lambda_2,\quad y_2 = R_2 \sin L_2 + \varrho_2 \sin\lambda_2,\quad z_2 = \varrho_2 \operatorname{tang}\beta_2;$$

$$x_3 = R_3 \cos L_3 + \varrho_3 \cos\lambda_3,\quad y_3 = R_3 \sin L_3 + \varrho_3 \sin\lambda_3,\quad z_3 = \varrho_3 \operatorname{tang}\beta_3.$$

Anmerkung.

Es verdient bemerkt zu werden, dass man sich bei der Behandlung der vorhergehenden Gleichungen noch auf eine andere Art verhalten kann wie vorher.

Es ist nämlich:

$$f_1 = \tau_1\left(1 - \frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}\right), \quad f_2 = \tau_2\left(1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}\right), \quad f_3 = \tau_3\left(1 - \frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}\right);$$

also, wie man mit Rücksicht darauf, dass $\tau_1 + \tau_3 = \tau_2$ ist, leicht findet:

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} - \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{k^2\tau_2(\tau_1 - \tau_3)}{6r_2^3\left(1 - \frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}\right)},$$

$$\frac{f_1 + f_3}{f_2} - 1 = \frac{k^2\tau_1\tau_3}{2r_2^3} + \frac{k^4\tau_1\tau_2^2\tau_3}{12r_2^6\left(1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}\right)};$$

setzen wir folglich

$$P = \frac{f_1}{f_3}, \quad Q = 2r_2^3\left(\frac{f_1 + f_3}{f_2} - 1\right);$$

[illegible] dann, wenn die Zwischenzeiten τ_1 und τ_3 zwi- [illegible] [u]nd zweiten und zweiten und dritten Beobach- [illegible] gleich sind,

$$\frac{\tau_1}{\tau_3} \text{ und } k^2\tau_1\tau_3$$

zwei den Grössen P und Q sehr nahe kommende erste Näherungswerthe dieser Grössen, da namentlich

$$Q = k^2\tau_1\tau_3 + \frac{k^4\tau_1\tau_2^2\tau_3}{6r_2^3\left(1 - \frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}\right)}$$

nur um eine Grösse der vierten Ordnung von $k^2\tau_1\tau_3$ verschieden ist.

Aus den beiden Gleichungen

$$P = \frac{f_1}{f_3}, \quad Q = 2r_2^3\left(\frac{f_1 + f_3}{f_2} - 1\right)$$

erhält man sogleich:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P\left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right)}{1 + P}, \quad \frac{f_3}{f_2} = \frac{1 + \frac{Q}{2r_2^3}}{1 + P};$$

und weil nun bekanntlich

$$\varpi\varrho_2 = B_1R_1\frac{f_1}{f_2} + B_3R_3\frac{f_3}{f_2} - B_2R_2$$

ist, so wird

$$\varpi\varrho_2 = (B_3R_3 + B_1R_1P)\frac{1+\frac{Q}{2r_2^3}}{1+P} - B_2R_2;$$

folglich:

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{2}{Q}\left\{\frac{(1+P)(\varpi\varrho_2 + B_2R_2)}{B_3R_3 + B_1R_1P} - 1\right\}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$r_2^2 = R_2^2 + 2\varrho_2R_2\cos(L_2-\lambda_2) + \varrho_2^2\sec\beta_2^2,$$

oder, wenn man

$$\varrho_2 = \mathfrak{R}_2\cos\beta_2,\quad \cos\varDelta_2 = -\cos\beta_2\cos(L_2-\lambda_2)$$

setzt:

$$r_2^2 = R_2^2 - 2R_2\mathfrak{R}_2\cos\varDelta_2 + \mathfrak{R}_2^2;$$

also:

$$\frac{1}{(R_2^2 - 2R_2\mathfrak{R}_2\cos\varDelta_2 + \mathfrak{R}_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{Q}\left\{\frac{(1+P)(\varpi\varrho_2 + B_2R_2)}{B_3R_3 + B_1R_1P} - 1\right\},$$

und folglich, wenn man

$$\mathfrak{R}_2 = R_2(\cos\varDelta_2 + x\sin\varDelta_2)$$

setzt, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2R_2^3\sin\varDelta_2^3}{Q}\left\{\frac{(1+P)R_2[\varpi(\cos\varDelta_2 + x\sin\varDelta_2)\cos\beta_2 + B_2]}{B_3R_3 + B_1R_1P} - 1\right\}.$$

Setzt man also der Kürze wegen:

$$G = \frac{2R_2^3\sin\varDelta_2^3}{Q}\cdot\left\{\frac{(1+P)R_2(B_2 + \varpi\cos\beta_2\cos\varDelta_2)}{B_3R_3 + B_1R_1P} - 1\right\},$$

$$G' = \frac{2R_2^3\sin\varDelta_2^3}{Q}\cdot\frac{\varpi(1+P)R_2\cos\beta_2\sin\varDelta_2}{B_3R_3 + B_1R_1P};$$

so ist

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = G + G'x.$$

Wenn man sich mit möglichster Genauigkeit ein für alle Mal eine die Function

$$y=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

darstellende Curve construirt *), die man immer bei Rechnungen dieser Art gebrauchen kann, und dann die durch die Gleichung

$$y=G+G'x$$

charakterisirte Gerade in jedem einzelnen Falle zieht, was nach den Lehren der analytischen Geometrie nicht der mindesten Schwierigkeit unterliegt; so bestimmen die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der vorhergehenden Curve offenbar die der Gleichung

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=G+G'x$$

genügenden reellen Werthe von x. Aus diesen Werthen ergeben sich aber die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{R}_2$, ϱ_2, r_2 unmittelbar mittelst der folgenden, aus dem Obigen bekannten Formeln:

$$\mathfrak{R}_2=R_2(\cos\varDelta_2+x\sin\varDelta_2),$$

$$\varrho_2=\mathfrak{R}_2\cos\beta_2,$$

$$r_2=\sqrt{R_2{}^2-2R_2\mathfrak{R}_2\cos\varDelta_2+\mathfrak{R}_2{}^2}.$$

Wie man sich nun überhaupt dieser Formeln zu bedienen hat, unterliegt keinem Zweifel und bedarf kaum noch einer besondern Erläuterung. Aus den ersten Näherungswerthen

$$P=\frac{\tau_1}{\tau_3},\quad Q=k^2\tau_1\tau_3$$

findet man erste Näherungswerthe von x, $\mathfrak{R}_2$, ϱ_2, r_2. Hierauf findet man f_1, f_2, f_3 mittelst der Formeln

---

*) Die Construction dieser Curve hat nicht die mindeste Schwierigkeit, setzt aber eine Tafel der Werthe der Function

$$y=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

voraus, die gleichfalls sehr leicht zu berechnen ist. Denn setzt man

$$x=\operatorname{tang}\omega$$

und nimmt ω zwischen -90° und $+90^\circ$, so ist offenbar:

$$y=\cos\omega^3,$$

mittelst welcher Formeln die Werthe von y ungemein leicht berechnet werden können.

$$f_1=\tau_1\left(1-\frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}\right),\quad f_2=\tau_2\left(1-\frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}\right),\quad f_3=\tau_3\left(1-\frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}\right)$$

und dann neue Näherungswerthe von P und Q mittelst der Formeln

$$P=\frac{f_1}{f_3},\quad Q=2r_2^3\left(\frac{f_1+f_3}{f_2}-1\right),$$

oder auch unmittelbar mittelst der folgenden, aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von P und Q:

$$P=\frac{\tau_1}{\tau_3}-\frac{\tau_1}{\tau_3}\cdot\frac{k^2\tau_2(\tau_1-\tau_3)}{6r_2^3\left(1-\frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}\right)},$$

$$Q=k^2\tau_1\tau_3+\frac{k^4\tau_1\tau_2^2\tau_3}{6r_2^3\left(1-\frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}\right)};$$

welche neuen Näherungswerthe von P und Q dann ferner auf dieselbe Weise wie vorher zu neuen Näherungswerthen von x, $\mathfrak{R}_2$, ϱ_2, r_2 führen. Wie man nun aber dieses Verfahren immer weiter fortsetzen kann, bis man alle Grössen mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit gefunden hat, übersieht Jeder auf den ersten Blick.

Wir bemerken hierbei noch, dass sich aus dem Obigen auch leicht die folgenden Formeln zu Berechnung der Verhältnisse zwischen den Grössen f_1, f_2, f_3 ergeben:

$$\frac{f_1}{f_3}=\frac{\tau_1}{\tau_3}-\frac{\tau_1}{\tau_3}\cdot\frac{k^2\tau_2(\tau_1-\tau_3)}{6r_2^3\left(1-\frac{k^2\tau_3^2}{6r_2^3}\right)},$$

$$\frac{f_3}{f_1}=\frac{\tau_3}{\tau_1}+\frac{\tau_3}{\tau_1}\cdot\frac{k^2\tau_2(\tau_1-\tau_3)}{6r_2^3\left(1-\frac{k^2\tau_1^2}{6r_2^3}\right)}$$

und:

$$\left(1+\frac{f_3}{f_1}\right)\cdot\frac{f_1}{f_2}=1+\frac{k^2\tau_1\tau_3}{2r_2^3}+\frac{k^4\tau_1\tau_2^2\tau_3}{12r_2^6\left(1-\frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}\right)},$$

$$\left(1+\frac{f_1}{f_3}\right)\cdot\frac{f_3}{f_2}=1+\frac{k^2\tau_1\tau_3}{2r_2^3}+\frac{k^4\tau_1\tau_2^2\tau_3}{12r_2^6\left(1-\frac{k^2\tau_2^2}{6r_2^3}\right)}.$$

§. 12.

Weil nach 25)

$$\Pi_{0,1} = x_2 \frac{\partial y_2}{\partial t_2} - y_2 \frac{\partial x_2}{\partial t_2}$$

ist, so ist, wenn i seine aus dem ersten Kapitel bekannte Bedeutung für jetzt auch hier beibehält, nach I. 4) und I. 11) offenbar

$$K\cos i = -\Pi_{0,1},$$

und nach I. 48):

$$K = k\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}}{A}},$$

also, wenn man den Bruch $\frac{m}{M}$ als verschwindend betrachtet:

$$64) \quad \ldots\ldots\ldots \quad K = \frac{k}{\sqrt{A}}.$$

Also ist

$$k\cos i = -\Pi_{0,1}.\sqrt{A}.$$

Nach §. 10. ist aber:

$$f_1 = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{\Pi_{0,1}}, \quad \Pi_{0,1} = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{f_1};$$

$$f_2 = \frac{x_1y_3 - x_3y_1}{\Pi_{0,1}}, \quad \Pi_{0,1} = \frac{x_1y_3 - x_3y_1}{f_2};$$

$$f_3 = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\Pi_{0,1}}, \quad \Pi_{0,1} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{f_3};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$k\cos i = -\frac{(x_2y_3 - x_3y_2)\sqrt{A}}{f_1},$$

$$k\cos i = -\frac{(x_1y_3 - x_3y_1)\sqrt{A}}{f_2},$$

$$k\cos i = -\frac{(x_1y_2 - x_2y_1)\sqrt{A}}{f_3};$$

folglich:

$$65) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \sqrt{A} = -\dfrac{kf_1 \cos i}{x_2y_3 - x_3y_2}, \\ \sqrt{A} = -\dfrac{kf_2 \cos i}{x_1y_3 - x_3y_1}, \\ \sqrt{A} = -\dfrac{kf_3 \cos i}{x_1y_2 - x_2y_1}. \end{cases}$$

Weil die Ebene der Bahn unsers Weltkörpers durch die Sonne als Anfang der Coordinaten und durch die Punkte $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ geht, so ist ihre Gleichung nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$(y_2z_3 - y_3z_2)x + (z_2x_3 - z_3x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2)z = 0,$$

$$(y_1z_3 - y_3z_1)x + (z_1x_3 - z_3x_1)y + (x_1y_3 - x_3y_1)z = 0,$$

$$(y_1z_2 - y_2z_1)x + (z_1x_2 - z_2x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)z = 0;$$

wo bekanntlich auch die Bedingungsgleichung

$$66) \quad x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) = 0$$

Statt finden müsste, wenn die Coordinaten sämmtlich in aller Strenge richtig wären.

Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist nun bekanntlich:

$$\cos i^2 = \frac{(x_2y_3 - x_3y_2)^2}{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (y_2z_3 - y_3z_2)^2 + (z_2x_3 - z_3x_2)^2},$$

$$\cos i^2 = \frac{(x_1y_3 - x_3y_1)^2}{(x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (y_1z_3 - y_3z_1)^2 + (z_1x_3 - z_3x_1)^2},$$

$$\cos i^2 = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2};$$

oder, wie man leicht findet:

$$\cos i^2 = \frac{(x_2y_3 - x_3y_2)^2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2},$$

$$\cos i^2 = \frac{(x_1y_3 - x_3y_1)^2}{(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1)^2},$$

$$\cos i^2 = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2};$$

also:

$$67)\quad \ldots \left\{\begin{aligned} \cos i^2 &= \frac{(x_2y_3-x_3y_2)^2}{r_2{}^2r_3{}^2-(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)^2},\\ \cos i^2 &= \frac{(x_1y_3-x_3y_1)^2}{r_3{}^2r_1{}^2-(x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1)^2},\\ \cos i^2 &= \frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{r_1{}^2r_2{}^2-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}; \end{aligned}\right.$$

folglich nach 65):

$$68)\quad \ldots \left\{\begin{aligned} A &= \frac{k^2f_1{}^2}{r_2{}^2r_3{}^2-(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)^2},\\ A &= \frac{k^2f_2{}^2}{r_3{}^2r_1{}^2-(x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1)^2},\\ A &= \frac{k^2f_3{}^2}{r^2r_2{}^2-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}. \end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir den in der Zeit τ_1 von dem Vector unsers Weltkörpers beschriebenen Winkel durch ω_1, wo wir, weil in den Fällen, in denen die obigen Rechnungen überhaupt zur Anwendung kommen, τ_1 immer nur eine geringe Anzahl von Tagen umfassen wird, jederzeit zu der Annahme berechtigt sein werden, dass der Winkel ω_1 kleiner als 180° ist; so ist

$$\cos\omega_1 = \frac{r_2{}^2+r_3{}^2-s_1{}^2}{2r_2r_3},$$

und folglich, weil

$$s_1{}^2 = (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2,$$

also, wie man sogleich übersieht,

$$s_1{}^2 = r_2{}^2+r_3{}^2-2(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)$$

ist:

$$69)\quad \ldots\ldots \cos\omega_1 = \frac{x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3}{r_2r_3},$$

folglich:

$$\sin\omega_1{}^2 = \frac{r_2{}^2r_3{}^2-(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)^2}{r_2{}^2r_3{}^2},$$

und daher nach 68), weil $\sin\omega_1$ positiv ist:

$$70)\quad \ldots\ldots\ldots \sin\omega_1 = \frac{kf_1}{r_2r_3\sqrt{A}};$$

folglich nach 69) und 70):

$$71) \quad . \quad . \quad . \quad \tan g\,\omega_1 = \frac{kf_1}{(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)\sqrt{A}}.$$

Nach I. 30) ist:

$$\frac{1}{r_2} = A + B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_3} = A + B\cos v_3;$$

also:

$$\frac{1}{r_2} - A = B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_3} - A = B\cos v_3;$$

aber offenbar

$$v_3 = v_2 + \omega_1 \quad \text{oder} \quad v_3 = v_2 + \omega_1 - 360^\circ;$$

also allgemein

$$\cos v_3 = \cos(v_2 + \omega_1),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{1}{r_2} - A = B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_3} - A = B\cos(v_2 + \omega_1);$$

also:

$$\left(\frac{1}{r_2} - A\right)\cos\omega_1 - \left(\frac{1}{r_3} - A\right) = B\sin\omega_1 \sin v_2,$$

folglich

$$B\sin v_2 = \frac{\left(\frac{1}{r_2} - A\right)\cos\omega_1 - \left(\frac{1}{r_3} - A\right)}{\sin\omega_1},$$

oder, wie man leicht findet:

$$B\sin v_2 = A\,\tan g\,\tfrac{1}{2}\omega_1 - \frac{r_3 - r_2\cos\omega_1}{r_2 r_3 \sin\omega_1}.$$

Nach I. 59) ist aber

$$\frac{\partial r_2}{\partial t_2} = \frac{kB}{\sqrt{A}}\sqrt{1+\frac{m}{M}} \cdot \sin v_2,$$

also, wenn man den Bruch $\frac{m}{M}$ als verschwindend betrachtet:

$$72) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = \frac{kB\sin v_2}{\sqrt{A}},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$73) \ldots \frac{\partial r_2}{\partial t_2}=k\{\tang\tfrac{1}{2}\omega_1 . \sqrt{A}-\frac{r_2-r_3\cos\omega_1}{r_3r_2\sin\omega_1 . \sqrt{A}}\}$$

oder auch:

$$74) \ldots \frac{\partial r_2}{\partial t_2}=k\{\tang\tfrac{1}{2}\omega_1 . \sqrt{A}-\frac{\frac{1}{r_3}\operatorname{cosec}\omega_1-\frac{1}{r_2}\cot\omega_1}{\sqrt{A}}\}.$$

Bezeichnen wir den in der Zeit τ_3 von dem Vector unsers Weltkörpers beschriebenen Winkel durch ω_3, wo wir, wie vorher ω_1, auch ω_3 kleiner als 180° anzunehmen berechtigt sind, so ist

$$\cos\omega_3=\frac{r_1^2+r_2^2-s_3^2}{2r_1r_2},$$

und folglich, weil

$$s_3^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

also, wie man sogleich übersieht,

$$s_3^2=r_1^2+r_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$$

ist:

$$75) \ldots \cos\omega_3=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_1r_2},$$

folglich:

$$\sin\omega_3^2=\frac{r_1^2r_2^2-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}{r_1^2r_2^2},$$

und daher nach 68), weil $\sin\omega_3$ positiv ist:

$$76) \ldots \sin\omega_3=\frac{kf_3}{r_1r_2\sqrt{A}},$$

folglich nach 75) und 76):

$$77) \ldots \tang\omega_3=\frac{kf_3}{(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)\sqrt{A}}.$$

Nach I. 30) ist:

$$\frac{1}{r_2}=A+B\cos v_2,\quad \frac{1}{r_1}=A+B\cos v_1;$$

also:

$$\frac{1}{r_2}-A=B\cos v_2,\quad \frac{1}{r_1}-A=B\cos v_1;$$

aber offenbar

$$v_1 = v_2 - \omega_3 \quad \text{oder} \quad v_1 = v_2 - \omega_3 + 360^0;$$

also allgemein:

$$\cos v_1 = \cos(v_2 - \omega_3),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{1}{r_2} - A = B\cos v_2, \quad \frac{1}{r_1} - A = B\cos(v_2 - \omega_3);$$

also:

$$\frac{1}{r_1} - A - \left(\frac{1}{r_2} - A\right)\cos\omega_3 = B\sin\omega_3\sin v_2;$$

folglich:

$$B\sin v_2 = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - A\right) - \left(\frac{1}{r_2} - A\right)\cos\omega_3}{\sin\omega_3},$$

oder, wie man leicht findet:

$$B\sin v_2 = \frac{r_2 - r_1\cos\omega_3}{r_1 r_2 \sin\omega_3} - A\tang\tfrac{1}{2}\omega_3;$$

also nach 72):

$$78) \quad . \quad . \quad \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = k\left\{\frac{r_2 - r_1\cos\omega_3}{r_1 r_2\sin\omega_3 . \sqrt{A}} - \tang\tfrac{1}{2}\omega_3 . \sqrt{A}\right\},$$

oder:

$$79) \quad . \quad . \quad \frac{\partial r_2}{\partial t_2} = \frac{\frac{1}{r_1}\operatorname{cosec}\omega_3 - \frac{1}{r_2}\cot\omega_3}{\sqrt{A}} - \tang\tfrac{1}{2}\omega_3 . \sqrt{A}.$$

Zur Berechnung des zweiten, dritten und vierten Differentialquotienten hat man nach I. 55), 56), 57) die folgenden Formeln:

$$80)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2} &= \quad k^2\frac{1 - Ar_2}{Ar_2^3},\\
\frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2^3} &= -k^2\frac{3 - 2Ar_2}{Ar_2^4} . \frac{\partial r_2}{\partial t_2},\\
\frac{\partial^4 r_2}{\partial t_2^4} &= \quad k^2\left\{\frac{6(2 - Ar_2)}{Ar_2^5} . \left(\frac{\partial r_2}{\partial t_2}\right)^2 - \frac{3 - 2Ar_2}{Ar_2^4} . \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^2}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Für den ersten und zweiten Differentialquotienten von r_2 kann man auch die folgenden Ausdrücke entwickeln.

Nach 70) und 76) ist:

$$\sin\omega_1 . \sqrt{A} = \frac{kf_1}{r_2 r_3}, \quad \sin\omega_3 . \sqrt{A} = \frac{kf_3}{r_1 r_2};$$

also:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_1 . \sqrt{A} = \frac{kf_1}{2r_2 r_3 \cos\tfrac{1}{2}\omega_1{}^2}, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_3 . \sqrt{A} = \frac{kf_3}{2r_1 r_2 \cos\tfrac{1}{2}\omega_3{}^2}.$$

Nun ist aber nach 69) und 75):

$$2\cos\tfrac{1}{2}\omega_1{}^2 = 1 + \cos\omega_1 = \frac{r_2 r_3 + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)}{r_2 r_3},$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3{}^2 = 1 + \cos\omega_3 = \frac{r_1 r_2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_1 r_2};$$

also:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_1 . \sqrt{A} = \frac{kf_1}{r_2 r_3 + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega_3 . \sqrt{A} = \frac{kf_3}{r_1 r_2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}.$$

Ferner ist nach 69) und 75):

$$r_2 - r_3 \cos\omega_1 = \frac{r_2 r_2 - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)}{r_2},$$

$$r_2 - r_1 \cos\omega_3 = \frac{r_2 r_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_2};$$

und nach dem Obigen:

$$r_2 r_3 \sin\omega_1 . \sqrt{A} = kf_1, \quad r_1 r_2 \sin\omega_3 . \sqrt{A} = kf_3;$$

also:

$$\frac{r_2 - r_3 \cos\omega_1}{r_2 r_3 \sin\omega_1 . \sqrt{A}} = \frac{r_2 r_2 - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)}{kr_2 f_1},$$

$$\frac{r_2 - r_1 \cos\omega_3}{r_1 r_2 \sin\omega_3 . \sqrt{A}} = \frac{r_2 r_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{kr_2 f_3}.$$

Folglich ist nach 73) und 78):

$$80^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial t_2} = \dfrac{k^2 f_1}{r_2 r_3 + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)} - \dfrac{r_2 r_2 - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)}{r_2 f_1}, \\[2ex] \dfrac{\partial r_2}{\partial t_2} = \dfrac{r_2 r_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_2 f_3} - \dfrac{k^2 f_3}{r_1 r_2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}. \end{cases}$$

Ferner erhält man aus der ersten Formel in 80) und aus 68) leicht:

$$80^{**})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^{\,2}} = \dfrac{r_2^{\,2} r_3^{\,2} - (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3)^2 - k^2 r_2 f_1^{\,2}}{r_2^{\,3} f_1^{\,2}}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 r_2}{\partial t_2^{\,2}} = \dfrac{r_1^{\,2} r_2^{\,2} - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 - k^2 r_2 f_3^{\,2}}{r_2^{\,3} f_3^{\,2}}. \end{cases}$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial r_2}{\partial t_2} = \frac{kB}{\sqrt{A}} \sin v_2, \quad 1 - Ar_2 = Br_2 \cos v_2$$

ist, so ist:

$$81) \quad . \quad . \quad \sin v_2 = \frac{\sqrt{A}}{kB} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}, \quad \cos v_2 = \frac{1 - Ar_2}{Br_2};$$

folglich:

$$82) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tang v_2 = \frac{r_2 \sqrt{A}}{k(1 - Ar_2)} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

mittelst welcher Formel sich v_2 ohne alle Zweideutigkeit bestimmen lässt, wenn man nur die folgenden, aus 81) sich unmittelbar ergebenden Regeln beachtet:

Wenn

$\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$	$1-Ar_2$		
positiv	positiv	ist, so ist	$0 < v_2 < 90^\circ$
positiv	negativ	ist, so ist	$90^\circ < v_2 < 180^\circ$
negativ	negativ	ist, so ist	$180^\circ < v_2 < 270^\circ$
negativ	positiv	ist, so ist	$270^\circ < v_2 < 360^\circ$.

Hat man aber v_2 auf diese Weise gefunden, so findet man B mittelst einer der beiden folgenden Formeln:

$$83) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad B = \frac{\sqrt{A} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial t_2}}{k \sin v_2}, \quad B = \frac{1 - Ar_2}{r_2 \cos v_2}.$$

Wenn

$$A > B, \quad A = B, \quad A < B,$$

so ist bekanntlich die Bahn respective eine

Ellipse, Parabel, Hyperbel;

im letzten Falle nämlich der Zweig einer Hyperbel, innerhalb welches M als Brennpunkt liegt.

Die Fälle der Ellipse und Parabel, welche für uns hier zunächst nur von Interesse sind, wollen wir nun noch etwas weiter betrachten, indem wir von jetzt an in beiden Fällen unter t_2 die Zeit verstehen, welche zur Beschreibung der wahren Anomalie v_2 verwandt worden ist, im Falle der Ellipse aber die der wahren Anomalie v_2 entsprechende excentrische Anomalie durch u_2 bezeichnen werden.

Sei nun zuerst $A > B$, die Bahn also eine Ellipse, so ist nach der Theorie der Kegelschnitte, wenn a, b, e, p ihre bekannte gewöhnliche Bedeutung haben:

$$84) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{A}{(A-B)(A+B)}, \\ b &= \frac{1}{\sqrt{(A-B)(A+B)}}, \\ e &= \frac{B}{A},\quad p = \frac{2}{A}. \end{aligned} \right.$$

Zur Berechnung von u_2 hat man nach I. 84) die Formel:

$$85) \quad \tang \tfrac{1}{2}u_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\tang \tfrac{1}{2}v_2$$

oder

$$86) \quad \tang \tfrac{1}{2}u_2 = \sqrt{\frac{A-B}{A+B}}.\tang \tfrac{1}{2}v_2;$$

und t_2 ergiebt sich nach I. 88) mittelst der Formel

$$87) \quad t_2 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}(u_2 - e\sin u_2)$$

oder

$$88) \quad t_2 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\left(u_2 - \frac{B}{A}\sin u_2\right).$$

Wenn ferner $A = B$, die Bahn also eine Parabel ist, so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten:

$$89) \quad p = \frac{2}{A} = \frac{2}{B},$$

und t_2 erhält man mittelst der aus I. 94) bekannten Formel:

90) . . . . . $t_2 = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4k\sqrt{2}}(\tang \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{3}\tang \frac{1}{2}v_2^3)$

oder

91) . . . . . $t_2 = \frac{(\frac{1}{2}p)^{\frac{3}{2}}}{2k}(\tang \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{3}\tang \frac{1}{2}v_2^3)$.

Auf diese Weise kennt man also in beiden Fällen alle Elemente der Bahn, welche sich nicht auf ihre Lage im Raume beziehen; mit der Bestimmung dieser letzteren werden wir uns unten in §. 14. beschäftigen.

§. 13.

Wir wollen nun noch ganz in der Kürze zeigen, wie man sich, nachdem man mittelst des in §. 11. entwickelten Verfahrens die Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; r_1, r_2, r_3; f_1, f_2, f_3; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 bereits mit einem grossen Grade der Annäherung gefunden hat, der in §. 12. und früher in §. 10. bewiesenen Formeln bedienen kann, um nach und nach sowohl die vorher genannten Grössen, als auch die nicht auf die Lage der Ebene der Bahn im Raume sich beziehenden Elemente derselben mit einem immer grösseren und grösseren Grade der Genauigkeit zu finden.

Mittelst der gefundenen Näherungswerthe der obigen Grössen berechne man A nach einer der drei Formeln 68), und dann $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ mittelst einer der Formeln 73), 74), 78), 79). Dann bestimme man, indem man diesen Werth von $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ in die zweite der Gleichungen 45) einführt, und hiebei beachtet, dass ein kleiner noch in $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ steckender Fehler, wegen der Kleinheit des Gliedes

$$\frac{k^2\tau_1\tau_3(\tau_1-\tau_3)}{2r_2^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2},$$

welches in Bezug auf die Grösse k von der dritten Ordnung ist, an sich, nur einen sehr geringen Einfluss ausüben kann, ϱ_2 und r_2 so, dass den Gleichungen 45) und 44) vollständig genügt wird, wobei man sich verschiedener Methoden bedienen kann, die im Ganzen so einfach und so bekannt sind, dass über dieselben etwas Weiteres hier nicht gesagt zu werden braucht; immer aber wird diese Bestimmung der Grössen ϱ_2 und r_2 leicht und ohne alle

Weitläufigkeit ausgeführt werden können, weil man deren Werthe bereits aus der früheren Rechnung mit grosser Annäherung kennt.

Dann kann man mittelst der gefundenen Werthe von ϱ_2 und r_2 ganz auf dieselbe Weise zu einem neuen Näherungswerthe von $\frac{\partial r_2}{\partial t_2}$ übergehen, denselben in die zweite der Gleichungen 45) einführen, und ϱ_2 und r_2 so bestimmen, dass den Gleichungen 45) und 44) vollständig genügt wird, ein Verfahren, welches man überhaupt so lange fortsetzt, bis zwei auf einander folgende Systeme von Werthen der Grössen ϱ_2, r_2 in der verlangten Anzahl von Decimalstellen sich nicht mehr von einander unterscheiden.

Nun setzt man die Rechnung in der Weise fort, dass man mittelst der jetzt gefundenen Werthe der vorher in die Rechnung gezogenen Grössen auch $\frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2{}^2}$ nach der ersten der Formeln 80) berechnet, diese Grösse von nun an in die Rechnung hineinzieht, und ϱ_2 und r_2 so bestimmt, dass den Gleichungen 43) und 44) vollständig genügt wird, mittelst welcher Werthe von ϱ_2 und r_2 man dann auf dieselbe Weise neue Näherungswerthe dieser Grössen findet, und die Rechnung wieder so lange fortsetzt, bis zwei auf einander folgende Systeme von Werthen derselben in der verlangten Anzahl von Decimalstellen sich nicht mehr von einander unterscheiden, wobei es sich von selbst versteht, dass man bei der Berechnung der Grössen f_1, f_2, f_3 sich stets der Formeln 43) zu bedienen hat.

Ganz in ähnlicher Weise, was nun eine weitere Erläuterung nicht mehr bedürfen wird, kann man mittelst der zweiten der Formeln 80) ferner auch die Grösse $\frac{\partial^3 r_2}{\partial t_2{}^3}$ in die Rechnung hineinziehen, und ϱ_2 und r_2 so bestimmen, dass den Gleichungen 37) und 43) mit Rücksicht auf die hierbei zur Anwendung kommenden Formeln 36) vollständig genügt wird, wobei man sich im Allgemeinen immer ganz eben so zu verhalten hat, wie in den beiden vorhergehenden Fällen.

Wie weit man aber überhaupt auf dem im Allgemeinen hier vorgezeichneten Wege fortschreiten muss, wird immer von der Genauigkeit abhängen, die man bei diesen Rechnungen zu erreichen beabsichtigt, so dass sich darüber also allgemeine Regeln natürlich gar nicht geben lassen.

Wie endlich, nachdem man in der vorhergehenden Rechnung

die beabsichtigte Genauigkeit erreicht hat, dann ferner die nicht auf die Lage der Ebene der Bahn im Raume sich beziehenden Elemente derselben zu berechnen sind, erhellet aus §. 12. ganz von selbst und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht.

§. 14.

Wir wollen jetzt zeigen, wie sich **die** Elemente der Bahn bestimmen lassen, welche sich auf ihre Lage im Raume beziehen.

Bezeichnen wir zu dem Ende einen beliebigen Vector und die entsprechende curtirte Entfernung unsers Weltkörpers von der Erde respective durch r und ϱ, die entsprechende geocentrische Länge und Breite desselben durch λ und β, die entsprechende heliocentrische Länge der Erde und ihren entsprechenden Vector durch L und R, endlich die entsprechende heliocentrische Länge und Breite des Weltkörpers durch $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$; so haben wir offenbar die folgenden Gleichungen:

92) . . $x = r\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad y = r\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad z = r\sin\mathfrak{B}.$

Nun ist aber nach 6) bekanntlich:

$$X = R\cos L,\quad Y = R\sin L;$$

ferner nach 7):

$$x' = \varrho\cos\lambda,\quad y' = \varrho\sin\lambda,\quad z' = \varrho\,\mathrm{tang}\,\beta;$$

und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x = X + x',\quad y = Y + y',\quad z = z';$$

also nach 92):

$$93)\ .\ .\ \begin{cases} r\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} = R\cos L + \varrho\cos\lambda, \\ r\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} = R\sin L + \varrho\sin\lambda, \\ r\sin\mathfrak{B} = \varrho\,\mathrm{tang}\,\beta; \end{cases}$$

oder auch, wie man leicht findet, wenn man die erste und zweite Gleichung respective mit $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$, ferner mit $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$ multiplicirt, und dann diese Gleichungen im ersten Falle zu einander addirt, im zweiten Falle von einander subtrahirt:

$$94)\quad \left\{\begin{aligned} r\cos(\mathfrak{L}-\lambda)\cos\mathfrak{B} &= R\cos(L-\lambda)+\varrho,\\ r\sin(\mathfrak{L}-\lambda)\cos\mathfrak{B} &= R\sin(L-\lambda),\\ r\sin\mathfrak{B} &= \varrho\,\mathrm{tang}\,\beta. \end{aligned}\right.$$

Aus den Gleichungen 93) erhält man zur Bestimmung von $\mathfrak{L}$ … $\mathfrak{B}$ die folgenden Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} \sin\mathfrak{B} &= \frac{\varrho}{r}\,\mathrm{tang}\,\beta,\\ \sin\mathfrak{L} &= \frac{R\sin L+\varrho\sin\lambda}{r\cos\mathfrak{B}},\\ \cos\mathfrak{L} &= \frac{R\cos L+\varrho\cos\lambda}{r\cos\mathfrak{B}},\\ \mathrm{tang}\,\mathfrak{L} &= \frac{R\sin L+\varrho\sin\lambda}{R\cos L+\varrho\cos\lambda}. \end{aligned}\right.$$

… liefert $\mathfrak{B}$ ohne alle Zweideutig- … und $+90^\circ$ liegt. Eben deshalb ist … stets pos… und … und $\cos\mathfrak{L}$ haben daher jederzeit mit … Zählern de… sie darstellenden obigen Brüche gleiche Vorzei- …n. Bedient man sich nun zur Bestimmung von $\mathfrak{L}$ der letzten der vier obigen Formeln, welche diese heliocentrische Länge durch ihre Tangente giebt, so muss man rücksichtlich der Art und Weise, wie man $\mathfrak{L}$ zu nehmen hat, die in dem folgenden Tableau enthaltenen Regeln befolgen, wobei sich die Ausdrücke Zähler und Nenner auf den Zähler und Nenner des Bruchs in der vierten der vorstehenden Formeln beziehen:

Zähler:	Nenner:	
positiv	positiv	$0 < \mathfrak{L} < 90^\circ$
positiv	negativ	$90^\circ < \mathfrak{L} < 180^\circ$
negativ	negativ	$180^\circ < \mathfrak{L} < 270^\circ$
negativ	positiv	$270^\circ < \mathfrak{L} < 360^\circ$.

Diese Regeln lassen über die Art und Weise, wie man $\mathfrak{L}$ zu nehmen hat, nicht die geringste Zweideutigkeit zu.

Aus den Gleichungen 94) ergeben sich zur Bestimmung von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}$ die folgenden Formeln:

$$96) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \sin\mathfrak{B} &= \frac{\varrho}{r}\operatorname{tang}\beta, \\ \sin(\mathfrak{L}-\lambda) &= \frac{R\sin(L-\lambda)}{r\cos\mathfrak{B}}, \\ \cos(\mathfrak{L}-\lambda) &= \frac{R\cos(L-\lambda)+\varrho}{r\cos\mathfrak{B}}, \\ \operatorname{tang}(\mathfrak{L}-\lambda) &= \frac{R\sin(L-\lambda)}{R\cos(L-\lambda)+\varrho}. \end{aligned} \right.$$

Diese Formeln gestatten eine etwas leichtere Rechnung wie die Formeln 95); aber so leichte Regeln wie vorher rücksichtlich der Art und Weise, wie man $\mathfrak{L}$ zu nehmen hat, lassen sich nicht geben. Ich will annehmen, dass man sich bei der Berechnung von $\mathfrak{L}$ der Formel

$$\sin(\mathfrak{L}-\lambda) = \frac{R\sin(L-\lambda)}{r\cos\mathfrak{B}}$$

bediene, welche offenbar die leichteste Rechnung gestattet, und will demzufolge setzen, dass Θ der, absolut genommen, kleinste, also $\frac{1}{2}\pi$ nicht übersteigende Werth von $\mathfrak{L}-\lambda$ sei, welcher der vorstehenden Gleichung genügt. Dann ist, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, bekanntlich

$$\mathfrak{L}-\lambda = 2n\pi+\Theta \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}-\lambda = (2n+1)\pi-\Theta$$

zu setzen. Ob man das Erste oder Zweite zu thun hat, entscheidet sich nach dem Zeichen von $\cos(\mathfrak{L}-\lambda)$, welcher Cosinus mit dem Zähler des Bruchs in der Formel

$$\cos(\mathfrak{L}-\lambda) = \frac{R\cos(L-\lambda)+\varrho}{r\cos\mathfrak{B}}$$

gleiches Vorzeichen hat, so dass also das Zeichen dieses Cosinus immer leicht beurtheilt werden kann; ist nun der Zähler dieses Bruchs positiv, so muss man

$$\mathfrak{L}-\lambda = 2n\pi+\Theta$$

setzen, weil für

$$\mathfrak{L}-\lambda = (2n+1)\pi-\Theta$$

der Cosinus von $\mathfrak{L}-\lambda$ offenbar negativ sein würde; ist dagegen der Zähler des obigen Bruchs negativ, so muss man

$$\mathfrak{L}-\lambda = (2n+1)\pi-\Theta$$

setzen, weil für

$$\mathfrak{L}-\lambda=2n\pi+\Theta$$

der Cosinus von $\mathfrak{L}-\lambda$ offenbar positiv sein würde. Wir wollen nun zuerst annehmen, dass sich hiernach

$$\mathfrak{L}-\lambda=2n\pi+\Theta$$

…en habe. Offenbar kann man, Θ mag positiv oder negativ … nicht

$$n=\pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm5,\ldots.$$

…l sonst der absolute Werth von $\mathfrak{L}-\lambda$ grösser als 2π … was nicht möglich ist. Wir können also nur

$$n=0,\ \pm1$$

…n. Ist nun Θ positiv, so kann man nicht $n=+1$ setzen, … sonst $\mathfrak{L}-\lambda=2n\pi+\Theta$ grösser als 2π wäre, und man kann … in diesem Falle bloss $n=0$ oder $n=-1$, folglich

$$\mathfrak{L}-\lambda=\Theta \text{ oder } \mathfrak{L}-\lambda=-2\pi+\Theta,$$

also

$$\mathfrak{L}=\lambda+\Theta \text{ oder } \mathfrak{L}=\lambda+\Theta-2\pi$$

setzen; jenachdem nun aber $\lambda+\Theta$ kleiner oder grösser als 2π ist, muss man offenbar

$$\mathfrak{L}=\lambda+\Theta \text{ oder } \mathfrak{L}=\lambda+\Theta-2\pi$$

setzen. Wenn ferner Θ negativ ist, so kann man nicht $n=-1$ setzen, weil sonst der absolute Werth von $\mathfrak{L}-\lambda=-2\pi+\Theta$ grösser als 2π wäre, und man kann also bloss $n=0$ oder $n=+1$, folglich

$$\mathfrak{L}-\lambda=\Theta \text{ oder } \mathfrak{L}-\lambda=2\pi+\Theta,$$

also

$$\mathfrak{L}=\lambda+\Theta \text{ oder } \mathfrak{L}=\lambda+\Theta+2\pi$$

setzen; jenachdem nun aber $\lambda+\Theta$ positiv oder negativ ist, muss man offenbar

$$\mathfrak{L}=\lambda+\Theta \text{ oder } \mathfrak{L}=\lambda+\Theta+2\pi$$

setzen. Ferner wollen wir annehmen, dass sich nach dem Obigen

$$\mathfrak{L}-\lambda=(2n+1)\pi-\Theta$$

ergeben habe. Offenbar kann man, Θ mag positiv oder negativ sein, nicht

$$n = +1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5, \ldots$$

setzen, weil sonst der absolute Werth von $\mathfrak{L} - \lambda$ offenbar grösser als 2π sein würde, was nicht möglich ist. Man kann also nur

$$n = 0,\ -1,$$

also

$$\mathfrak{L} - \lambda = \pi - \Theta \text{ oder } \mathfrak{L} - \lambda = -\pi - \Theta,$$

folglich

$$\mathfrak{L} = \lambda - \Theta + \pi \text{ oder } \mathfrak{L} = \lambda - \Theta - \pi$$

setzen. Ist nun $\lambda - \Theta$ positiv, so muss man

$$\mathfrak{L} = \lambda - \Theta + \pi \text{ oder } \mathfrak{L} = \lambda - \Theta - \pi$$

setzen, jenachdem $\lambda - \Theta$ kleiner oder grösser als π ist; ist dagegen $\lambda - \Theta$ negativ, so kann man nur

$$\mathfrak{L} = \lambda - \Theta + \pi$$

setzen. Die vorhergehenden Regeln sind allerdings völlig bestimmt, und lassen eine Zweideutigkeit, wie man $\mathfrak{L}$ zu nehmen hat, nicht zu; aber an Einfachheit stehen sie den oben im ersten Falle gegebenen Regeln offenbar nach.

Noch leitet man aus den Gleichungen 93) leicht die folgenden Gleichungen ab:

$$97) \ldots \begin{cases} r\cos(\mathfrak{L} - L)\cos\mathfrak{B} = \varrho\cos(\lambda - L) + R, \\ r\sin(\mathfrak{L} - L)\cos\mathfrak{B} = \varrho\sin(\lambda - L), \\ r\sin\mathfrak{B} = \varrho\tang\beta; \end{cases}$$

aus denen sich die nachstehenden Formeln:

$$98) \ldots \begin{cases} \sin\mathfrak{B} = \dfrac{\varrho}{r}\tang\beta, \\[2ex] \sin(\mathfrak{L} - L) = \dfrac{\varrho\sin(\lambda - L)}{r\cos\mathfrak{B}}, \\[2ex] \cos(\mathfrak{L} - L) = \dfrac{\varrho\cos(\lambda - L) + R}{r\cos\mathfrak{B}}, \\[2ex] \tang(\mathfrak{L} - L) = \dfrac{\varrho\sin(\lambda - L)}{\varrho\cos(\lambda - L) + R} \end{cases}$$

ergeben, bei deren Anwendung man, wie $\mathfrak{L}$ zu nehmen ist, ganz nach ähnlichen Regeln wie vorher zu beurtheilen hat, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Nach den vorhergehenden Formeln kann man für alle drei
en die heliocentrischen Längen und Breiten

$$\mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{B}_1;\ \mathfrak{L}_2,\ \mathfrak{B}_2;\ \mathfrak{L}_3,\ \mathfrak{B}_3$$

des Weltkörpers, um dessen Bahnbestimmung es sich handelt, berechnen.

Wenn

L_1, L_2, L_3		$\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$
wachsen	und respective	wachsen
abnehmen		abnehmen

t der Weltkörper rechtläufig; wenn dagegen

L_1, L_2, L_3		$\mathfrak{L}_1; \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$
wachsen	und respective	abnehmen
abnehmen		wachsen

so ist der Weltkörper rückläufig.

Wir wollen nun durch die Sonne als Anfang ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $x''y''z''$ legen; die Ebene der $x''y''$ sei die Ebene der Ekliptik, und der positive Theil der Axe der x'' sei nach dem aufsteigenden Knoten unsers Weltkörpers hin gerichtet; der positive Theil der Axe der y'' werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x'' durch den rechten Winkel $(x''y'')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y'' zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher hin die Längen gezählt werden; der positive Theil der Axe der z'' soll mit dem positiven Theile der Axe der z zusammenfallen. Bezeichnet dann Ω die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens unsers Weltkörpers, so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$x = x''\cos\Omega - y''\sin\Omega,$$
$$y = x''\sin\Omega + y''\cos\Omega,$$
$$z = z'';$$

also nach 92):

$$r\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} = x''\cos\Omega - y''\sin\Omega,$$
$$r\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B} = x''\sin\Omega + y''\cos\Omega,$$
$$r\sin\mathfrak{B} = z'';$$

woraus sich, wenn man x'' eliminirt, sogleich die folgenden Gleichungen ergeben:

$$r\sin(\mathfrak{L}-\Omega)\cos\mathfrak{B}=y'',$$

$$r\sin\mathfrak{B}=z''.$$

Bezeichnet nun aber i *) den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel der Ebene der Bahn unsers Weltkörpers gegen die Ebene der Ekliptik, die sogenannte Neigung der Bahn; so erhellet leicht, dass in völliger Allgemeinheit

$$z''=\pm y''\operatorname{tang} i, \quad \text{also} \quad y''=\pm z''\cot i$$

ist, wenn man hier und im Folgenden immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist. Also ist nach dem Obigen:

$$y''=\pm r\sin\mathfrak{B}\cot i,$$

und folglich

$$\sin(\mathfrak{L}-\Omega)\cos\mathfrak{B}=\pm\sin\mathfrak{B}\cot i$$

oder

$$\operatorname{tang} i\sin(\mathfrak{L}-\Omega)=\pm\operatorname{tang}\mathfrak{B};$$

und nehmen wir nun die der ersten und dritten Beobachtung entsprechenden heliocentrischen Längen und Breiten $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{B}_3$; so haben wir zur Bestimmung von Ω und i die folgenden Gleichungen:

$$99) \quad . \quad . \quad \begin{cases} \operatorname{tang} i\sin(\mathfrak{L}_1-\Omega)=\pm\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1, \\ \operatorname{tang} i\sin(\mathfrak{L}_3-\Omega)=\pm\operatorname{tang}\mathfrak{B}_3; \end{cases}$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Durch Division ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{\sin(\mathfrak{L}_1-\Omega)}{\sin(\mathfrak{L}_3-\Omega)}=\frac{\sin\mathfrak{L}_1-\cos\mathfrak{L}_1\operatorname{tang}\Omega}{\sin\mathfrak{L}_3-\cos\mathfrak{L}_3\operatorname{tang}\Omega}=\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_3},$$

folglich:

$$100) \quad . \quad . \quad \operatorname{tang}\Omega=\frac{\sin\mathfrak{L}_1\operatorname{tang}\mathfrak{B}_3-\sin\mathfrak{L}_3\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}{\cos\mathfrak{L}_1\operatorname{tang}\mathfrak{B}_3-\cos\mathfrak{L}_3\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}.$$

Diese Formel liefert für das zwischen 0 und 360° liegende Ω zwei um 180° von einander verschiedene Werthe; welchen die-

*) Nicht völlig übereinstimmend mit der dem i früher beigelegten Bedeutung.

ser beiden Werthe man zu nehmen hat, kann auf folgende Art entschieden werden.

Zur Berechnung von i hat man nach 99) die folgenden Formeln:

$$101) \quad . \quad . \quad \tan i = \pm \frac{\tan \mathfrak{B}_1}{\sin(\mathfrak{L}_1 - \Omega)} = \pm \frac{\tan \mathfrak{B}_3}{\sin(\mathfrak{L}_3 - \Omega)},$$

immer die oberen oder unteren Zeichen genommen, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist. Nun erhellet aber leicht, dass in beiden Fällen die zwei obigen Werthe der heliocentrischen Länge des aufsteigenden Knotens für $\tan i$ Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern. Weil aber i positiv und nicht grösser als 90^0 ist, so ist $\tan i$ stets positiv, und man muss also für die Länge des aufsteigenden Knotens immer denjenigen der beiden obigen Werthe nehmen, welcher $\tan i$ positiv liefert, mag nun der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig sein. Hiernach können also Ω und i immer ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden.

Aus der Gleichung

$$\frac{\sin(\mathfrak{L}_1 - \Omega)}{\sin(\mathfrak{L}_3 - \Omega)} = \frac{\tan \mathfrak{B}_1}{\tan \mathfrak{B}_3}$$

erhält man nach einem bekannten Verfahren auch leicht die Formel

$$102) \quad \tan\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3) - \Omega\} = \frac{\sin(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_3)}{\sin(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_3)} \tan \tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_3),$$

welche für das zwischen 0 und 360^0 liegende Ω wieder zwei um 180^0 verschiedene Werthe liefert, über die man ganz auf dieselbe Weise wie vorher entscheiden kann.

Wir wollen nun in der Ebene der Bahn durch die Sonne als Anfang ein rechtwinkliges Coordinatensystem der $x'''y'''$ legen, und wollen den positiven Theil der Axe der x''' mit dem positiven Theile der Axe der x'' zusammenfallen lassen, den positiven Theil der Axe der y''' aber so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x''' durch den rechten Winkel $(x'''y''')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y''' zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher sich der Weltkörper in seiner Bahn bewegt. Bezeichnen wir dann zu irgend einer Zeit das sogenannte Argument der Breite des Weltkörpers durch V, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$x''' = r \cos V, \quad y''' = r \sin V.$$

Eben so leicht erhellet aber auch die Richtigkeit der Gleichungen:

$$x'' = x''', \quad y'' = \pm y''' \cos i,$$

wenn man wie früher das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist. Also ist:

$$x'' = r \cos \mathrm{V}, \quad y'' = \pm r \sin \mathrm{V} \cos i;$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$r \cos \mathfrak{L} \cos \mathfrak{B} = x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega,$$

$$r \sin \mathfrak{L} \cos \mathfrak{B} = x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega$$

ist:

$$\cos \mathfrak{L} \cos \mathfrak{B} = \cos \Omega \cos \mathrm{V} \mp \cos i \sin \Omega \sin \mathrm{V},$$

$$\sin \mathfrak{L} \cos \mathfrak{B} = \sin \Omega \cos \mathrm{V} \pm \cos i \cos \Omega \sin \mathrm{V}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\cos \mathrm{V} = \cos(\mathfrak{L} - \Omega) \cos \mathfrak{B},$$

$$\pm \cos i \sin \mathrm{V} = \sin(\mathfrak{L} - \Omega) \cos \mathfrak{B};$$

also:

$$103) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sin \mathrm{V} = \pm \dfrac{\sin(\mathfrak{L} - \Omega) \cos \mathfrak{B}}{\cos i}, \\ \cos \mathrm{V} = \cos(\mathfrak{L} - \Omega) \cos \mathfrak{B}, \\ \operatorname{tang} \mathrm{V} = \pm \dfrac{\operatorname{tang}(\mathfrak{L} - \Omega)}{\cos i}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln das Argument der Breite sich ohne alle Zweideutigkeit bestimmen lässt, weil man aus den Vorzeichen seines Sinus und Cosinus immer den Quadranten bestimmen kann, in welchem es sich endigen muss.

Unter der Länge unsers Weltkörpers in der Bahn, welche wir durch L bezeichnen wollen, versteht man bekanntlich die Grösse

$$104) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{L} = \Omega + \mathrm{V},$$

und kann dieselbe also aus der heliocentrischen Länge des aufsteigenden Knotens und dem Argumente der Breite immer leicht durch eine blosse Addition finden.

Durch jede einer gewissen Zeit entsprechende wahre Anomalie v ist offenbar die Lage des Periheliums in der Bahn bestimmt. Bezeichnen wir aber die im Sinne der Bewegung des

...ers in seiner Bahn genommene anguläre Entfernung des ... vom aufsteigenden Knoten durch P, so ist offenbar

(105) . . . $P = V - v$ oder $P = V - v + 360^\circ$,

...chdem $V - v$ positiv oder negativ ist; also ist

(...6) . . . $v = V - P$ oder $v = V - P + 360^\circ$,

...chdem $V - P$ positiv oder negativ ist, und

...) . . . $V = v + P$ oder $V = v + P - 360^\circ$,

...chdem $v + P$ kleiner oder grösser als 360° ist.

§. 15.

Ich will nun noch zeigen, wie aus den gefundenen Elementen ... Bahn die geocentrische Länge und Breite des Weltkörpers ... die Zeit der zweiten Beobachtung berechnet werden kann, weil die Vergleichung dieser aus den Elementen berechneten geocentrischen Länge und Breite mit der entsprechenden beobachteten geocentrischen Länge und Breite das schärfste Kriterium für die bei der Bestimmung der Bahn erreichte Genauigkeit abgiebt.

Aus der bekannten Zeit des Durchgangs des Weltkörpers durch das Perihelium und der Zeit der zweiten Beobachtung findet man leicht die seit dem Durchgange durch das Perihelium bis zu dem Momente der zweiten Beobachtung verflossene Zeit, welche wir jetzt, wie schon früher in §. 12., durch t_2 bezeichnen wollen. Dann findet man bei elliptischen Bahnen durch Auflösung der aus §. 12. 87) bekannten transcendenten Gleichung

$$t_2 = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}(u_2 - e\sin u_2)$$

die excentrische Anomalie u_2, und hierauf mittelst der aus §. 12. 85) bekannten Formel

$$\tan g\tfrac{1}{2}v_2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\tan g\tfrac{1}{2}u_2$$

oder einer anderen der zu diesem Zweck dienenden bekannten Formeln die wahre Anomalie v_2; bei parabolischen Bahnen ergiebt sich die wahre Anomalie v_2 unmittelbar durch Auflösung der aus §. 12. 91) bekannten cubischen Gleichung

$$t_2 = \frac{(\tfrac{1}{2}p)^{\frac{3}{2}}}{2k}(\tan g\tfrac{1}{2}v_2 + \tfrac{1}{3}\tan g\tfrac{1}{2}v_2{}^3).$$

Bezeichnet nun P den bekannten Abstand des Periheliums vom aufsteigenden Knoten und V_2 das Argument der Breite des Weltkörpers zur Zeit der zweiten Beobachtung, so ist nach §. 14. 107) bekanntlich

$$V_2 = v_2 + P \quad \text{oder} \quad V_2 = v_2 + P - 360^0,$$

jenachdem $v_2 + P$ kleiner oder grösser als 360^0 ist.

Ist jetzt Ω die bekannte heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens, und i die gleichfalls bekannte Neigung der Bahn, so hat man zur Berechnung der heliocentrischen Länge $\mathfrak{L}_2$ und heliocentrischen Breite $\mathfrak{B}_2$ nach 103) die folgenden Formeln:

$$\sin V_2 = \pm \frac{\sin(\mathfrak{L}_2 - \Omega)\cos\mathfrak{B}_2}{\cos i},$$

$$\cos V_2 = \cos(\mathfrak{L}_2 - \Omega)\cos\mathfrak{B}_2,$$

$$\tang V_2 = \pm \frac{\tang(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}{\cos i};$$

in denen man die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen hat, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist. Aus der dritten dieser Gleichungen ergiebt sich zur Berechnung von $\mathfrak{L}_2$ die Formel

$$\tang(\mathfrak{L}_2 - \Omega) = \pm \cos i \tang V_2,$$

und aus den beiden ersten Gleichungen erhält man zur Berechnung von $\mathfrak{B}_2$ die Formeln

$$\cos\mathfrak{B}_2 = \pm \frac{\cos i \sin V_2}{\sin(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}, \quad \cos\mathfrak{B}_2 = \frac{\cos V_2}{\cos(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}.$$

Die Formel

$$\tang(\mathfrak{L}_2 - \Omega) = \pm \cos i \tang V_2$$

lässt bei der Bestimmung von $\mathfrak{L}_2$ eine Zweideutigkeit zu, über welche auf folgende Art entschieden werden kann. Ist nämlich überhaupt U ein dieser Gleichung genügender Werth von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$, so ist bekanntlich, wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\mathfrak{L}_2 - \Omega = U + n\pi,$$

also

$$\mathfrak{L}_2 = \Omega + U + n\pi.$$

Nun ist aber immer

$$0 < \mathfrak{L}_2 < 2\pi,$$

also

$$0 < \Omega + U + n\pi < 2\pi,$$

folglich

$$-(\Omega + U) < n\pi < 2\pi - (\Omega + U),$$

hieraus:

$$-\frac{\Omega + U}{\pi} < n < 2 - \frac{\Omega + U}{\pi}.$$

il nun

$$2 - \frac{\Omega + U}{\pi} - \left(-\frac{\Omega + U}{\pi}\right) = 2$$

ist, so liegen zwischen

$$-\frac{\Omega + U}{\pi} \text{ und } 2 - \frac{\Omega + U}{\pi}$$

immer nur zwei ganze um die Einheit von einander verschiedene Werthe von n, welche mittelst der Bedingung

$$-\frac{\Omega + U}{\pi} < n < 2 - \frac{\Omega + U}{\pi}$$

immer leicht bestimmt werden können, worauf sich dann mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{L}_2 - \Omega = U + n\pi$$

zwei um π von einander verschiedene Werthe von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$ ergeben, und es sich jetzt also nur noch frägt, welchen dieser beiden Werthe von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$ man zu nehmen hat. Es ist aber klar, dass der eine dieser beiden Werthe für

$$\cos \mathfrak{B}_2 = \pm \frac{\cos i \sin V_2}{\sin(\mathfrak{L}_2 - \Omega)} = \frac{\cos V_2}{\cos(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}$$

immer einen positiven, der andere einen negativen Werth liefert; und da nun $\cos \mathfrak{B}_2$, weil der absolute Werth von $\mathfrak{B}_2$ nie 90^0 übersteigt, stets positiv ist, so kann nie ein Zweifel bleiben, welchen der beiden aus dem Obigen sich ergebenden Werthe von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$ man zu nehmen hat, worauf sich dann natürlich auch $\mathfrak{L}_2$ leicht ohne alle Zweideutigkeit ergiebt, indem man Ω zu diesem Werthe von $\mathfrak{L}_2 - \Omega$ addirt. Hat man aber auf diese Weise $\mathfrak{L}_2$ bestimmt, so ist es nicht zweckmässig, die heliocentrische Breite $\mathfrak{B}_2$ mittelst einer der Formeln

$$\cos\mathfrak{B}_2 = \pm\frac{\cos i \sin V_2}{\sin(\mathfrak{L}_2 - \Omega)},\quad \cos\mathfrak{B}_2 = \frac{\cos V_2}{\cos(\mathfrak{L}_2 - \Omega)}$$

zu berechnen, weil diese Formeln es unentschieden lassen, ob $\mathfrak{B}_2$, welches, absolut genommen, 90^0 nicht übersteigt, positiv oder negativ ist. Nach 99) hat man aber zur Bestimmung von $\mathfrak{B}_2$ auch die Formel

$$\operatorname{tang}\mathfrak{B}_2 = \pm \operatorname{tang} i \sin(\mathfrak{L}_2 - \Omega),$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem der Weltkörper rechtläufig oder rückläufig ist, welche, weil

$$-90^0 < \mathfrak{B}_2 < +90^0$$

ist, nie eine Zweideutigkeit lässt, wie man $\mathfrak{B}_2$ zu nehmen hat.

Den Vector r_2 erhält man bei der elliptischen Bahn mittelst der Formel

$$r_2 = a(1 - e\cos u_2),$$

bei der parabolischen Bahn mittelst der Formel

$$r = \frac{p}{4\cos\frac{1}{2}v_2{}^2};$$

und sind nun wie früher x_2, y_2, z_2 die heliocentrischen Coordinaten des Weltkörpers zur Zeit der zweiten Beobachtung, so ist

$$x_2 = r_2\cos\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2,$$

$$y_2 = r_2\sin\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2,$$

$$z_2 = r_2\sin\mathfrak{B}_2.$$

Die heliocentrischen Coordinaten der Erde zu derselben Zeit sind

$$X_2 = R_2\cos L_2,\quad Y_2 = R_2\sin L_2.$$

Hieraus findet man die geocentrischen Coordinaten x_2', y_2', z_2' des Weltkörpers zur Zeit der zweiten Beobachtung mittelst der Formeln:

$$x_2' = x_2 - X_2,\quad y_2' = y_2 - Y_2,\quad z_2' = z_2 - Z_2.$$

Bezeichnen aber wie früher λ_2; β_2 die geocentrische Länge und Breite des Weltkörpers und ϱ_2 seine curtirte Entfernung von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung, so ist nach 7):

$$x_2' = \varrho_2\cos\lambda_2,\quad y_2' = \varrho_2\sin\lambda_2,\quad z_2' = \varrho_2\operatorname{tang}\beta_2;$$

woraus sich

$$\tang\lambda_2=\frac{y_2'}{x_2'},\quad \varrho_2=\frac{x_2'}{\cos\lambda_2}=\frac{y_2'}{\sin\lambda_2}$$

ht. Die erste dieser Formeln liefert für das zwischen 0 und
liegende λ_2 zwei um 180° verschiedene Werthe; für den
dieser beiden Werthe ist aber ϱ_2 offenbar immer positiv,
n anderen negativ; und da nun ϱ_2 seiner Natur nach nur
iv sein kann, so muss man für λ_2 immer den der beiden in
stehenden Werthe nehmen, welcher ϱ_2 positiv liefert. Uebri-
aber wird auf der Stelle auch die Richtigkeit der folgenden
ln erhellen:

Wenn

x_2'	y_2'		
positiv	positiv	ist, so ist	$0 < \lambda < 90^0$
negativ	positiv		$90^0 < \lambda < 180^0$
negativ	negativ		$180^0 < \lambda < 270^0$
positiv	negativ		$270^0 < \lambda < 360^0$.

Die Formeln

$$\tang\beta_2=\frac{z_2'}{\varrho_2}=\frac{z_2'}{x_2'}\cos\lambda_2=\frac{z_2'}{y_2'}\sin\lambda_2$$

liefern das zwischen -90^0 und $+90^0$ liegende β_2 immer ohne alle Zweideutigkeit.

Bezeichnet $\mathfrak{R}_2$ die Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung, so ist

$$\varrho_2=\mathfrak{R}_2\cos\beta_2,\quad \text{also}\quad \mathfrak{R}_2=\frac{\varrho_2}{\cos\beta_2};$$

mittelst welcher Formel auch $\mathfrak{R}_2$ leicht gefunden werden kann.

A n h a n g.

Wenn ich auch im Vorhergehenden alle Formeln so weit entwickelt habe, dass über die Art der Anwendung derselben und den Erfolg dieser Anwendung nach meiner Meinung kein Zweifel obwalten kann, so möchte es doch gut und zweckmässig sein, die Auflösung der Gleichung 57) oder 58), auf die bekanntlich hier zunächst Alles ankommt, durch ein Beispiel etwas näher zu erläutern, und daran einige Bemerkungen, namentlich über die verschiedenen reellen Wurzeln, welche diese Gleichung haben kann, zu knüpfen, ohne eine vollständige Berechnung dieses Beispiels mitzutheilen, die nach den obigen vollständig ausgeführten analy-

tischen Entwickelungen in der That als überflüssig erscheint. Ich wähle zu einem solchen Beispiel die folgenden Beobachtungen der Vesta *):

$$\lambda_1 = 174^\circ.\ 7'.\ 33'',2 \qquad L_1 = 213^\circ.\ 42'.\ 55'',5$$
$$\lambda_2 = 173.\ 44.\ 21,3 \qquad L_2 = 218.\ 33.\ 22,4$$
$$\lambda_3 = 173.\ 33.\ 33,0 \qquad L_3 = 223.\ 23.\ 15,5$$

$$\beta_1 = +11^\circ.\ 37'.\ 24'',1 \qquad \log R_1 = 0,0028540$$
$$\beta_2 = \ 11.\ 19.\ 42,6 \qquad \log R_2 = 0,0034240$$
$$\beta_3 = \ 11.\ 0.\ 39,2 \qquad \log R_3 = 0,0039670$$

$$\tau_1 = 4,9855208$$
$$\tau_2 = 9,9705405 \qquad \log . k^2 = 0,4711629 - 4$$
$$\tau_3 = 4,9850197$$

Die Zeiten der drei Beobachtungen waren:

1807. 24. April.	$9^u.\ 5^m.\ 16^s,5$	Mittlere Zeit zu Paris.
29. April.	8. 43. 42,2	
4. Mai.	8. 22. 51,2	

Man berechne nun zuerst die folgenden Logarithmen:

$$\log \tau_1 = 0,6977105$$
$$\log \tau_2 = 0,9987187$$
$$\log \tau_3 = 0,6976669$$

$$\log . \tau_1^2 = 1,3954210$$
$$\log . \tau_2^2 = 1,9974374$$
$$\log . \tau_3^2 = 1,3953338$$

$$\log . \tau_1^3 = 2,0931315$$
$$\log . \tau_2^3 = 2,9961561$$
$$\log . \tau_3^3 = 2,0930007$$

$$\tau_1 = 4,9855208$$
$$\tau_3 = 4,9850197$$
$$\tau_1 - \tau_3 = 0,0005011$$
$$\log(\tau_1 - \tau_3) = 0,6999244 - 4$$

*) M. s. Theoretische und praktische Astronomie von J. J. Littrow. Thl. II. Wien. 1821. S. 139.

$$\log \operatorname{tang} \beta_1 = 0{,}3132247-1$$
$$\log \operatorname{tang} \beta_2 = 0{,}3017612-1$$
$$\log \operatorname{tang} \beta_3 = 0{,}2890927-1$$

$$\log \cos \beta_2 = 0{,}9914552-1$$
$$\log . \cos \beta_2{}^2 = 0{,}9829104-1$$

$$\log \sin(\lambda_2-\lambda_3) = 0{,}4973501-3$$
$$\log \sin(\lambda_3-\lambda_1) = 0{,}9952406-3_n$$
$$\log \sin(\lambda_1-\lambda_2) = 0{,}8291796-3$$

Hieraus erhält man:

$$\log . \sin(\lambda_2-\lambda_3) \operatorname{tang} \beta_1 = 0{,}8105748-4$$
$$\log . \sin(\lambda_3-\lambda_1) \operatorname{tang} \beta_2 = 0{,}2970018-3_n$$
$$\log . \sin(\lambda_1-\lambda_2) \operatorname{tang} \beta_3 = 0{,}1182723-3$$

folglich:

$$\sin(\lambda_2-\lambda_3) \operatorname{tang} \beta_1 = +0{,}0006465094$$
$$\sin(\lambda_3-\lambda_1) \operatorname{tang} \beta_2 = -0{,}0019815352$$
$$\sin(\lambda_1-\lambda_2) \operatorname{tang} \beta_3 = +0{,}0013130229,$$

wobei ich bemerke, dass man, was wohl zu beachten ist, die Rechnung jederzeit so genau führen muss, wie es der Gebrauch siebenstelliger Tafeln gestattet. Bei diesen Rechnungen habe ich die treffliche neueste, d. h. vierzigste Auflage des Vega'schen Handbuchs *), durch deren Herausgabe Herr Doctor Bremiker in Berlin sich ein grosses Verdienst erworben hat, benutzt.

Aus den obigen Zahlen findet man die Grösse $\overline{\omega}$, auf deren Bestimmung man jederzeit besondere Sorgfalt verwenden muss, durch die folgende Rechnung:

$$+0{,}0006465094$$
$$-0{,}0019815352$$
$$\overline{-0{,}0013350258}$$
$$+0{,}0013130229$$
$$\overline{-0{,}0000220029}$$
$$\overline{\omega} = 0{,}0000220029$$
$$\log \overline{\omega} = 0{,}3424799-5.$$

---

*) Berlin. 1856. Weidmannsche Buchhandlung.

Ferner berechnet man folgende Logarithmen:

$$\log\sin(L_1-\lambda_1) = 0{,}8043324-1$$
$$\log\sin(L_1-\lambda_2) = 0{,}8078521-1$$
$$\log\sin(L_1-\lambda_3) = 0{,}8094751-1$$

$$\log\sin(L_2-\lambda_1) = 0{,}8451238-1$$
$$\log\sin(L_2-\lambda_2) = 0{,}8480932-1$$
$$\log\sin(L_2-\lambda_3) = 0{,}8494626-1$$

$$\log\sin(L_3-\lambda_1) = 0{,}8794966-1$$
$$\log\sin(L_3-\lambda_2) = 0{,}8820036-1$$
$$\log\sin(L_3-\lambda_3) = 0{,}8831597-1$$

$$\log\cos(L_2-\lambda_2) = 0{,}8508679-1.$$

Hieraus und aus den oben schon berechneten Logarithmen der Tangenten von β_1, β_2, β_3 erhält man:

$$A_1 = 0{,}00418220 \qquad \log A_1 = 0{,}6214048-3$$
$$A_2 = 0{,}00450547 \qquad \log A_2 = 0{,}6537402-3$$
$$A_3 = 0{,}00479617 \qquad \log A_3 = 0{,}6808946-3$$

$$B_1 = -0{,}00864674 \qquad \log B_1 = 0{,}9368524-3_n$$
$$B_2 = -0{,}00922876 \qquad \log B_2 = 0{,}9651433-3_n$$
$$B_3 = -0{,}00974417 \qquad \log B_3 = 0{,}9887449-3_n$$

$$C_1 = 0{,}00448155 \qquad \log C_1 = 0{,}6514283-3$$
$$C_2 = 0{,}00473905 \qquad \log C_2 = 0{,}6756913-3$$
$$C_3 = 0{,}00496238 \qquad \log C_3 = 0{,}6956900-3.$$

Ferner findet man:

$$\Delta_2 = 134^0.\ 4'.\ 13'',4$$
$$\log\cos\Delta_2 = 0{,}8423231-1_n$$
$$\log\sin\Delta_2 = 0{,}8564183-1$$
$$\log.\sin\Delta_2^3 = 0{,}5692549-1$$
$$\log\operatorname{tang}\Delta_2 = 0{,}0140952_n$$
$$\log.\cos\beta_2\cos\Delta_2 = 0{,}8337783-1_n$$
$$\cos\Delta_2 = -0{,}69554159.$$

Hieraus erhält man weiter:

$$
\begin{aligned}
A &= -0{,}043392720\\
B &= -0{,}092744043\\
&\ +0{,}049351323\\
C &= -0{,}049020618\\
&\ +0{,}000330705\\
D &= -0{,}00015079986\\
G &= 0{,}000481505 \qquad \log G = 0{,}6826008-4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A' &= -1{,}0785442\\
B' &= -9{,}2198404\\
&\ +8{,}1412962\\
C' &= -1{,}2181832\\
&\ +6{,}9231130\\
D' &= -0{,}014991266\\
G' &= 6{,}9381043 \qquad \log G' = 0{,}8412409
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log G_1 &= 0{,}1924961-4\\
\log G_1' &= 0{,}1899335-2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\log F = 3{,}8865153 & \log F = 3{,}8865153\\
\log G = 0{,}6826008-4 & \log G_1 = 0{,}1924961-4\\
\log G'' = 0{,}5691161 & \log G_1'' = 0{,}0790114.
\end{array}
$$

Daher haben wir jetzt die folgenden Logarithmen:

$$
\begin{aligned}
\log G'' &= 0{,}5691161\\
\log G' &= 0{,}8412409\\
\log G_1'' &= 0{,}0790114\\
\log G_1' &= 0{,}1899335-2,
\end{aligned}
$$

welche zur Berechnung der Werthe der Function

$$(G''-G'u^3)u \mp (G_1''-G_1'u^3)\sqrt{(1-u)(1+u)}$$

der Gleichung 57) hinreichen, wenn man in dieselbe beliebige Werthe der Grösse u einführt.

Setzt man nun für u nach und nach die Werthe

0, 0; 0, 1; 0, 2; u. s. w. 0, 9; 1, 0;

so erhält man für die entsprechenden Werthe der obigen Function, jenachdem man in derselben das obere oder das untere Zeichen nimmt, das folgende Tableau:

Oberes Zeichen.		Unteres Zeichen.	
u	Function.	u	Function.
0,0	−1,1995307	0,0	+1,1995307
0,1	−0,8234167	0,1	+1,5635887
0,2	−0,4447152	0,2	+1,9056328
0,3	−0,0877397	0,3	+1,2000215
0,4	+0,2070240	0,4	+2,4039840
0,5	+0,3831193	0,5	+2,4574153
0,6	+0,3685514	0,6	+2,2824490
0,7	+0,0767771	0,7	+1,7824633
0,8	−0,5905709	0,8	+0,8393517
0,9	−1,7330146	0,9	−0,6971294
1,0	−3,2303915	1,0	−3,2303915

Hieraus sieht man, dass die Gleichung

$$(G'' - G'u^3)u \mp (G_1'' - G_1'u^3)\sqrt{(1-u)(1+u)} = 0$$

zwischen 0 und 1 drei reelle Wurzeln hat, welche zwischen 0,3 und 0,4; zwischen 0,7 und 0,8; zwischen 0,8 und 0,9 liegen. Wie man sich diesen Wurzeln ferner nähern und dieselben mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit finden kann, ist bekannt genug; wenn nämlich, um nur bei der einfachsten Methode stehen zu bleiben, überhaupt a und b zwei Näherungswerthe einer Wurzel der Gleichung $f(u)=0$ sind, und den Werthen a und b von u die Werthe A und B der Function $f(u)$ entsprechen, so dass $f(a)=A$ und $f(b)=B$ ist, so findet man einen neuen Näherungswerth u der Wurzel unserer Gleichung mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke:

$$u = a - \frac{a-b}{A-B}A = b - \frac{a-b}{A-B}B.$$

Nach der Formel 55) liefert das untere Zeichen für v einen negativen Werth, und da nun $\sin\Delta_2$ positiv und $\cos\Delta_2$ negativ ist, so liefert die zweite Formel in 60) in diesem Falle für $\mathfrak{R}_2$ offenbar einen negativen Werth, was unstatthaft ist, und uns daher berechtigt, die zwischen 0,8 und 0,9 liegende Wurzel von unseren ferneren Betrachtungen auszuschliessen, und uns von jetzt an bloss mit den zwischen 0,3 und 0,4 und zwischen 0,7 und 0,8 liegenden Wurzeln zu beschäftigen.

Wenn man aber zuvörderst die zwischen 0,7 und 0,8 liegende

Wurzel durch successive Annäherung genauer berechnet, und daraus dann mittelst der zu diesem Zweck im Obigen entwickelten Formeln die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{R}_2$, der Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung, und von ϱ_2, der curtirten Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung, ableitet; so findet man, dass diese Werthe sehr klein ausfallen. Nun ist aber klar, dass die beiden Gleichungen unserer Aufgabe, nämlich die Gleichungen:

$$\varrho_2 = \frac{1}{\overline{\omega}} \{ B_1 R_1 \frac{f_1}{f_2} + B_3 R_3 \frac{f_3}{f_2} - B_2 R_2 \},$$

$$r_2{}^2 = R_2{}^2 + 2\varrho_2 R_2 \cos(L_2 - \lambda_2) + \varrho_2{}^2 \sec\beta_2{}^2,$$

die Auflösung $\varrho_2 = 0$ zulassen. Denn für diesen Werth von ϱ_2 wird vermöge der zweiten Gleichung $r_2 = R_2$, und die erste geht dann offenbar in die Gleichung

$$B_1 R_1 \frac{F_1}{F_2} + B_3 R_3 \frac{F_3}{F_2} - B_2 R_2 = 0$$

oder

$$B_1 R_1 F_1 - B_2 R_2 F_2 + B_3 R_3 F_3 = 0$$

über, was nach 14) in der That völlig richtig ist. Wenn nun auch die zweite der beiden, nach Ausschliessung der dritten, noch zulässigen Auflösungen nicht genau $\varrho_2 = 0$ liefert, so liefert sie doch ϱ_2 sehr klein, was darin seine vollständige Erklärung findet und ganz der Natur der Sache gemäss ist, weil die obige Auflösung für jetzt eine blosse Näherung ist, und also auch nur näherungsweise richtige Resultate liefern kann. Jedenfalls wird aber die zweite der beiden obigen noch zulässigen Auflösungen der genauen Auflösung $\mathfrak{R}_2 = 0$ und $\varrho_2 = 0$ entsprechen, was offenbar auch unstatthaft ist, so dass also hiernach bloss noch die erste der beiden in Rede stehenden Auflösungen, nämlich die zwischen 0,3 und 0,4 liegende Wurzel, als zulässig übrig bleibt.

Setzen wir

$$f(u) = (G'' - G'u^3)u - (G_1{}'' - G_1{}'u^3)\sqrt{(1-u)(1+u)},$$

so ist für

$$u = 0{,}3269852 \quad \text{und} \quad u = 0{,}3269853$$

respective

$$f(u) = -0{,}0000004 \quad \text{und} \quad f(u) = +0{,}0000003;$$

also liegt der richtige Werth von u zwischen

$$0{,}3269852 \quad \text{und} \quad 0{,}3269853$$

aber etwas näher bei dem letzteren Werthe, so dass wir

$$u = 0{,}3269853$$

zu setzen haben.

Die weitere Fortsetzung der Rechnung hat nun nicht die geringste Schwierigkeit, da dieselbe ganz auf vollständig entwickelten Formeln beruhet. Ich will jedoch noch kurz anführen, was sich mir bei derselben ergeben hat, bemerke aber, dass die Rechnung nicht mit der grössten Sorgfalt geführt worden ist, da es ja nur auf ein Beispiel zur Erläuterung des Verfahrens ankam.

Mittelst der Formel 55), in derselben das obere Zeichen genommen, habe ich zuerst gefunden:

$$\log v = 0{,}4609172;$$

dann ergaben sich mittelst der Formeln 60):

$$\log r_2 = 0{,}3453141$$
$$\log \mathfrak{R}_2 = 0{,}1436100$$
$$\log \varrho_2 = 0{,}1350652$$

und nach den Formeln 47):

$$\log f_1 = 0{,}6976616$$
$$\log f_2 = 0{,}9985227$$
$$\log f_3 = 0{,}6976179;$$

dann nach 61):

$$\log \varrho_1 = 0{,}1238773$$
$$\log \varrho_3 = 0{,}1474671;$$

so dass wir also haben:

$$\log \varrho_1 = 0{,}1238773$$
$$\log \varrho_2 = 0{,}1350652$$
$$\log \varrho_3 = 0{,}1474671.$$

Dann ergaben sich mittelst der Formeln 63):

$$x_1 = -2{,}1603835 \qquad \log x_1 = 0{,}3345309_n$$
$$y_1 = -0{,}4226039 \qquad \log y_1 = 0{,}6259335-1_n$$
$$z_1 = +0{,}2735911 \qquad \log z_1 = 0{,}4371020-1$$

$$x_2 = -2{,}1448351 \qquad \log x_2 = 0{,}3313939_n$$
$$y_2 = -0{,}4793810 \qquad \log y_2 = 0{,}6806808-1_n$$
$$z_2 = +0{,}2734175 \qquad \log z_2 = 0{,}4368264-1$$

$$x_3 = -2{,}1288614 \qquad \log x_3 = 0{,}3281474_n$$
$$y_3 = -0{,}5357017 \qquad \log y_3 = 0{,}7289230-1_n$$
$$z_3 = +0{,}2732497 \qquad \log z_3 = 0{,}4365598-1.$$

Dann findet man mittelst der Formeln

$$r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \text{ und } r_3=\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}$$

ferner:

$$\log r_1=0,3460137$$
$$\log r_3=0,3448184$$

und hat also:

$$\log r_1=0,3460137$$
$$\log r_2=0,3453141$$
$$\log r_3=0,3448184.$$

Mittelst der zweiten der Formeln 68) ergiebt sich aber:

$$\log A=0,6393653-1$$

und mittelst der ersten der Formeln 81*):

$$\log\frac{\partial r_2}{\partial t_2}=0,7084639-4_n.$$

Nun ergiebt sich nach 82):

$$v_2=308^0.\ 35'.\ 16'',92$$

und nach der ersten der Formeln 83):

$$\log B=0,3995523-2.$$

Also ist:

$$A=0,43587838,$$
$$B=0,02509298,$$

und, weil $A>B$ ist, ist folglich die Bahn eine Ellipse.

Mittelst der bekannten Formeln

$$a=\frac{A}{(A-B)(A+B)},$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{(A-B)(A+B)}},$$

$$e=\frac{B}{A},\quad p=\frac{2}{A}$$

erhält man:

$$\log a=0,3620763$$
$$\log b=0,3613555$$
$$\log e=0,7601870-2$$
$$\log p=0,6616647.$$

Ich habe auch noch die folgenden Grössen berechnet:

$$\log \frac{k^2\tau_1\tau_2\tau_3(\tau_1-\tau_3)}{2r_2{}^4}\cdot\frac{\partial r_2}{\partial t_2}=0{,}5913609-10_n$$

$$\log \frac{k^4\tau_1{}^2\tau_2\tau_3{}^2}{12r_2{}^6}=0{,}5807335-7$$

$$\log \frac{\partial^2 r_2}{\partial t_2{}^2}=0{,}2357089-6$$

die letzte Grösse nach der ersten der Formeln 80). Man sieht hieraus, wie klein die Grössen sind, von denen hier die Logarithmen angegeben worden sind, was wir hier namentlich mit Rücksicht auf die Gleichungen 45) bemerken.

Die weitere Fortsetzung dieser Rechnungen nach den oben entwickelten Formeln würde für den Zweck, den wir hier durch dieselben zu erreichen beabsichtigen, überflüssig sein und zu viel Raum in Anspruch nehmen.

Drittes Kapitel.

Ueber die scheinbare Bahn eines sich um die Sonne bewegenden Weltkörpers.

§. 1.

In Bezug auf ein beliebiges durch die Sonne als Anfang gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz haben wir bekanntlich für unseren Weltkörper, dessen Coordinaten in diesem Systeme zur Zeit t durch x, y, z bezeichnet werden mögen, die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad\ldots\ldots\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{k^2 x}{r^3}=0,\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{k^2 y}{r^3}=0,\\ &\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{k^2 z}{r^3}=0;\end{aligned}\right.$$

und wenn nun zu derselben Zeit in demselben Systeme die Coordinaten der Erde durch X, Y, Z bezeichnet werden, so ist ganz eben so:

$$2) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{k^2 X}{R^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{k^2 Y}{R^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{k^2 Z}{R^3} = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir jetzt die Entfernung des Weltkörpers von der rde durch ϱ, und die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche e von der Erde nach dem Weltkörper gezogene Gesichtslinie it den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, urch θ, ω, ϖ; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der rdinaten offenbar:

$$x = X + \varrho\cos\theta, \quad y = Y + \varrho\cos\omega, \quad z = Z + \varrho\cos\varpi.$$

Beschreiben wir aber um die Erde als Mittelpunkt mit der Län- neinheit als Halbmesser eine Kugelfläche, und bezeichnen die ordinaten der Projection des Weltkörpers auf dieser Kugelfläche, amlich die Coordinaten des Durchschnittspunkts der von der Erde ch dem Weltkörper gezogenen Gesichtslinie mit der in Rede ehenden Kugelfläche, in einem durch die Erde als Anfang gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensysteme durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; so ist offenbar

$$3) \quad \ldots \quad \mathfrak{x} = \cos\theta, \quad \mathfrak{y} = \cos\omega, \quad \mathfrak{z} = \cos\varpi;$$

also nach dem Obigen:

$$4) \quad \ldots \quad x = X + \varrho\mathfrak{x}, \quad y = Y + \varrho\mathfrak{y}, \quad z = Z + \varrho\mathfrak{z};$$

wobei man rücksichtlich der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu bemerken hat, dass nach 3):

$$5) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1,$$

folglich

$$6) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} = 0$$

und

$$7) \quad . \quad \mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} + \mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2 = 0$$

ist.

Aus 4) folgt:

$$x - X = \varrho\mathfrak{x}, \quad y - Y = \varrho\mathfrak{y}, \quad z - Z = \varrho\mathfrak{z};$$

also:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2.\varrho\mathfrak{x}}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2.\varrho\mathfrak{y}}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2.\varrho\mathfrak{z}}{\partial t^2};$$

und weil nun nach 1) und 2)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=k^2\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=k^2\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=k^2\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right)$$

ist, so ist:

$$8)\quad\ldots\ldots\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2.\varrho\mathfrak{x}}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right),\\ \frac{\partial^2.\varrho\mathfrak{y}}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right),\\ \frac{\partial^2.\varrho\mathfrak{z}}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right);\end{aligned}\right.$$

also, wenn man die in diesen Gleichungen vorkommenden zweiten Differentialquotienten entwickelt:

$$9)\quad\ldots\quad\left\{\begin{aligned}\varrho\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+\mathfrak{x}\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right),\\ \varrho\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right),\\ \varrho\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}&=k^2\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right).\end{aligned}\right.$$

Wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t},\quad \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t},\quad \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}$$

multiplicirt, und dann zu einander addirt, so erhält man die Gleichung:

$$10)\quad \varrho\left\{\left(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\left(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\left(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right\}$$

$$=k^2\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right)\left(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)+\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right)\left(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)\\&+\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right)\left(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)\end{aligned}\right\}$$

oder

$$11)\quad \left.\begin{array}{r}\varrho\left\{\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)\right.\\ \left.+\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\right\}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}=k^2\left\{\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right)\left(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)+\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right)\left(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)\right.\\ \left.+\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right)\left(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)\right\}\end{array}\right\}.$$

Nach 4) ist:

$$\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}=X\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\varrho}{r^3}\mathfrak{x},$$

$$\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}=Y\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\varrho}{r^3}\mathfrak{y},$$

$$\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}=Z\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\varrho}{r^3}\mathfrak{z};$$

also nach 9):

$$\varrho\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+\mathfrak{x}\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}=k^2X\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{k^2\varrho}{r^3}\mathfrak{x},$$

$$\varrho\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}=k^2Y\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{k^2\varrho}{r^3}\mathfrak{y},$$

$$\varrho\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}=k^2Z\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{k^2\varrho}{r^3}\mathfrak{z};$$

also, wenn wir

$$12)\quad\left\{\begin{array}{l}A\varrho=2\frac{\partial\varrho}{\partial t},\quad B\varrho=\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}+\frac{k^2\varrho}{r^3},\quad C\varrho=k^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right);\\ \frac{\partial\varrho}{\partial t}=\frac{1}{2}A\varrho,\quad\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}=\left(B-\frac{k^2}{r^3}\right)\varrho,\quad k^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)=C\varrho\end{array}\right.$$

setzen:

$$13)\ \ldots\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}A\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+B\mathfrak{x}+CX=-\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2},\\ A\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+B\mathfrak{y}+CY=-\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2},\\ A\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}+B\mathfrak{z}+CZ=-\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2};\end{array}\right.$$

also, wenn man differentiirt:

$$14)\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+B\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+C\dfrac{\partial X}{\partial t}+\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial t}+\mathfrak{x}\dfrac{\partial B}{\partial t}+X\dfrac{\partial C}{\partial t}=-\dfrac{\partial^3\mathfrak{x}}{\partial t^3}, \\ A\dfrac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+B\dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+C\dfrac{\partial Y}{\partial t}+\dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial t}+\mathfrak{y}\dfrac{\partial B}{\partial t}+Y\dfrac{\partial C}{\partial t}=-\dfrac{\partial^3\mathfrak{y}}{\partial t^3}, \\ A\dfrac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}+B\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}+C\dfrac{\partial Z}{\partial t}+\dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial t}+\mathfrak{z}\dfrac{\partial B}{\partial t}+Z\dfrac{\partial C}{\partial t}=-\dfrac{\partial^3\mathfrak{z}}{\partial t^3}. \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y,\quad \mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z,\quad \mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X$$

multiplicirt, und dann zu einander addirt, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} &(A\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+B\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+C\frac{\partial X}{\partial t})(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y) \\ &+(A\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+B\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+C\frac{\partial Y}{\partial t})(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z) \\ &+(A\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}+B\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}+C\frac{\partial Z}{\partial t})(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X) \\ &+\{(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y)\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z)\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X)\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\}\frac{\partial A}{\partial t} \\ =&-\{(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y)\frac{\partial^3\mathfrak{x}}{\partial t^3}+(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z)\frac{\partial^3\mathfrak{y}}{\partial t^3}+(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X)\frac{\partial^3\mathfrak{z}}{\partial t^3}\} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} &(A\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+B\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y) \\ &+(A\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+B\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z) \\ &+(A\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}+B\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X) \\ &+C\{\mathfrak{x}(Y\frac{\partial Z}{\partial t}-Z\frac{\partial Y}{\partial t})+\mathfrak{y}(Z\frac{\partial X}{\partial t}-X\frac{\partial Z}{\partial t})+\mathfrak{z}(X\frac{\partial Y}{\partial t}-Y\frac{\partial X}{\partial t})\} \\ &+\{(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y)\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z)\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X)\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\}\frac{\partial A}{\partial t} \\ =&-\{(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y)\frac{\partial^3\mathfrak{x}}{\partial t^3}+(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z)\frac{\partial^3\mathfrak{y}}{\partial t^3}+(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X)\frac{\partial^3\mathfrak{z}}{\partial t^3}\}. \end{aligned}$$

Nach I. 4) sind die Grössen

$$Y\frac{\partial Z}{\partial t}-Z\frac{\partial Y}{\partial t},\quad Z\frac{\partial X}{\partial t}-X\frac{\partial Z}{\partial t},\quad X\frac{\partial Y}{\partial t}-Y\frac{\partial X}{\partial t}$$

Constanten, welche wir durch K, K_1, K_2 bezeichnen, und daher

$$15)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l} Y\frac{\partial Z}{\partial t}-Z\frac{\partial Y}{\partial t}=K, \\ Z\frac{\partial X}{\partial t}-X\frac{\partial Z}{\partial t}=K_1, \\ X\frac{\partial Y}{\partial t}-Y\frac{\partial X}{\partial t}=K_2 \end{array}\right.$$

en wollen, wodurch die obige Gleichung in die folgende rgeht:

$$\begin{aligned}
&A\{X(\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2})+Y(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2})+Z(\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2})\}\\
&+B\{X(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})+Y(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})+Z(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\}\\
&+C(K\mathfrak{x}+K_1\mathfrak{y}+K_2\mathfrak{z})\\
&+\{X(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})+Y(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})+Z(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\}\frac{\partial A}{\partial t}\\
&=X(\mathfrak{y}\frac{\partial^3\mathfrak{z}}{\partial t^3}-\mathfrak{z}\frac{\partial^3\mathfrak{y}}{\partial t^3})+Y(\mathfrak{z}\frac{\partial^3\mathfrak{x}}{\partial t^3}-\mathfrak{x}\frac{\partial^3\mathfrak{z}}{\partial t^3})+Z(\mathfrak{x}\frac{\partial^3\mathfrak{y}}{\partial t^3}-\mathfrak{y}\frac{\partial^3\mathfrak{x}}{\partial t^3}).
\end{aligned}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$16)\ \ldots\ U=\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t},\quad U_1=\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t},\quad U_2=\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}$$

und

17)

$$V=\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2},\quad V_1=\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2},\quad V_2=\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2};$$

so ist:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2},\quad \frac{\partial U_1}{\partial t}=\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2},\quad \frac{\partial U_2}{\partial t}=\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - V = \mathfrak{y}\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial t^3} - \mathfrak{z}\frac{\partial^3 \mathfrak{y}}{\partial t^3},$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - V_1 = \mathfrak{z}\frac{\partial^3 \mathfrak{x}}{\partial t^3} - \mathfrak{x}\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial t^3},$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - V_2 = \mathfrak{x}\frac{\partial^3 \mathfrak{y}}{\partial t^3} - \mathfrak{y}\frac{\partial^3 \mathfrak{x}}{\partial t^3}.$$

Also wird die obige Gleichung:

$$16) \quad \ldots \quad A\left(X\frac{\partial U}{\partial t} + Y\frac{\partial U_1}{\partial t} + Z\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)$$

$$+\left(B + \frac{\partial A}{\partial t}\right)(XU + YU_1 + ZU_2)$$

$$- C(K\mathfrak{x} + K_1\mathfrak{y} + K_2\mathfrak{z})$$

$$= X\left(V - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + Y\left(V_1 - \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\right) + Z\left(V_2 - \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}\right),$$

oder:

$$17)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -B - \frac{\left\{\begin{aligned} &A\left(X\frac{\partial U}{\partial t} + Y\frac{\partial U_1}{\partial t} + Z\frac{\partial U_2}{\partial t}\right) - C(K\mathfrak{x} + K_1\mathfrak{y} + K_2\mathfrak{z}) \\ &- X\left(V - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - Y\left(V_1 - \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\right) - Z\left(V_2 - \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}\right) \end{aligned}\right\}}{XU + YU_1 + ZU_2}.$$

§. 2.

Die Gleichungen der Berührenden der scheinbaren Bahn im Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ in dem Coordinatensysteme, auf welches sich die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ dieses Punktes beziehen, sind, wenn $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die veränderlichen oder laufenden Coordinaten in diesem Systeme bezeichnen, nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$18) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{x}}{\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}} = \frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}} = \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}}{\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}}.$$

Durch den Mittelpunkt der Sphäre und diese Berührende, also auch durch den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, lege man eine Ebene, deren Gleichung die allgemeine Form

$$L\mathfrak{X} + M\mathfrak{Y} + N\mathfrak{Z} = 0$$

haben wird; da aber diese Ebene durch den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ geht, so ist auch

$$L\mathfrak{x} + M\mathfrak{y} + N\mathfrak{z} = 0,$$

folglich

$$L(\mathfrak{X} - \mathfrak{x}) + M(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}) + N(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}) = 0,$$

und daher, weil die Ebene durch die Berührende in dem Punkte ($\mathfrak{xyz}$) geht, nach 18):

$$L\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} + M\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} + N\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$L\mathfrak{x} + M\mathfrak{y} + N\mathfrak{z} = 0,$$

$$L\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} + M\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} + N\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} = 0$$

ergiebt sich, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$L = G(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}),$$

$$M = G(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}),$$

$$N = G(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t});$$

so dass also nach dem Obigen

$$19) \ldots (\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\mathfrak{X} + (\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\mathfrak{Y} + (\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\mathfrak{Z} = 0$$

die Gleichung unserer Ebene ist.

Auf diese Ebene errichte man jetzt im Mittelpunkte der Sphäre ein Perpendikel, und bezeichne die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der auf der positiven Seite der Ebene der $\mathfrak{xy}$ liegende Theil dieses Perpendikels mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, durch α, β, γ; so sind die Gleichungen dieses Perpendikels:

$$\frac{\mathfrak{X}}{\cos\alpha} = \frac{\mathfrak{Y}}{\cos\beta} = \frac{\mathfrak{Z}}{\cos\gamma},$$

und nach den Lehren der analytischen Geometrie ist folglich

$$\frac{\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}}{\cos\alpha} = \frac{\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}}{\cos\beta} = \frac{\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}}{\cos\gamma};$$

also, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\alpha = G'(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}),$$

$$\cos\beta = G'(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}),$$

$$\cos\gamma = G'(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t});$$

folglich, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$20)\;.\;\left\{\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm\frac{\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}}{\sqrt{(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})^2}},\\
\cos\beta &= \pm\frac{\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}}{\sqrt{(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})^2}},\\
\cos\gamma &= \pm\frac{\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}}{\sqrt{(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})^2}};
\end{aligned}\right.$$

oder, weil

$$(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})^2$$

$$= (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\} - (\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})^2,$$

und folglich nach 5), 6), 7)

$$(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})^2 + (\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})^2$$

$$= \left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2 = -(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} + \mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2})$$

ist:

$$
) \quad . \quad . \quad \left\{
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm \frac{\mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2}}, \\
\cos\beta &= \pm \frac{\mathfrak{z}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2}}, \\
\cos\gamma &= \pm \frac{\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2}};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
22) \quad . \quad . \quad \left\{
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm \frac{\mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} - \mathfrak{z}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}}{\sqrt{-(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + \mathfrak{z}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2})}}, \\
\cos\beta &= \pm \frac{\mathfrak{z}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} - \mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}}{\sqrt{-(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + \mathfrak{z}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2})}}, \\
\cos\gamma &= \pm \frac{\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}}{\sqrt{-(\mathfrak{x}\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{y}\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + \mathfrak{z}\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2})}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Den Punkt, in welchem von dem vorher betrachteten Theile unsers Perpendikels, welchem die Winkel α, β, γ entsprechen, die Oberfläche der Sphäre geschnitten wird, wollen wir von jetzt an den positiven Pol des durch den Mittelpunkt der Sphäre und die Berührende der scheinbaren Bahn in dem Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ derselben gelegten grössten Kreises der Sphäre nennen. Die dritte Coordinate dieses Pols ist offenbar $\cos\gamma$, und da diese Coordinate unter den gemachten Voraussetzungen nothwendig positiv ist, so sieht man, dass man in allen obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem die Grösse

$$\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}$$

positiv oder negativ ist.

§. 3.

Die Gleichung der Ebene des Krümmungskreises der scheinbaren Bahn in dem Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ derselben ist bekanntlich nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn immer $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die veränderlichen oder laufenden Coordinaten bezeichnen:

$$23) \quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)(\mathfrak{X}-\mathfrak{x}) \\ +\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}) \\ +\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)(\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}) \end{array}\right\} = 0.$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Mittelpunkte der Sphäre nach dem Mittelpunkte des in Rede stehenden Krümmungskreises, welcher natürlich immer ein Kreis der Sphäre ist, hin gezogene Gerade, die auf der Ebene des Krümmungskreises senkrecht steht, mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, durch α_1, β_1, γ_1; so sind

$$\frac{\mathfrak{X}}{\cos\alpha_1}=\frac{\mathfrak{Y}}{\cos\beta_1}=\frac{\mathfrak{Z}}{\cos\gamma_1}$$

die Gleichungen der in Rede stehenden Geraden, und auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen findet man mit Beziehung der oberen oder unteren Zeichen auf einander:

24)

$$\cos\alpha_1 = \pm\frac{\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_1 = \pm\frac{\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_1 =$$

$$\pm\frac{\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2}};$$

wo man auch bemerken kann, dass

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right\}^2$$

ist.

Die dritte Coordinate des Mittelpunkts des Krümmungskreises hat offenbar gleiches Vorzeichen mit $\cos\gamma_1$. Liegt nun der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der positiven Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, und ist also $\cos\gamma_1$ positiv, so muss man in den obigen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}$$

positiv oder negativ ist. Liegt dagegen der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der negativen Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, und ist also $\cos\gamma_1$ negativ, so muss man in den obigen Formeln die oberen oder die unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}$$

negativ oder positiv ist.

Bezeichnen wir den scheinbaren Halbmesser des Krümmungskreises, welcher offenbar immer ein spitzer Winkel ist, durch $\varDelta$, so ist

$$\cos\varDelta=\cos\theta\cos\alpha_1+\cos\omega\cos\beta_1+\cos\overline{\omega}\cos\gamma_1,$$

also nach 3):

$$\cos\varDelta=\mathfrak{x}\cos\alpha_1+\mathfrak{y}\cos\beta_1+\mathfrak{z}\cos\gamma_1,$$

und folglich mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher nach 24):

25)

$$\cos\Delta = \pm \frac{\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2}}$$

oder:

26)

$$\cos\Delta = \pm \frac{\left(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\left(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\left(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2}}.$$

Weil nach 5)

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2=1$$

ist, so kann man den Zähler von $\sin\Delta^2$ auf folgende Art ausdrücken:

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2\\ +\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2\\ +\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2\end{array}\right\}\\
&-\mathfrak{x}^2\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2\\
&-\mathfrak{y}^2\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2\\
&-\mathfrak{z}^2\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2\\
&-2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)\\
&-2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\\
&-2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right),
\end{aligned}$$

und erhält hieraus zuerst ohne alle Schwierigkeit für diesen Zähler den folgenden Ausdruck:

$$\{\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)-\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)\}^2$$

$$+\{\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)-\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)\}^2$$

$$+\{\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)-\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\}^2,$$

o ferner den Ausdruck:

$$\{(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2})\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\}^2$$

$$+\{(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2})\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\}^2$$

$$+\{(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2})\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\}^2,$$

h nach 6) den Ausdruck:

$$(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2})^2\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\},$$

und daher nach 7) endlich den folgenden sehr einfachen Ausdruck:

$$\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^3.$$

Also ist:

27)

$$\sin\varDelta=\frac{\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2}},$$

folglich nach 25):

28)

$$\tan\varDelta=\pm\frac{\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)},$$

oder:

29)

$$\operatorname{tang}\Delta=\pm\frac{\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}},$$

wo immer dieselbe Bestimmung wegen des Vorzeichens gilt wie vorher.

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)\\
&+(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)\\
&+(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)\\
=\;&\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})-\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}\\
&+\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})-\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}\\
&+\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})-\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2\right\}\\
=\;&(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)\\
&-\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)\\
=-&\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}\left(\mathfrak{x}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\mathfrak{y}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+\mathfrak{z}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)\\
=\;&\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^2,
\end{aligned}$$

und folglich, wenn man

$$\cos\Delta_1=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1$$

setzt, wo die Bedeutung von Δ_1 aus dem Obigen leicht von selbst erhellen wird, nach 21) und 24):

30)

$$\cos\Delta_1=\pm\frac{\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)^2}},$$

wo eine Bestimmung wegen des Vorzeichens nicht weiter gegeben werden soll, indem wir hier nur die aus der Vergleichung der Formeln 27) und 30) sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$31) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin\Delta^2 = \cos\Delta_1{}^2$$

ableiten wollten.

§. 4.

Nach 28) ist:

$$\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$=\pm\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\cot\Delta.$$

oder nach 29:

$$(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}$$

$$=\pm\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\cot\Delta;$$

wo wegen der Vorzeichen die folgenden Bestimmungen gelten:

Wenn der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der positiven Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ liegt, so muss man das obere oder untere Vorzeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}$$

positiv oder negativ ist; wenn dagegen der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der negativen Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ liegt, so muss man das obere oder untere Vorzeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}$$

negativ oder positiv ist.

Nun ist aber nach 11)

$$\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$=\frac{k^2}{\varrho}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{X}{R^3}-\frac{x}{r^3}\right)(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})\\+\left(\frac{Y}{R^3}-\frac{y}{r^3}\right)(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})\\+\left(\frac{Z}{R^3}-\frac{z}{r^3}\right)(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\end{array}\right\},$$

also nach 4):

$$\mathfrak{x}\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{y}\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}\right)+\mathfrak{z}\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}\right)$$

$$=\frac{k^2}{\varrho}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)\{X(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})+Y(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})+Z(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\}$$

$$-\frac{1}{r^3}\{\mathfrak{x}(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})+\mathfrak{y}(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})+\mathfrak{z}(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\}$$

$$=\frac{k^2}{\varrho}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)\{X(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})+Y(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})+Z(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\}.$$

Folglich ist nach dem Obigen, mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$\pm\varrho\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\cot\varDelta.$$

$$=k^2\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)\{X(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t})+Y(\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t})+Z(\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t})\}.$$

Führt man jetzt in diese Gleichung für

$$\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}-\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t},\quad \mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}-\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t},\quad \mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}$$

ihre aus den Gleichungen 21) sich ergebenden Ausdrücke ein, so ergiebt sich Folgendes:

Wenn die Grösse

$$\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}$$

positiv ist, so ist

$$\pm\varrho\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}\cot\varDelta$$

$$=k^2\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma),$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Wenn die Grösse

$$\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}$$

negativ ist, so ist

$$\mp \varrho \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2 \right\} \cot \varDelta$$

$$= k^2 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)(X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma);$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Bezeichnen wir die scheinbare Entfernung des positiven Pols des durch den Mittelpunkt der Sphäre und die Berührende der scheinbaren Bahn in dem Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ derselben gelegten grössten Kreises der Sphäre von der Sonne durch D, so ist, weil offenbar $-X$, $-Y$, $-Z$ die Coordinaten der Sonne in Bezug auf die Erde als Anfang sind, wie sogleich erhellet:

$$\cos D = -\frac{X}{R}\cos\alpha - \frac{Y}{R}\cos\beta - \frac{Z}{R}\cos\gamma,$$

also

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = -R\cos D,$$

was, in die obigen Gleichungen eingeführt, zu dem folgenden Resultate führt:

Wenn die Grösse

$$\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}$$

positiv ist, so ist

$$\varrho \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2 \right\} = \mp k^2 R \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \operatorname{tang} \varDelta \cos D,$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Wenn die Grösse

$$\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}$$

negativ ist, so ist

$$\varrho \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2 \right\} = \pm k^2 R \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \operatorname{tang} \varDelta \cos D,$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Weltkörpers in seiner scheinbaren Bahn in dem Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ derselben durch $\mathfrak{V}$, so ist bekanntlich:

$$\mathfrak{v}^2 = \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2,$$

was zu dem folgenden Resultate führt:

Wenn die Grösse

$$\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}$$

positiv ist, so ist

$$\varrho \mathfrak{v}^2 = \mp k^2 R\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \operatorname{tang} \varDelta \cos D,$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Wenn die Grösse

$$\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}$$

negativ ist, so ist

$$\varrho \mathfrak{v}^2 = \pm k^2 R\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \operatorname{tang} \varDelta \cos D,$$

mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher.

Eine weitere an sich nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegende Discussion der Regeln wegen des Vorzeichens führt nun aber zu dem folgenden Resultate:

Es ist allgemein

$$32) \quad \ldots \quad \varrho \mathfrak{v}^2 = \pm k^2 R\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \operatorname{tang} \varDelta \cos D,$$

und wegen des Vorzeichens hat man sich an die folgenden Regeln zu halten.

Wenn der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der positiven Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ liegt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem die Grössen

$$\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} - \mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2}$$

ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

Wenn der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der negativen Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ liegt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem die Grössen

$$\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}-\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Bezeichnen wir die scheinbare Entfernung des Weltkörpers von der Sonne durch $\mathfrak{D}$, so ist

$$r^2=R^2-2R\varrho\cos\mathfrak{D}+\varrho^2,$$

und die Gleichung 32) wird also:

$$\varrho=\pm\frac{k^2R\operatorname{tang}\varDelta\cos D}{\mathfrak{p}^2}\left\{\frac{1}{R^3}-\frac{1}{(R^2-2R\varrho\cos\mathfrak{D}+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

oder

$$\frac{\varrho}{R}=\pm\frac{k^2\operatorname{tang}\varDelta\cos D}{\mathfrak{p}^2R^3}\left\{1-\frac{1}{\left[1-2\frac{\varrho}{R}\cos\mathfrak{D}+\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Setzen wir aber

$$33) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\varrho}{R}=\cos\mathfrak{D}+u\sin\mathfrak{D}$$

und der Kürze wegen

$$34) \quad \ldots\ldots \quad C'=\frac{k^2\operatorname{tang}\varDelta\cos D}{\mathfrak{p}^2R^3},$$

so wird die vorstehende Gleichung, wie man leicht findet:

$$\cos\mathfrak{D}+u\sin\mathfrak{D}=\pm C'\left\{1-\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\sin\mathfrak{D}^3}\right\},$$

also:

$$35) \quad \ldots \quad \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}=\sin\mathfrak{D}^3\left(1\mp\frac{\cos\mathfrak{D}+u\sin\mathfrak{D}}{C'}\right),$$

oder:

$$36) \quad \ldots \quad \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin\mathfrak{D}^3}{C'}\{C'\mp(\cos\mathfrak{D}+u\sin\mathfrak{D})\}.$$

§. 5.

Wir wollen nun zeigen, wie man sich der im Vorhergehenden entwickelten Formeln zur Bestimmung der wahren Bahn des Weltkörpers bedienen kann.

Wenn man sich im Besitz einer grösseren Anzahl durch kleine Zeitintervalle von einander getrennter Beobachtungen des Weltkörpers befindet, so kann man immer mittelst der bekannten Interpolationsmethoden, über die natürlich hier nichts weiter zu sagen ist, die scheinbaren Coordinaten

$$\mathfrak{x} = \cos\theta, \quad \mathfrak{y} = \cos\omega, \quad \mathfrak{z} = \overline{\omega}$$

im Allgemeinen als Functionen der Zeit t darstellen, mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser die Anzahl der dabei benutzten Beobachtungen ist, und je genauer dieselben sind. Das Coordinatensystem ist hierbei ganz willkührlich, und es ist ganz gleichgültig, welche der drei Fundamentalebenen, die man bekanntlich in der Astronomie benutzt, den Beobachtungen zu Grunde gelegt wird. Denn sind überhaupt L, B die durch die Beobachtungen bestimmten polaren Coordinaten, so ist allgemein:

$$\mathfrak{x} = \cos\theta = \cos \mathrm{L} \cos \mathrm{B},$$

$$\mathfrak{y} = \cos\omega = \sin \mathrm{L} \cos \mathrm{B},$$

$$\mathfrak{z} = \cos\overline{\omega} = \sin \mathrm{B}.$$

Hat man aber auf diese Weise $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch allgemeine Formeln als Functionen der Zeit t dargestellt, so kann man durch deren Differentiation auch allgemeine Ausdrücke der Differentialquotienten der Coordinaten als Functionen der Zeit t erhalten, wobei man nur bis zu den dritten Differentialquotienten zu gehen nöthig hat.

Ist man nun aber auf dem Wege der Interpolation zu diesen allgemeinen Ausdrücken der scheinbaren Coordinaten und ihrer Differentialquotienten bis zu den dritten als Functionen der Zeit gelangt, so kann man mittelst derselben diese scheinbaren Coordinaten und ihre Differentialquotienten für jede beliebige Zeit t berechnen, wozu man übrigens, wie aus der Natur dieser Interpolations-Rechnungen von selbst hervorgeht, am besten die möglichst in der Mitte zwischen den Zeiten der benutzten Beobachtungen liegenden Zeiten wählt, und findet dann durch Auflösung der drei linearen Gleichungen 13), in denen X, Y, Z die derselben Zeit entsprechenden, natürlich als bekannt zu betrachtenden Coordinaten der Erde bezeichnen, die drei Grössen A, B, C. Da sich nun voraussetzen lässt, dass man für die Erde die drei in 15) durch K, K_1, K_2 bezeichneten Constanten kennt*), so kann

) Die zur Berechnung dieser Constanten erforderlichen Formeln sind in I. 10) und I. 48) gegeben, wo diese Constanten für jeden beliebigen Weltkörper durch C, C_1, C_2 bezeichnet worden sind.

man mittelst der Formel 17) auch den der Zeit t entsprechenden Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial A}{\partial t}$ berechnen.

Weil nun nach 12)

$$A\varrho = 2\frac{\partial\varrho}{\partial t}$$

ist, so ist

$$A\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \varrho\frac{\partial A}{\partial t} = 2\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2},$$

und folglich, weil ferner nach 12)

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2} = (B - \frac{k^2}{r^3})\varrho$$

ist, wenn man zugleich

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = \tfrac{1}{2}A\varrho$$

setzt:

$$A^2 + 2\frac{\partial A}{\partial t} = 4(B - \frac{k^2}{r^3}),$$

also:

$$37) \quad \ldots\ldots \quad \frac{k^2}{r^3} = B - \tfrac{1}{4}(A^2 + 2\frac{\partial A}{\partial t}),$$

mittelst welcher Formel die Entfernung r des Weltkörpers von der Sonne zur Zeit t berechnet werden kann.

Ferner ist nach 12):

$$38) \quad \ldots\ldots\ldots \quad C\varrho = k^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

mittelst welcher Formel nun auch die curtirte Entfernung ϱ des Weltkörpers von der Erde zur Zeit t gefunden werden kann. Führt man in diese Formel den Werth von $\frac{k^2}{r^3}$ aus 37) ein, so erhält man:

$$39) \quad \ldots\ldots \quad C\varrho = B - \tfrac{1}{4}(A^2 + 2\frac{\partial A}{\partial t}) - \frac{k^2}{R^3},$$

mittelst welcher Formel ϱ unabhängig von r gefunden wird.

Bezeichnet endlich $\mathfrak{R}$ die wirkliche Entfernung des Weltkörpers von der Erde zur Zeit t, so ist offenbar:

$$40) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{R} = \varrho \sec \mathrm{B},$$

wo B mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel $\sin B = \mathfrak{z}$ gefunden wird, wenn diese Grösse nicht schon bekannt sein sollte. Auch ist offenbar:

$$41) \quad \ldots \quad \mathfrak{R} = \frac{\varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}} = \frac{\varrho}{\sqrt{(1-\mathfrak{z})(1+\mathfrak{z})}},$$

mittelst welcher Formel $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{z}$ und ϱ leicht gefunden werden kann.

Die weitere Berechnung der Elemente der Bahn braucht nach den im zweiten Kapitel gegebenen ausführlichen Entwickelungen natürlich hier nicht weiter erläutert zu werden.

§. 6.

Wenn nur drei durch nicht grosse Zwischenzeiten von einander getrennte Beobachtungen gegeben sind, so kann man näherungsweise den, durch die den drei Beobachtungen entsprechenden Projectionen des Weltkörpers auf der Sphäre bestimmten Kreis der Sphäre als den Krümmungskreis der scheinbaren Bahn in der mittleren der drei in Rede stehenden Projectionen betrachten, welches die Grundansicht ist, auf der die ganze folgende Methode der Bestimmung der wahren Bahn beruhet.

Wir wollen die den drei Beobachtungen entsprechenden scheinbaren Coordinaten des Weltkörpers durch

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z};\quad \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{z}_1;\quad \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{z}_2$$

bezeichnen. Sind die durch die Beobachtungen bestimmten polaren Coordinaten des Weltkörpers

$$L,\ B;\quad L_1,\ B_1;\quad L_2,\ B_2;$$

so ist:

$$42) \quad . \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{x} &= \cos L \cos B, & \mathfrak{y} &= \sin L \cos B, & \mathfrak{z} &= \sin B; \\ \mathfrak{x}_1 &= \cos L_1 \cos B_1, & \mathfrak{y}_1 &= \sin L_1 \cos B_1, & \mathfrak{z}_1 &= \sin B_1; \\ \mathfrak{x}_2 &= \cos L_2 \cos B_2, & \mathfrak{y}_2 &= \sin L_2 \cos B_2, & \mathfrak{z}_2 &= \sin B_2. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnen wir nun die Gleichung der durch die drei Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$, $(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2)$ bestimmten Ebene des Krümmungskreises der scheinbaren Bahn in dem Punkte $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$ derselben durch

$$\mathrm{A}\mathfrak{X} + \mathrm{B}\mathfrak{Y} + \mathrm{C}\mathfrak{Z} + \mathrm{E} = 0,$$

so ist:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}\mathfrak{x} + \mathrm{B}\mathfrak{y} + \mathrm{C}\mathfrak{z} + \mathrm{E} &= 0,\\
\mathrm{A}\mathfrak{x}_1 + \mathrm{B}\mathfrak{y}_1 + \mathrm{C}\mathfrak{z}_1 + \mathrm{E} &= 0,\\
\mathrm{A}\mathfrak{x}_2 + \mathrm{B}\mathfrak{y}_2 + \mathrm{C}\mathfrak{z}_2 + \mathrm{E} &= 0;
\end{aligned}$$

woraus sich leicht ergiebt, dass immer

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= -\mathfrak{y}(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2) - \mathfrak{y}_1(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}) - \mathfrak{y}_2(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1),\\
\mathrm{B} &= \mathfrak{x}(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2) + \mathfrak{x}_1(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}) + \mathfrak{x}_2(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1),\\
\mathrm{C} &= -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_1) - (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_2) - (\mathfrak{x}_2\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_2\mathfrak{x}),\\
\mathrm{E} &= \mathfrak{z}(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_2) + \mathfrak{z}_1(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_2\mathfrak{x}) + \mathfrak{z}_2(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_1)
\end{aligned}$$

gesetzt werden kann, wobei man auch noch zu bemerken hat, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= -(\mathrm{A}\mathfrak{x} + \mathrm{B}\mathfrak{y} + \mathrm{C}\mathfrak{z})\\
&= -(\mathrm{A}\mathfrak{x}_1 + \mathrm{B}\mathfrak{y}_1 + \mathrm{C}\mathfrak{z}_1)\\
&= -(\mathrm{A}\mathfrak{x}_2 + \mathrm{B}\mathfrak{y}_2 + \mathrm{C}\mathfrak{z}_2)
\end{aligned}$$

ist, so dass also E immer aus A, B, C leicht gefunden werden kann; und führt man nun in diese Ausdrücke für die scheinbaren Coordinaten ihre aus 42) bekannten Ausdrücke durch die beobachteten polaren Coordinaten ein, so erhält man nach leichter Rechnung die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} = & -2\sin L \cos B \sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2)\\
& -2\sin L_1 \cos B_1 \sin\tfrac{1}{2}(B_2 - B)\cos\tfrac{1}{2}(B_2 + B)\\
& -2\sin L_2 \cos B_2 \sin\tfrac{1}{2}(B - B_1)\cos\tfrac{1}{2}(B + B_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} = & \;2\cos L \cos B \sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2)\\
& +2\cos L_1 \cos B_1 \sin\tfrac{1}{2}(B_2 - B)\cos\tfrac{1}{2}(B_2 + B)\\
& +2\cos L_2 \cos B_2 \sin\tfrac{1}{2}(B - B_1)\cos\tfrac{1}{2}(B + B_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{C} = & \;\sin(L - L_1)\cos B \cos B_1\\
& +\sin(L_1 - L_2)\cos B_1 \cos B_2\\
& +\sin(L_2 - L)\cos B_2 \cos B,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} = & -\sin(L_1 - L_2)\sin B \cos B_1 \cos B_2\\
& -\sin(L_2 - L)\cos B \sin B_1 \cos B_2\\
& -\sin(L - L_1)\cos B \cos B_1 \sin B_2.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Gleichungen der von dem Mittelpunkte der Sphäre auf die Ebene des Krümmungskreises senkrecht gezogenen Geraden durch

$$\frac{\mathfrak{x}}{\cos\lambda} = \frac{\mathfrak{y}}{\cos\mu} = \frac{\mathfrak{z}}{\cos\nu},$$

so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{A}{\cos\lambda} = \frac{B}{\cos\mu} = \frac{C}{\cos\nu},$$

woraus man mit Hülfe der bekannten Gleichung

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

sogleich die folgenden Formeln erhält:

$$44) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\lambda = \pm \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\mu = \pm \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\nu = \pm \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{array} \right.$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Setzt man

$$45) \quad \cos\lambda = \cos\Theta\cos\Omega, \quad \cos\mu = \sin\Theta\cos\Omega, \quad \cos\nu = \sin\Omega;$$

so ist:

$$\tang\Theta = \frac{\cos\mu}{\cos\lambda}, \quad \frac{\tang\Omega}{\cos\Theta} = \frac{\cos\nu}{\cos\lambda}, \quad \frac{\tang\Omega}{\sin\Theta} = \frac{\cos\nu}{\cos\mu};$$

und zur Berechnung von Θ und Ω hat man also nach 44) die folgenden Formeln:

$$46) \quad \ldots \quad \tang\Theta = \frac{B}{A}, \quad \tang\Omega = \frac{C}{A}\cos\Theta = \frac{C}{B}\sin\Theta\text{*)}.$$

---

*) Es genügt hierbei, für Θ den einen zwischen 0 und 180° liegenden Werth dieses Winkels zu setzen, welcher der ersten Gleichung in 46) genügt, und dann für Ω die zwei zwischen 0 und 360° liegenden Werthe dieses Winkels, welche den zwei letzten Gleichungen in 46) genügen. Bezeichnet also θ den einen in Rede stehenden Werth von Θ und Ω die beiden in Rede stehenden Werthe von Ω, so ist eigentlich:

$$\cos\lambda = \cos\theta\cos\Omega, \quad \cos\mu = \sin\theta\cos\Omega, \quad \cos\nu = \sin\Omega.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises durch $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$, so hat man zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$A\mathfrak{X}_1 + B\mathfrak{Y}_1 + C\mathfrak{Z}_1 + E = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{X}_1}{\cos\lambda} = \frac{\mathfrak{Y}_1}{\cos\mu} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\cos\nu};$$

aus denen sich sehr leicht die folgenden Formeln ergeben:

$$47) \quad \ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = -\dfrac{E\cos\lambda}{A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu}, \\ \mathfrak{Y}_1 = -\dfrac{E\cos\mu}{A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu}, \\ \mathfrak{Z}_1 = -\dfrac{E\cos\nu}{A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu}; \end{cases}$$

oder, wie man leicht findet:

$$47^*) \quad \ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = -\dfrac{AE}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ \mathfrak{Y}_1 = -\dfrac{BE}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ \mathfrak{Z}_1 = -\dfrac{CE}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{cases}$$

Aus dem Vorzeichen von $\mathfrak{Z}_1$ ergiebt sich unmittelbar, ob der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der positiven oder auf der negativen Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ liegt.

Bezeichnet, wie früher Δ, jetzt Δ_1 den scheinbaren Halbmesser des Krümmungskreises, so ist, wenn man in den folgenden Formeln das Zeichen immer so nimmt, dass $\cos\Delta_1$ positiv wird:

$$48) \quad \ldots \quad \cos\Delta_1 = \mathfrak{x}_1\cos\lambda + \mathfrak{y}_1\cos\mu + \mathfrak{z}_1\cos\nu$$

oder:

$$49) \quad \cos\Delta_1 = \cos\lambda\cos L_1\cos B_1 + \cos\mu\sin L_1\cos B_1 + \cos\nu\sin B_1.$$

Durch den Mittelpunkt der Sphäre, den Punkt $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$ und das durch den Mittelpunkt der Sphäre gehende Perpendikel auf der Ebene des Krümmungskreises, dessen Gleichungen nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{X}}{\cos\lambda}=\frac{\mathfrak{Y}}{\cos\mu}=\frac{\mathfrak{Z}}{\cos\nu}\ ^{*)}$$

sind, lege man eine Ebene, deren Gleichung

$$A_1\mathfrak{X}+B_1\mathfrak{Y}+C_1\mathfrak{Z}=0$$

sein mag; so ist:

$$A_1\mathfrak{x}_1+B_1\mathfrak{y}_1+C_1\mathfrak{z}_1=0,$$

$$A_1\cos\lambda+B_1\cos\mu+C_1\cos\nu=0;$$

woraus sich leicht ergiebt, dass

$$50)\quad\ldots\ldots\quad\begin{cases}A_1=\mathfrak{y}_1\cos\nu-\mathfrak{z}_1\cos\mu,\\ B_1=\mathfrak{z}_1\cos\lambda-\mathfrak{x}_1\cos\nu,\\ C_1=\mathfrak{x}_1\cos\mu-\mathfrak{y}_1\cos\lambda\end{cases}$$

gesetzt werden kann.

Die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Sphäre und den Punkt $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$ gehenden, auf der vorhergehenden Ebene senkrecht stehenden Ebene sei:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X}+\mathfrak{B}\mathfrak{Y}+\mathfrak{C}\mathfrak{Z}=0,$$

so ist:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1+\mathfrak{B}\mathfrak{y}_1+\mathfrak{C}\mathfrak{z}_1=0,$$

$$A_1\mathfrak{A}+B_1\mathfrak{B}+C_1\mathfrak{C}=0;$$

woraus sich leicht ergiebt, dass

$$51)\quad\ldots\ldots\ldots\quad\begin{cases}\mathfrak{A}=B_1\mathfrak{z}_1-C_1\mathfrak{y}_1,\\ \mathfrak{B}=C_1\mathfrak{x}_1-A_1\mathfrak{z}_1,\\ \mathfrak{C}=A_1\mathfrak{y}_1-B_1\mathfrak{x}_1;\end{cases}$$

folglich nach 50):

$$\mathfrak{A}=(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{z}_1^2)\cos\lambda-\mathfrak{x}_1(\mathfrak{x}_1\cos\lambda+\mathfrak{y}_1\cos\mu+\mathfrak{z}_1\cos\nu),$$

$$\mathfrak{B}=(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{z}_1^2)\cos\mu-\mathfrak{y}_1(\mathfrak{x}_1\cos\lambda+\mathfrak{y}_1\cos\mu+\mathfrak{z}_1\cos\nu),$$

$$\mathfrak{C}=(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{z}_1^2)\cos\nu-\mathfrak{z}_1(\mathfrak{x}_1\cos\lambda+\mathfrak{y}_1\cos\mu+\mathfrak{z}_1\cos\nu);$$

also, weil bekanntlich

---

*) Welche Zeichen in den Formeln für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ genommen werden, ist hierbei und im Folgenden ganz gleichgültig.

$$\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{z}_1^2=1$$

ist:

$$52)\quad\ldots\quad\begin{cases}\mathfrak{A}=\cos\lambda-\mathfrak{x}_1(\mathfrak{x}_1\cos\lambda+\mathfrak{y}_1\cos\mu+\mathfrak{z}_1\cos\nu),\\ \mathfrak{B}=\cos\mu-\mathfrak{y}_1(\mathfrak{x}_1\cos\lambda+\mathfrak{y}_1\cos\mu+\mathfrak{z}_1\cos\nu),\\ \mathfrak{C}=\cos\nu-\mathfrak{z}_1(\mathfrak{x}_1\cos\lambda+\mathfrak{y}_1\cos\mu+\mathfrak{z}_1\cos\nu);\end{cases}$$

wo, wie man leicht mittelst 42) und 45) findet:

$$53)\quad\ldots\ldots\quad \mathfrak{x}_1\cos\lambda+\mathfrak{y}_1\cos\mu+\mathfrak{z}_1\cos\nu$$
$$=\sin B_1\sin\Omega+\cos(L_1-\Theta)\cos B_1\cos\Omega$$

ist; folglich auch:

$$54)$$
$$\mathfrak{A}=\cos\Theta\cos\Omega-\cos L_1\cos B_1\{\sin B_1\sin\Omega+\cos(L_1-\Theta)\cos B_1\cos\Omega\},$$
$$\mathfrak{B}=\sin\Theta\cos\Omega-\sin L_1\cos B_1\{\sin B_1\sin\Omega+\cos(L_1-\Theta)\cos B_1\cos\Omega\},$$
$$\mathfrak{C}=\sin\Omega-\sin B_1\{\sin B_1\sin\Omega+\cos(L_1-\Theta)\cos B_1\cos\Omega\};$$

welche Formeln man noch auf verschiedene Arten transformiren könnte.

Die Gleichungen des auf die vorhergehende Ebene in dem Mittelpunkte der Sphäre errichteten Perpendikels seien

$$\frac{\mathfrak{X}}{\cos\lambda'}=\frac{\mathfrak{Y}}{\cos\mu'}=\frac{\mathfrak{Z}}{\cos\nu'};$$

so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$55)\quad\ldots\ldots\quad\begin{cases}\cos\lambda'=\pm\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}},\\[2ex] \cos\mu'=\pm\dfrac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}},\\[2ex] \cos\nu'=\pm\dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}};\end{cases}$$

oder:

$$56)\quad\ldots\quad \operatorname{tang}\Theta'=\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},\quad \operatorname{tang}\Omega'=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\cos\Theta'=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\sin\Theta'$$

und

$$57)\quad \cos\lambda'=\cos\Theta'\cos\Omega',\ \cos\mu'=\sin\Theta'\cos\Omega',\ \cos\nu'=\sin\Omega'.$$

Für den auf der positiven Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ liegenden Theil des so eben betrachteten Perpendikels ist $\cos\nu'$ offenbar positiv, und sollen also die Winkel λ', μ', ν' sich auf diesen Theil unsers Perpendikels beziehen, so muss man in den Formeln 55) die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse $\mathfrak{C}$ positiv oder negativ ist. Dies vorausgesetzt, ist nun, wenn D_1 jetzt für die zweite Beobachtung ganz dasselbe bedeutet wie D in §. 4., und X_1, Y_1, Z_1 und R_1 die Coordinaten der Erde zur Zeit der zweiten Beobachtung für die Sonne als Anfang und ihre Entfernung von der Sonne für dieselbe Zeit bezeichnen:

$$58) \quad . \quad . \quad \cos D_1 = -\frac{X_1\cos\lambda' + Y_1\cos\mu' + Z_1\cos\nu'}{R_1},$$

mittelst welcher Formel D_1 gefunden werden kann, indem die Grössen X_1, Y_1, Z_1 und R_1 natürlich als bekannt vorauszusetzen sind.

Durch Interpolation wird man nun aus den drei Beobachtungen leicht allgemeine Ausdrücke der scheinbaren Coordinaten durch die Zeit, und daraus dann die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial t_1},\ \frac{\partial \mathfrak{y}_1}{\partial t_1},\ \frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_1}{\partial t_1^2},\ \frac{\partial^2 \mathfrak{y}_1}{\partial t_1^2},\ \frac{\partial^2 \mathfrak{z}_1}{\partial t_1^2}$$

berechnen können. Dann kann man aber auch die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}_1}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial t_1}\right)^2}$$

berechnen und die Vorzeichen der Grössen

$$\mathfrak{x}_1\frac{\partial \mathfrak{y}_1}{\partial t_1} - \mathfrak{y}_1\frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{y}_1}{\partial t_1^2} - \frac{\partial \mathfrak{y}_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{x}_1}{\partial t_1^2}$$

bestimmen.

Bezeichnen wir endlich die scheinbare Entfernung des Weltkörpers von der Sonne zur Zeit der zweiten Beobachtung durch $\mathfrak{D}_1$, so ist

$$59) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos\mathfrak{D}_1 = -\frac{X_1\mathfrak{x}_1 + Y_1\mathfrak{y}_1 + Z_1\mathfrak{z}_1}{R_1},$$

und wir haben also jetzt alle Data, welche erforderlich sind, um für die zweite Beobachtung die Gleichungen

$$C_1 = \mp\frac{k^2\tang\Delta_1\cos D_1}{\mathfrak{v}_1^2 R_1^2}$$

und

$$\frac{1}{(1+u_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin \mathfrak{D}_1^3}{C_1}\{C'_1 \mp (\cos \mathfrak{D}_1 + u_1 \sin \mathfrak{D}_1)\}$$

bilden zu können.

Aus der letzten Gleichung, in die man noch auf ähnliche Art wie in II. §. 11. eine neue mittelst der Formel

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}}$$

zu bestimmende, zwischen 0 und 1 liegende unbekannte Grösse v_1 einführen könnte, was wir, als keiner Schwierigkeit unterliegend und aus II. §. 11. bekannt, hier nicht weiter erläutern wollen, findet man u_1, und dann ϱ_1 und r_1 mittelst der Formeln:

$$60) \quad \ldots \quad \begin{cases} \varrho_1 = R_1(\cos \mathfrak{D}_1 + u_1 \sin \mathfrak{D}_1), \\ r_1 = \sqrt{R_1^2 - 2R_1\varrho_1 \cos \mathfrak{D}_1 + \varrho_1^2}. \end{cases}$$

Wie man hieraus weiter die Elemente findet, ist bekannt und braucht nicht noch einmal von Neuem erläutert zu werden.

Anhang.

Mittelst einiger Rechnung und Zeichnung kann man beurtheilen, ob zur Zeit der zweiten Beobachtung die Entfernung des Weltkörpers von der Sonne grösser oder kleiner war als die Entfernung der Erde von der Sonne.

Zu dem Ende nehme ich an, dass man aus den gegebenen scheinbaren Coordinaten

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}; \quad \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1; \quad \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{z}_2$$

des Weltkörpers die Grössen A, B, C mittelst der Formeln

$$\begin{aligned}
A &= -\mathfrak{y}(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2) - \mathfrak{y}_1(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}) - \mathfrak{y}_2(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1), \\
B &= \quad \mathfrak{x}(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2) + \mathfrak{x}_1(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}) + \mathfrak{x}_2(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1), \\
C &= -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}\mathfrak{x}_1) - (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_2) - (\mathfrak{x}_2\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_2\mathfrak{x}) \\
&= -\mathfrak{x}(\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2) - \mathfrak{x}_1(\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}) - \mathfrak{x}_2(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1) \\
&= \quad \mathfrak{y}(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + \mathfrak{y}_1(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}) + \mathfrak{y}_2(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1), \\
E &= -(A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z}) = -(A\mathfrak{x}_1 + B\mathfrak{y}_1 + C\mathfrak{z}_1) = -(A\mathfrak{x}_2 + B\mathfrak{y}_2 + C\mathfrak{z}_2)
\end{aligned}$$

berechnet habe, was einer Schwierigkeit nicht unterliegt.

Nach III. 47*) ist

$$\mathfrak{z}_1 = -\frac{CE}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und $\mathfrak{z}_1$ ist also positiv oder negativ, d. h. der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, jenachdem die Grössen C und E ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

Nimmt man nun in den Formeln 44) die oberen Vorzeichen, was bekanntlich verstattet ist*), so ist nach 52), wie man leicht findet:

$$\mathfrak{A} = \frac{A-(A\mathfrak{x}_1+B\mathfrak{y}_1+C\mathfrak{z}_1)\mathfrak{x}_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B-(A\mathfrak{x}_1+B\mathfrak{y}_1+C\mathfrak{z}_1)\mathfrak{y}_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{C-(A\mathfrak{x}_1+B\mathfrak{y}_1+C\mathfrak{z}_1)\mathfrak{z}_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

also nach dem Obigen:

$$\mathfrak{A} = \frac{A+E\mathfrak{x}_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \mathfrak{B} = \frac{B+E\mathfrak{y}_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \mathfrak{C} = \frac{C+E\mathfrak{z}_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

und $\mathfrak{C}$ ist also positiv oder negativ, jenachdem $C+E\mathfrak{z}_1$ positiv oder negativ ist.

Nach 55) und 58) ist

$$\cos D_1 = \mp\frac{\mathfrak{A}X_1+\mathfrak{B}Y_1+\mathfrak{C}Z_1}{R_1\sqrt{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos D_1 = \mp\frac{AX_1+BY_1+CZ_1+E(X_1\mathfrak{x}_1+Y_1\mathfrak{y}_1+Z_1\mathfrak{z}_1)}{R_1\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)}},$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $\mathfrak{C}$, d. h. nach dem Obigen $C+E\mathfrak{z}_1$, positiv oder negativ ist. Folglich hat $\cos D_1$ mit der Grösse

$$AX_1+BY_1+CZ_1+E(X_1\mathfrak{x}_1+Y_1\mathfrak{y}_1+Z_1\mathfrak{z}_1)$$

*) M. s. die Note auf S. 396.

ungleiches oder gleiches Vorzeichen, jenachdem $C+E\mathfrak{z}_1$ positiv oder negativ ist.

Mit Hülfe der scheinbaren Coordinaten

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y};\quad \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{y}_1;\quad \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_2$$

oder besser mit Hülfe der mehr als bloss drei Beobachtungen entsprechenden gleichnamigen scheinbaren Coordinaten, kann man nun leicht eine Zeichnung der Projection der scheinbaren Bahn auf der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ entwerfen. Verbindet man dann die Endpunkte der Coordinaten $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ mit einander durch eine Gerade und zieht durch den Punkt $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)$ eine Berührende an die in Rede stehende Projection der scheinbaren Bahn; so kennt man in den trigonometrischen Tangenten der 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die auf der positiven Seite der Axe der $\mathfrak{x}$ liegenden Theile dieser beiden Geraden mit dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{x}$ einschliessen, die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1},$$

und wird nun auch leicht aus der Zeichnung die Vorzeichen der Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1}$$

erkennen und entnehmen können. Es ist aber

$$\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1}=\frac{\mathfrak{x}_1\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial t_1}-\mathfrak{y}_1\frac{\partial\mathfrak{x}_1}{\partial t_1}}{\mathfrak{x}_1^2}$$

und

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1}=\frac{\partial\left\{\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial t_1}:\frac{\partial\mathfrak{x}_1}{\partial t_1}\right\}}{\partial t_1}=\frac{\frac{\partial\mathfrak{x}_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}_1}{\partial t_1^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}_1}{\partial t_1^2}}{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}_1}{\partial t_1}\right)^2},$$

woraus man sieht, dass die Grössen

$$\mathfrak{x}_1\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}-\mathfrak{y}_1\frac{\partial\mathfrak{x}_1}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathfrak{x}_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{y}_1}{\partial t_1^2}-\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{x}_1}{\partial t_1^2}$$

respective mit den Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1}$$

jederzeit gleiche Vorzeichen haben, und dass also auch die Vorzeichen der beiden in Rede stehenden Grössen immer leicht aus der entworfenen Zeichnung erkannt werden können.

Man hat daher offenbar jetzt alle Data, welche nach III. erforderlich sind, um zu entscheiden, welches Zeichen in der Gleichung

$$\varrho_1 \mathfrak{v}_1^{\,2} = \pm\, k^2 R_1 \left(\frac{1}{R_1^{\,3}} - \frac{1}{r_1^{\,3}}\right) \operatorname{tang} \varDelta_1 \cos D_1,$$

in welcher $\operatorname{tang}\varDelta_1$ jederzeit positiv ist, genommen werden muss, und auch ein Kriterium zur Bestimmung des Vorzeichens von D_1, so dass sich also auch immer wird bestimmen lassen, ob r_1 grösser oder kleiner als R_1, d. h. ob zur Zeit der zweiten Beobachtung die Entfernung des Weltkörpers von der Sonne grösser oder kleiner als die Entfernung der Erde von der Sonne ist.

Hieraus, in Verbindung mit III., ergiebt sich der folgende merkwürdige Satz:

(I) . . C und E haben ungleiche Vorzeichen.

Wenn die Grössen

$$\mathrm{C} + \mathrm{E}\mathfrak{z}_1,$$

$$\mathrm{A}X_1 + \mathrm{B}Y_1 + \mathrm{C}Z_1 + \mathrm{E}(X_1\mathfrak{x}_1 + Y_1\mathfrak{y}_1 + Z_1\mathfrak{z}_1)$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$r_1 < R_1 \quad \text{oder} \quad r_1 > R_1,$$

jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1}$$

ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

Wenn die Grössen

$$\mathrm{C} + \mathrm{E}\mathfrak{z}_1,$$

$$\mathrm{A}X_1 + \mathrm{B}Y_1 + \mathrm{C}Z_1 + \mathrm{E}(X_1\mathfrak{x}_1 + Y_1\mathfrak{y}_1 + Z_1\mathfrak{z}_1)$$

ungleiche Vorzeichen haben, so ist

$$r_1 > R_1 \quad \text{oder} \quad r_1 < R_1,$$

jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1}$$

ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

(H) . . C und E haben gleiche Vorzeichen

Wenn die Grössen

$$C + E\mathfrak{z}_1,$$

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + E(X_1\mathfrak{x}_1 + Y_1\mathfrak{y}_1 + Z_1\mathfrak{z}_1).$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist

$$r_1 < R_1 \quad \text{oder} \quad r_1 > R_1,$$

jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Wenn die Grössen

$$C + E\mathfrak{z}_1,$$

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + E(X_1\mathfrak{x}_1 + Y_1\mathfrak{y}_1 + Z_1\mathfrak{z}_1)$$

ungleiche Vorzeichen haben, so ist

$$r_1 > R_1 \quad \text{oder} \quad r_1 < R_1,$$

jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\left(\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}\right)}{\partial t_1}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Schon Lambert hat in den Mémoires de Berlin. 1771. p. 352. Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt, die ich aber für wenig genügend halte, indem ich vielmehr der Meinung bin, dass der Satz allein in seinem obigen Ausdrucke auf völlige Strenge Anspruch machen und in der Praxis von Nutzen sein kann.

VIII.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$(1)\qquad y^{(n)} = Ax^m y'' + Bx^{m-1}y' + Cx^{m-2}y.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*

zu Wien.

I.

Ich setze, geleitet durch meine früheren Untersuchungen, das Integral obiger Differentialgleichung in folgender Form voraus:

$$(2)\qquad y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux)\,V du,$$

unter V und $\psi(ux)$ Functionen von u und ux, und unter u_1 und u_2 constante Zahlen verstanden. Aus (2) folgt:

$$y' = \int_{u_1}^{u_2} u\psi'(ux)\,V du,$$

$$y'' = \int_{u_1}^{u_2} u^2\psi''(ux)\,V du,$$

$$y^{(n)} = \int_{u_1}^{u_2} u^n\psi^{(n)}(ux)\,V du;$$

und werden diese Werthe in (1) substituirt, so folgt:

$$(3)\qquad \int_{u_1}^{u_2} V\{u^n\psi^{(n)}(ux) - Ax^m u^2\psi''(ux) - Bx^{m-1}u\psi'(ux) - Cx^{m-2}\psi(ux)\}du = 0.$$

Die beiden hier vorkommenden Integrale

$$-Ax^m\int_{u_1}^{u_2} Vu^2\psi''(ux)du,$$

$$-Bx^{m-1}\int_{u_1}^{u_2} Vu\psi'(ux)\,du$$

geben, nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt:

$$-Ax^m\int_{u_1}^{u_2} Vu^2\psi''(ux)du = Ax^{m-2}\left\{-u^2x\,V\psi'(ux)+\frac{\partial(u^2V)}{\partial u}\psi(ux)\right\}_{u_1}^{u_2}$$
$$-Ax^{m-2}\int_{u_1}^{u_2}\psi(ux)\cdot\frac{\partial^2(u^2V)}{\partial u^2}du,$$

$$-Bx^{m-1}\int_{u_1}^{u_2} Vu\psi'(ux)\,du = -Bx^{m-2}\left\{uV\psi(ux)\right\}_{u_1}^{u_2}$$
$$+Bx^{m-2}\int_{u_1}^{u_2}\psi(ux)\frac{\partial(uV)}{\partial u}du;$$

und führt man diese Werthe in (3) ein, so erhält man:

$$(4)\quad -Ax^{m-1}\left\{u^2V\psi'(ux)\right\}_{u_1}^{u_2}+x^{m-2}\left\{\psi(ux)\left[A\frac{\partial(u^2V)}{\partial u}-BuV\right]\right\}_{u_1}^{u_2}$$
$$+\int_{u_1}^{u_2}\left\{u^nV\psi^{(n)}(ux)-Ax^{m-2}\frac{\partial^2(u^2V)}{\partial u^2}\psi(ux)+Bx^{m-2}\frac{\partial(uV)}{\partial u}\psi(ux)\right.$$
$$\left.-Cx^{m-2}V\psi(ux)\right\}du=0.$$

Setzt man jetzt:

$$(5)\qquad \psi^{(n)}(ux)=u^{m-2}x^{m-2}\psi(ux),$$

so lässt sich die Gleichung (4) auch folgendermassen schreiben:

$$(6)$$
$$-Ax^{m-1}\left\{u^2V\psi'(ux)\right\}_{u_1}^{u_2}+x^{m-2}\left\{\psi(ux)\left[A\frac{\partial(u^2V)}{\partial u}-BuV\right]\right\}_{u_1}^{u_2}$$
$$+x^{m-2}\int_{u_1}^{u_2}\psi(ux)\left\{u^{m+n-2}V-A\frac{\partial^2(u^2V)}{\partial u^2}+B\frac{\partial(uV)}{\partial u}-CV\right\}du=0;$$

und dieser genügt man, wenn man V als Function von u so wählt, dass

$$(7)\qquad u^{m+n-2} V - A\frac{\partial^2(u^2 V)}{\partial u^2} + B\frac{\partial(uV)}{\partial u} - CV = 0$$

ist, ferner die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 so, dass zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen:

$$(8)\qquad \left\{u^2 V\psi'(ux)\right\}_{u_1}^{u_2} = 0, \quad \left\{\psi(ux)\left[A\frac{\partial(u^2 V)}{\partial u} - BuV\right]\right\}_{u_1}^{u_2} = 0$$

stattfinden.

II.

Hat man daher eine Gleichung von der Form:

$$y^{(n)} = Ax^m y'' + Bx^{m-1} y' + Cx^{m-2} y$$

zu integriren, so setze man:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \psi(ux) V du,$$

bestimme dann $\psi(ux)$ und V aus folgenden zwei Differentialgleichungen:

$$\psi^{(n)}(ux) = u^{m-2} x^{m-2} \psi(ux),$$

$$u^{m+n-2} V - A\frac{\partial^2(u^2 V)}{\partial u^2} + B\frac{\partial(uV)}{\partial u} - CV = 0,$$

die offenbar einfacher gebaut sind als die vorgelegte. Nehmen wir nun an, es gelänge uns die Integration derselben, sei nämlich das Integral der Gleichung (5):

$$\psi(ux) = C_1\psi_1(ux) + C_2\psi_2(ux) + \dots + C_n\psi_n(ux),$$

und das Integral der Gleichung (7):

$$V = A_1 V_1 + A_2 V_2,$$

unter $C_1, C_2, \dots C_n$ und A_1, A_2 die willkührlichen Constanten der Integration verstanden, so kann man das Product $V\psi(ux)$ und folglich auch y als einen mit $n+1$ willkührlichen Constanten versehenen Ausdruck betrachten.

Führt man alsdann den gefundenen Werth von V in die beiden Gleichungen

$$u^2 V = 0, \quad A\frac{\partial(u^2 V)}{\partial u} - BuV = 0$$

ein, und lassen sich für u, etwa durch schickliche Wahl von $\frac{A_2}{A_1}$, solche zwei constante Zahlen auffinden, die beiden Gleichungen zugleich genügen, so kann man diese als Integrationsgrenzen u_1 und u_2 des Integrals betrachten und hat somit die vorgesetzte Aufgabe gelöst, falls das gewonnene Integral innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich geht.

III.

Die Gleichung (5), die für $ux=\theta$ die Form

$$\psi^{(n)}(\theta)=\theta^{m-2}\psi(\theta) \tag{9}$$

annimmt, ist in den Fällen, wo $m=2$ oder $m=2-n$ ist, höchst einfach zu integriren; man hat nämlich für $m=2$:

$$\psi(\theta)=C_1e^{\alpha_1\theta}+C_2e^{\alpha_2\theta}+\ldots.+C_ne^{\alpha_n\theta},$$

wo

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots.\ \alpha_n$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^n=1$$

sind, und für $m=2-n$:

$$\psi(\theta)=\mathfrak{C}_1\theta^{\beta_1}+\mathfrak{C}_2\theta^{\beta_2}+\ldots.+\mathfrak{C}_n\theta^{\beta_n},$$

wo

$$\beta_1,\ \beta_2,\ldots.\ \beta_n$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\beta(\beta-1)(\beta-2)\ldots.(\beta-n+1)=1$$

sind. In diesem letzten Falle ist freilich die vorgelegte Gleichung selbst nicht schwer zu integriren, weil sie leicht auf die Form

$$x^ny^{(n)}=Ax^2y''+Bxy'+Cy$$

gebracht werden kann.

Ist $m>2$ und zugleich eine ganze Zahl, so verdankt man die Integration der Gleichung (9) Herrn Kummer, der dieselbe im 19. Bande von Crelle's Journal veröffentlichte; für $m=1$ habe ich das Integral der genannten Gleichung in Grunert's Archiv für Mathematik Thl. XXVI. Nr. IV. S. 57. mitgetheilt, in einer Abhandlung, die den Titel führt: Integration der Differentialgleichung $xy^{(n)}-y=0$.

IV.

Die Gleichung (7) gibt geordnet:

$$(10)\quad u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + u \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{4A-B}{A} + V . \frac{2A-B+C-u^{m+n-2}}{A} = 0,$$

und bildet einen speciellen Fall folgender, vom Herrn Professor J. **Petzval** betrachteten Gleichung:

$$x^2 y'' + (A_1 + B_1 x^{m_1}) x y' + (A_0 + B_0 x^{m_1} + C_0 x^{2m_1}) y = 0,$$

die derselbe durch die beiden auf einander folgenden Substitutionen

$$x^{m_1} = t, \quad y = t^k z$$

auf die Form

$$m_1^2 t \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial z}{\partial t} (2km_1 + m_1 - 1 + A_1 + B_1 t) + z(m_1 k B_1 + B_0 + C_0 t) = 0$$

bringt, unter k eine Wurzel der Gleichung

$$m_1^2 k^2 + m_1 k (A_1 - 1) + A_0 = 0$$

verstanden.

Für unsern Fall kann man entweder:

$$A_1 = \frac{4A-B}{A}, \qquad B_1 = 0;$$

$$A_0 = \frac{2A-B+C}{A}, \quad B_0 = -\frac{1}{A}, \quad C_0 = 0;$$

$$m_1 = m + n - 2$$

und k als Wurzel der Gleichung

$$(m+n-2)^2 k^2 + (m+n-2) k \frac{3A-B}{A} + \frac{2A-B+C}{A} = 0$$

oder:

$$A_1 = \frac{4A-B}{A}, \qquad B_1 = 0;$$

$$A_0 = \frac{2A-B+C}{A}, \quad B_0 = 0, \quad C_0 = -\frac{1}{A};$$

$$m_1 = \frac{m+n-2}{2},$$

und k als Wurzel der Gleichung

$$\left(\frac{m+n-2}{2}\right)^2 k^2 + \frac{m+n-2}{2} k \frac{3A-B}{A} + \frac{2A-B+C}{A} = 0$$

annehmen.

Im ersten Falle geht die Gleichung (10) durch die beiden auf einander folgenden Substitutionen

$$u^{m+n-2} = t, \quad V = t^k z \tag{11}$$

über in:

$$(m+n-2)^2 t \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (m+n-2) \frac{\partial z}{\partial t}\left[(2k+1)(m+n-2)+3-\frac{B}{A}\right] - \frac{z}{A} = 0, \tag{12}$$

und im zweiten Falle durch die beiden Substitutionen

$$u^{\frac{m+n-2}{2}} = t, \quad V = t^k z \tag{13}$$

in:

$$\left(\frac{m+n-2}{2}\right)^2 t \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{m+n-2}{2} \frac{\partial z}{\partial t}\left[\left(k+\tfrac{1}{2}\right)(m+n-2)+3-\frac{B}{A}\right] - \frac{tz}{A} = 0. \tag{14}$$

V.

Wir haben also die Gleichung, welche zur Bestimmung von V dient, durch Einführung neuer Variablen auf die Formen

$$t \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial z}{\partial t} - \beta z = 0, \tag{15}$$

$$\tau \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \alpha_1 \frac{\partial z}{\partial \tau} - \beta_1 \tau z = 0 \tag{16}$$

zurückgeführt, welche eigentlich von einander nicht wesentlich verschieden sind, da die erste sich unmittelbar in die zweite verwandelt, wenn man die unabhängige Variable $t = \tau^2$ setzt, und zugleich

$$\alpha_1 = 2\alpha - 1, \quad \beta_1 = 4\beta$$

annimmt.

Herr Prof. J. Petzval hat sich sehr viel in seinem grossen Werke mit der Integration der Gleichung (16) beschäftigt, wir

wollen hier eine Zusammenstellung der von ihm gefundenen Integrale geben.

Die Gleichung

$$x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a \frac{\partial y}{\partial x} - b^2 x y = 0,$$

in welcher a positiv ist, hat für positive Werthe von x das Integral:

$$y = C_1 \int_{-b}^{+b} (u^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du + C_2 \int_{-\infty}^{-b} (u^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du,$$

und für negative x folgendes andere:

$$y = C_1 \int_{-b}^{+b} (u^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du + C_2 \int_{b}^{\infty} (u^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du.$$

Die Gleichung

$$x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a \frac{\partial y}{\partial x} + b^2 x y = 0,$$

in welcher ebenfalls a positiv ist, hat für positive Werthe von x das Integral:

$$y = \int_0^b (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2}-1} (B_1 \sin ux + B_2 \cos ux)\, du$$

$$+ B_1 \int_0^{-\infty} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du,$$

und für negative x:

$$y = \int_0^b (b^2 - u^2)^{\frac{a}{2}-1} (B_1 \sin ux + B_2 \cos ux)\, du$$

$$+ B_1 \int_0^{\infty} (u^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{ux} du.$$

Ist a negativ, was wir dadurch anschaulich machen wollen, dass wir $-a$ anstatt a setzen, so haben wir:

$$x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a \frac{\partial y}{\partial x} - b^2 x y = 0, \tag{17}$$

deren allgemeines Integral

(18)

$$y=C_1\left\{\frac{\partial^{\frac{a}{2}}}{\partial u^{\frac{a}{2}}}\left[\frac{e^{ux}}{(u+b)^{\frac{a}{2}+1}}\right]\right\}_b+C_2\left\{\frac{\partial^{\frac{a}{2}}}{\partial u^{\frac{a}{2}}}\left[\frac{e^{ux}}{(u-b)^{\frac{a}{2}+1}}\right]\right\}_{-b}$$

ist; wird dieser Ausdruck entwickelt, so erhält man:

$$y=C_1x^{\frac{a}{2}}e^{bx}\Big\{1-\frac{a+2}{2}\binom{\frac{a}{2}}{1}\cdot\frac{1}{2bx}+\frac{a+2}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\binom{\frac{a}{2}}{2}\cdot\frac{1}{4b^2x^2}$$

$$-\frac{a+2}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\cdot\frac{a+6}{2}\binom{\frac{a}{2}}{3}\cdot\frac{1}{8b^3x^3}+\ldots\Big\}$$

$$+C_2x^{\frac{a}{2}}e^{-bx}\Big\{1+\frac{a+2}{2}\binom{\frac{a}{2}}{1}\cdot\frac{1}{2bx}+\frac{a+2}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\binom{\frac{a}{2}}{2}\frac{1}{4b^2x^2}$$

$$+\frac{a+2}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\cdot\frac{a+6}{2}\binom{\frac{a}{2}}{3}\frac{1}{8b^3x^3}+\ldots\Big\},$$

oder, wenn man den Ausdruck (18) in bestimmte Integrale umwandelt:

(19)

$$y=C_1e^{bx}\int_0^{\infty}e^{-2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\lambda^{\frac{a}{2}}d\lambda+C_2e^{-bx}\int_0^{-\infty}e^{2\lambda b}(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}\lambda^{\frac{a}{2}}d\lambda.$$

Hätte man endlich die Gleichung

$$x\frac{\partial^2y}{\partial x^2}-a\frac{\partial y}{\partial x}+b^2xy=0,$$

so brauchte man bloss in den eben gefundenen Formeln $b\sqrt{-1}$ statt b zu setzen.

Wir bemerken noch, dass die oben gegebene, nach fallenden Potenzen von x geordnete Reihe abbricht, wenn $\frac{a}{2}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist, hingegen eine unendliche und divergente Reihe wird, wenn $\frac{a}{2}$ nicht ganz ist.

VI.

Betrachten wir, um die Anwendbarkeit der aufgestellten Formeln zu prüfen, folgende unendliche Reihe:

$$y = x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \dots, \tag{20}$$

die der linearen Differentialgleichung

$$xy'' - y = 0 \tag{21}$$

genügt, und suchen wir dieselbe durch eine geschlossene Form auszudrücken.

Führen wir nach Herrn Professor J. Petzval's Vorgange statt x eine neue Variable ξ in die Rechnung ein durch die Substitution

$$\xi = \sqrt{x},$$

so erhalten wir:

$$\xi \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} - 4\xi y = 0,$$

wofür Herr Professor J. Petzval das Integral aufstellt:

$$y = C_1 \left\{ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial u^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{e^{u\sqrt{x}}}{(u+2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\}_2 + C_2 \left\{ \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial u^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{e^{u\sqrt{x}}}{(u-2)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\}_{-2},$$

oder, wenn man statt der Differentialquotienten bestimmte Integrale einführt:

$$y = C_1 e^{2\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-4\lambda} (\sqrt{x} - \lambda)^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} d\lambda + C_2 e^{-2\sqrt{x}} \int_0^{-\infty} e^{4\lambda} (\sqrt{x} - \lambda)^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} d\lambda,$$

was sich auch folgendermaassen schreiben lässt:

$$y = \int_0^{\infty} e^{-4\lambda} \sqrt{\lambda} \{ B_1 e^{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} - \lambda)^{\frac{1}{2}} + B_2 e^{-2\sqrt{x}} (\sqrt{x} + \lambda)^{\frac{1}{2}} \} d\lambda.$$

Nun soll für $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$ sein; demnach hat man:

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-4\lambda} \sqrt{\lambda} \{ B_1 (-\lambda)^{\frac{1}{2}} + B_2 (+\lambda)^{\frac{1}{2}} \} d\lambda,$$

was

$$B_2 + B_1 \sqrt{-1} = 0$$

gibt, und da

$$y' = \int_0^\infty e^{-4\lambda\sqrt{\lambda}} \left\{ \frac{B_1 e^{2\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-\lambda)^{\frac{1}{2}}} + \frac{B_1 e^{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-\lambda)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} \right.$$

$$\left. + \frac{B_2 e^{-2\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+\lambda)^{\frac{1}{2}}} - \frac{B_2 e^{-2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+\lambda)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} \right\} d\lambda$$

ist, was sich für $x=0$ in ∞ verwandelt, so sieht man, dass sich die Constanten B_1 und B_2 nicht dermaassen bestimmen lassen, dass der Gleichung (20) genügt wird.

Wir fanden in unserer früher citirten Abhandlung für y folgenden Werth:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_0^\pi \cos\omega \,.\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\, d\omega,$$

von dessen Richtigkeit man sich sehr leicht überzeugen kann.

VII.

Wir finden uns daher genöthigt, die Gleichung (16), oder, was auf Dasselbe hinauskömmt, die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha\frac{\partial y}{\partial x} + \beta y \tag{22}$$

auf selbstständigem Wege zu untersuchen.

Wir differenziren die Gleichung (22) αmal nach x, und erhalten dadurch

$$x\frac{\partial^{\alpha+2} y}{\partial x^{\alpha+2}} + \alpha\frac{\partial^{\alpha+1} y}{\partial x^{\alpha+1}} = \alpha\frac{\partial^{\alpha+1} y}{\partial x^{\alpha+1}} + \beta\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha};$$

setzt man nun

$$\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha} = W, \tag{23}$$

so erhält man:

$$x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \beta W,$$

was zum Integrale folgenden Ausdruck hat:

$$W = (C_1 + C_2 \log \beta x)\{\beta x + \frac{\beta^2 x^2}{1!2!} + \frac{\beta^3 x^3}{2!3!} + \frac{\beta^4 x^4}{3!4!} + \ldots\}$$

$$+ C_2 - C_2 \Big\{\frac{\beta^2 x^2}{1!2!}(1+\frac{1}{2}) + \frac{\beta^3 x^3}{2!3!}(1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}) + \frac{\beta^4 x^4}{3!4!}(1+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4})$$
$$+ \frac{\beta^5 x^5}{4!5!}(1+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}) + \ldots\Big\}.$$

Derselbe lässt sich auch so darstellen:

$$W = C_1\{\beta x + \frac{\beta^2 x^2}{1!2!} + \frac{\beta^3 x^3}{2!3!} + \frac{\beta^4 x^4}{3!4!} + \ldots\}$$
$$+ C_2\Big[1 + \log \beta x . \{\beta x + \frac{\beta^2 x^2}{1!2!} + \frac{\beta^3 x^3}{2!3!} + \frac{\beta^4 x^4}{3!4!} + \ldots\}$$
$$- \int_0^1 \frac{u+1}{u-1}\{\frac{\beta^2 x^2 (u-1)}{1!2!} + \frac{\beta^3 x^3 (u^2-1)}{2!3!} + \frac{\beta^4 x^4 (u^3-1)}{3!4!} + \ldots\}du\Big],$$

und gestattet noch eine weitere Vereinfachung dadurch, dass man die unendliche Reihe

$$\beta x + \frac{\beta^2 x^2}{1!2!} + \frac{\beta^3 x^3}{2!3!} + \frac{\beta^4 x^4}{3!4!} + \ldots = \varphi(\beta x)$$

setzt, wodurch man erhält:

$$W = C_1 \varphi(\beta x) + C_2\Big[1 + \varphi(\beta x).\log \beta x - \int_0^1 \frac{u+1}{u-1}.\frac{\varphi(u\beta x) - u\varphi(\beta x)}{u} du\Big].$$

Endlich ist

$$\varphi(\beta x) = \frac{\sqrt{\beta x}}{\pi}\int_0^\pi \cos \omega e^{2\sqrt{\beta x}.\cos\omega} d\omega.$$

VIII.

Es kann leicht gezeigt werden, dass ganz dasselbe Verfahren auf die Differentialgleichung

$$x\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \alpha\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \beta y$$

angewendet werden kann, denn ein αmaliges Differenziren beiderseits gibt

$$x\frac{\partial^{n+\alpha} y}{\partial x^{n+\alpha}} = \beta\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha},$$

was für

$$\frac{\partial^{\alpha} y}{\partial x^{\alpha}} = W$$

übergeht in

$$x \frac{\partial^{n} W}{\partial x^{n}} = \beta W.$$

Wir haben das Integral dieser Gleichung in der schon früher erwähnten Abhandlung in unendliche Reihen entwickelt und daselbst auch die Methoden angeführt, welche hinreichend sind, diese unendlichen Reihen durch bestimmte Integrale wiederzugeben.

(Die Fortsetzung in einem der nächsten Hefte.)

IX.

Ueber die Maxima und Minima der Polygone in und um Kreise.

Von

Herrn Oberlehrer Dr. *Birnbaum*

zu Braunschweig.

---

1. Von allen in einen Kreis beschriebenen geradlinichten Figuren derselben Seitenzahl schliesst jedesmal die **reguläre** den grössten Flächenraum in sich.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich ganz elementar durchführen. Beginnen wir zunächst mit dem in einen Kreis beschriebenen Dreieck, so ist klar, wenn wir uns dasselbe auf einer Seite in demselben Kreisabschnitte veränderlich vorstellen, dass dann das darauf stehende gleichschenklige Dreieck das grösste ist, weil dies unter Voraussetzung der constanten Grundlinie die grösste

Höhe hat. Daraus folgt nun, dass ein Dreieck im Kreise, welches auf jeder als Grundlinie betrachteten Seite gleichschenklich ist, den grössten Flächenraum in sich schliessen muss. Ein solches Dreieck ist aber das gleichseitige.

Gehen wir nun zu dem Viereck im Kreise über und denken uns dabei eine Diagonale gezogen, so wird unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit dieser Diagonale von allen Vierecken dasjenige ein Maximum sein, welches aus zwei gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt ist. Und überhaupt muss daher das Viereck im Kreise das grösste sein, welches durch jede Diagonale in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt wird. Ein solches Viereck kann aber kein anderes als das gleichseitige sein.

Und richten wir nun allgemein unsere Aufmerksamkeit auf irgend ein Vieleck im Kreise und denken uns dabei mit Hülfe einer Diagonale ein Dreieck abgeschnitten, so wird, wenn blos dies Dreieck veränderlich wäre, wieder das gleichschenklige das grösste sein, woraus also folgt, dass das Vieleck derselben Seitenzahl, wobei jedes durch eine Diagonale abgeschnittene Dreieck ein gleichschenkliges ist, das grösste sein muss. Ein solches Vieleck kann aber kein anderes sein als ein gleichseitiges oder reguläres.

2. Von allen um einen Kreis beschriebenen geradlinichten Figuren derselben Seitenzahl schliesst jedesmal die **reguläre** den kleinsten Flächenraum in sich.

Wir gehen wieder von dem Dreiecke aus. Das $\triangle ABC$ (Taf. X. Fig. 3.) sei um den Kreis um M beschrieben und D, E, F seien die Berührungspunkte, welche wir mit M verbinden. Dies Dreieck denken wir uns nur in so weit veränderlich, als F auf dem Bogen DFE eine beliebige Lage annehmen kann, wodurch also das Stück $DBEM$ constant, die anderen beiden Stücke $ADMF$, $FMEC$ aber variabel wären. Bezeichnen wir desshalb $\angle DME$ mit a, $\angle DMF$ mit x, so ist $\angle EMF = 360^0 - (a+x)$. Der Kürze wegen mag der Halbmesser des Kreises um $M = 1$ sein, dann ist der Flächeninhalt von $ADMF = \operatorname{tang} \frac{1}{2}x$, der von $FMEC = \operatorname{tang}(180^0 - \frac{a+x}{2})$. Ferner sei der Inhalt von $DBCM = c$. Angenommen nun, dass der veränderliche Inhalt des $\triangle ABC = y$ heisst, so wäre

$$y = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x + \operatorname{tang}(180^0 - \frac{a+x}{2}) + c,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2(180^0-\frac{a+x}{2})}.$$

Jetzt frägt es sich, unter welcher Bedingung dieser Werth von $\frac{dy}{dx}=0$ wird. Die Antwort auf diese Frage ist leicht gefunden; es muss nämlich

$$\cos\tfrac{1}{2}x=\cos(180^0-\frac{a+x}{2})$$

oder

$$x=360^0-(a+x)$$

sein. Das sagt uns nun, dass der erste Differenzialcoefficient des veränderlichen Dreiecks $ABC=0$ wird, wenn $\angle DMF=\angle FME$ gewählt ist. Unter dieser Voraussetzung formt sich aber das ΔABC zu einem gleichschenkligen.

Um nun zu erfahren, ob dieses Dreieck dann einem Maximum oder Minimum entspricht, so müssen wir noch den zweiten Differenzialcoefficienten bestimmen, und erhalten aus

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2(180^0-\frac{a+x}{2})}$$

durch fernere Differentiation:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x}{\cos^3\frac{1}{2}x}+\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}(a+x)}{\cos^3(180^0-\frac{a+x}{2})}.$$

Dieser Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$ kann immer nur ein positives Resultat geben, weil x und auch $360^0-(a+x)$ jedes Mal weniger als 180^0 betragen und mithin $\frac{1}{2}x$ und $180^0-\frac{a+x}{2}$ immer kleiner als 90^0 sein muss. Daraus folgt aber, dass unter allen Dreiecken um den Kreis um M, welche das Stück $DBEM$ unveränderlich beibehalten, das auf AC gleichschenklige Dreieck ABC den kleinsten Flächenraum in sich schliesst. Ist also dies Dreieck so konstruirt, dass es auf allen drei Seiten gleichschenklich ist, so muss es einem allgemeinen Minimum entsprechen, und ein solches Dreieck ist das gleichseitige.

Es sei nun $ABCDE$ (Taf. X. Fig. 4.) irgend ein Vieleck um den Kreis um M, wobei die entsprechenden Berührungspunkte F, G, H, J, K mit dem Mittelpunkte M durch gerade Linien verbunden sind. Denken wir uns dann den Theil $FAEDH$ davon

unveränderlich, während das andere Stück $FBCHM$ veränderlich ist, so wird nach dem Vorhergehenden von allen denkbaren Polygonen derselben Seitenzahl dasjenige den kleinsten Flächenraum in sich schliessen, welches $\angle FMG = \angle GMH$ macht. Lassen wir ferner $KEDCGM$ constant und $KABGM$ veränderlich sein, so wird wieder das Vieleck derselben Seitenzahl ein Minimum sein müssen, welches $\angle KMF = \angle FMG$ sein lässt. Und so schliesst man im Allgemeinen, dass jedes Mal das Polygon von einer bestimmten Seitenzahl um den Kreis den kleinsten Raum in sich schliessen muss, wobei die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte die ganze Umdrehung in so viel gleiche Theile theilen, als das Vieleck Seiten besitzt. Dies fällt aber genau zusammen mit der Bedingung der Konstruktion der regulären Figuren um den Kreis.

X.

Ueber die Curven der grössten Neigung.

(Lignes de la plus grande pente.)

Von

dem Herausgeber.

Unter den Curven oder Linien der grössten Neigung auf einer beliebigen Fläche versteht man alle diejenigen Linien auf dieser Fläche, welche in allen ihren Punkten die grösste Neigung gegen eine gegebene Ebene haben, d. h. hier immer: gegen diese Ebene, wofür man am besten eine der drei Coordinatenebenen, etwa die Ebene der xy, annehmen kann, unter dem grössten Winkel geneigt sind. Bei den wichtigen praktischen Anwendungen, die von diesen Curven bei den Bewässerungsanlagen und den sogenannten

Drainirungen, welche in der Landwirthschaft gegenwärtig eine so grosse Rolle spielen und allerdings schon sehr viel zu deren Förderung beigetragen haben, würde die Ebene der xy als horizontal anzunehmen sein, was wir der Kürze des Ausdrucks wegen auch in der Folge zuweilen thun werden, weil dadurch die Allgemeinheit der Betrachtung durchaus nicht beeinträchtigt wird, indem wir zugleich bemerken, dass wir im Folgenden stets rechtwinklige Coordinaten zu Grunde legen werden.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Entwickelung der allgemeinen Gleichung der Curven der grössten Neigung, und bemerken zu diesem Ende, dass die Erklärung dieser Curven in strengerer Weise wie oben auf folgende Art auszudrücken ist:

Linien oder Curven der grössten Neigung auf einer beliebigen Fläche heissen alle diejenigen Curven auf dieser Fläche, deren Berührende in jedem ihrer Punkte die grösste Neigung gegen eine gegebene Ebene, die man zugleich am besten als Ebene der xy annehmen wird, haben.

An diese Erklärung wollen wir nun unsere folgenden Entwickelungen anschliessen.

Die Gleichung der gegebenen Fläche sei:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad U = f(X, Y, Z) = 0,$$

indem wir die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch X, Y, Z bezeichnen.

Ein beliebiger, aber bestimmter Punkt auf dieser Fläche sei (xyz), so dass also auch

$$2) \quad \ldots\ldots \quad u = f(x, y, z) = 0$$

ist.

Die Gleichung der Berührungsebene unserer Fläche in dem Punkte (xyz) ist bekanntlich:

$$3) \quad \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial u}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial u}{\partial z}(Z-z) = 0,$$

wo die Differentialquotienten partielle sind.

Jede in der Berührungsebene liegende, durch den Punkt (xyz) gehende Gerade ist eine die Fläche in demselben Punkte berührende Gerade. Die Gleichungen jeder durch den Punkt (xyz) gehenden Geraden haben bekanntlich die Form:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{X-x}{\cos\varphi} = \frac{Y-y}{\cos\psi} = \frac{Z-z}{\cos\chi},$$

wo φ, ψ, χ ihre bekannte Bedeutung haben. Soll diese Gerade in der durch den Punkt (xyz) gehenden Berührungsebene liegen, so müssen ihre Coordinaten die Gleichung 3) erfüllen, was mittelst der Gleichungen 3) und 4) unmittelbar zu der Bedingungsgleichung

$$5) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\chi = 0$$

führt.

Um nun unter allen Berührenden der Fläche in dem Punkte (xyz) diejenige herauszufinden, welche die grösste Neigung gegen die Ebene der XY hat, stellen wir die folgende sehr einfache Betrachtung an. Die Entfernung des Punktes (xyz) von der Ebene der XY sei H, und E sei die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Durchschnittspunkte einer beliebigen, durch den Punkt (xyz) gehenden Berührenden der Fläche, deren Neigungswinkel gegen die Ebene der XY im Allgemeinen durch i bezeichnet werden mag, mit der Durchschnittslinie der Berührungsebene im Punkte (xyz) mit der Ebene der XY. Dann ist offenbar

$$\sin i = \frac{H}{E},$$

woraus sich, da für alle Berührenden H constant ist, unmittelbar ergiebt, dass i ein Maximum wird, wenn E ein Minimum wird, wenn also die in Rede stehende Berührende auf der Durchschnittslinie der Berührungsebene mit der Ebene der XY senkrecht steht, wodurch uns das allgemeine Criterium der die grösste Neigung gegen die Ebene der XY habenden Berührenden unmittelbar gegeben ist, welches wir nun auf einen analytischen Ausdruck bringen müssen.

Zu dem Ende bemerken wir zuvörderst, dass nach einem bekannten stereometrischen Satze auch die Projection der die grösste Neigung gegen die Ebene der XY habenden Berührenden auf der Ebene der XY die Durchschnittslinie der Berührungsebene mit dieser Coordinatenebene unter rechten Winkeln schneidet. Da nun die Gleichung der Projection auf der Ebene der XY der durch die Gleichungen 4) im Allgemeinen charakterisirten Berührenden

$$\frac{X-x}{\cos\varphi} = \frac{Y-y}{\cos\psi} \quad \text{oder} \quad Y-y = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}(X-x),$$

und nach 3) die Gleichung der Durchschnittslinie der Berührungsebene mit der Ebene der XY offenbar

$$Y-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}(X-x)+\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial u}{\partial y}}z$$

ist, so erhalten wir nach den Lehren der analytischen Geometrie für die Berührende, welche die grösste Neigung gegen die Ebene der XY hat, die folgende Bedingungsgleichung:

$$6)\ldots 1-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}=0 \text{ oder } \frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\psi=0.$$

Nehmen wir nun zu den Gleichungen 5) und 6) noch die bekannte, zwischen drei Winkeln wie φ, ψ, χ jederzeit Statt findende Gleichung hinzu, so haben wir zwischen diesen drei Winkeln die folgenden Gleichungen:

$$7)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\psi=0,\\[2mm] \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\psi+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\chi=0,\\[2mm] \cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1;\end{array}\right.$$

welche zur Bestimmung der Winkel φ, ψ, χ völlig hinreichend sind.

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich zuvörderst:

$$\cos\psi=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}\cos\varphi,\quad \cos\chi=-\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}\cos\varphi;$$

also, wenn man diese Ausdrücke in die dritte Gleichung einführt, wie man leicht findet:

$$\cos\varphi=\pm\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}},$$

und folglich überhaupt, nach den zwei vorhergehenden Ausdrücken von $\cos\psi$ und $\cos\chi$, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

8)

$$\cos\varphi = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}},$$

$$\cos\psi = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}},$$

$$\cos\chi = \mp \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}};$$

wobei man bemerken kann, dass, wenn P die Entfernung des Anfangs der Coordinaten von der Berührungsebene in dem Punkte (xyz) bezeichnet, nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left\{\frac{x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}}{P}\right\}^2$$

ist.

Nach 4) sind folglich die Gleichungen der Berührenden der grössten Neigung in dem Punkte (xyz) offenbar:

$$9)\quad\ldots\quad \frac{X-x}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{Z-z}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Denken wir uns jetzt auf der im Allgemeinen durch die Gleichung

$$U = f(X,\ Y,\ Z) = 0$$

charakterisirten Fläche eine Curve grösster Neigung gezogen, und nehmen an, dass (xyz) ein beliebiger Punkt dieser Curve sei, so wird der durch die Coordinaten $x+\varDelta x$, $y+\varDelta y$, $z+\varDelta z$ bestimmte Punkt dieser Curve mit desto grösserer Genauigkeit in der durch die Gleichungen

$$\frac{X-x}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{Z-z}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

charakterisirten Berührenden der grössten Neigung liegen, je näher Δx, und demzufolge, weil y, z jetzt offenbar als Functionen von x zu betrachten sind, auch Δy, Δz der Null kommt. Für die Curve der grössten Neigung werden also die vorstehenden Gleichungen mit desto grösserer Genauigkeit erfüllt werden, wenn man $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ für X, Y, Z setzt, oder für die Curve der grössten Neigung wird mit desto grösserer Genauigkeit

$$\frac{\Delta x}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{\Delta y}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}=-\frac{\Delta z}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}},\quad \frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}$$

sein, je näher Δx der Null kommt. Mit absoluter Genauigkeit werden folglich der Curve der grössten Neigung die Gränzgleichungen der vorstehenden Gleichungen entsprechen, denen dieselben sich nähern, wenn Δx sich der Null nähert. Da man nun aber diese Gränzgleichungen offenbar erhält, wenn man für die Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ setzt; so hat man für die Curve der grössten Neigung die Gleichungen:

$$10)\quad \ldots\ldots \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}};$$

zu denen natürlich noch die Gleichung

$$11)\quad \ldots\ldots\ldots \quad u=f(x,y,z)=0$$

kommt.

Wir wollen einmal das allgemeine dreiaxige Ellipsoid betrachten, dessen Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \text{ oder } \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1=0$$

ist. In diesem Falle ist also

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1,$$

und folglich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}.$$

Also ist für die Curven der grössten Neigung:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}{\frac{x}{a^2}\cdot\frac{z}{c^2}}.$$

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

folgt:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

und es frägt sich, ob diese Gleichung wirklich erfüllt wird, wenn man in dieselbe für $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ ihre obigen Ausdrücke einführt. Dass dies aber in der That der Fall ist, erhellet auf der Stelle, da die Gleichung

$$\frac{x}{a^2}+\frac{a^2}{b^4}\cdot\frac{y^2}{x}-\frac{z}{c^2}\cdot\frac{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}{\frac{x}{a^2}\cdot\frac{z}{c^2}}=0,$$

welche aus dieser Substitution hervorgeht, sich auf die Form

$$\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)-\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)=0$$

bringen lässt, und sich also als eine identische Gleichung erweiset, wie es erforderlich ist.

Dass die Berührende der Curve der grössten Neigung in dem Punkte (xyz) durch die Gleichungen

$$11)\quad \ldots\ldots\quad \frac{X-x}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}=-\frac{Z-z}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

charakterisirt wird, und dass für diese Berührende

12)

$$\cos\varphi = \pm\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}},$$

$$\cos\psi = \pm\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}},$$

$$\cos\chi = \mp\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}$$

ist, versteht sich nach dem Obigen von selbst.

Unter Horizontalen einer Fläche versteht man alle diejenigen Curven, in denen dieselbe von horizontalen, d. h. hier mit der Ebene der XY parallelen Ebenen geschnitten wird.

Wir wollen jetzt die durch den Punkt (xyz) gehende Horizontale und die durch denselben Punkt gehende Curve der grössten Neigung betrachten.

Bezeichnen wir die von dem einen der beiden Theile der Berührenden der Horizontalen in dem Punkte (xyz), in welche dieselbe durch den Punkt (xyz) getheilt wird, mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ', ψ', χ'; so ist zuvörderst klar, dass $\chi'=90^0$, also $\cos\chi'=0$ ist. Da die in Rede stehende Berührende offenbar in der Berührungsebene der Fläche in dem Punkte (xyz) liegen muss, deren Gleichung bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0$$

ist; so ist, weil offenbar

$$\frac{X-x}{\cos\varphi'}=\frac{Y-y}{\cos\psi'},\quad Z=z$$

die Gleichungen der Berührenden der Horizontalen in dem Punkte (xyz) sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi' + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\psi' = 0 \quad \text{oder} \quad \cos\psi' = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\cos\varphi'.$$

Nach dem Obigen ist aber für die Berührende der Curve der grössten Neigung in dem Punkte (xyz):

$$\cos\psi = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}\cos\varphi.$$

Also ist:

$$\cos\psi\cos\psi' = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}}\cos\varphi\cos\varphi' = -\cos\varphi\cos\varphi',$$

folglich

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\psi\cos\psi' = 0,$$

oder, weil $\cos\chi' = 0$ ist:

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\psi\cos\psi' + \cos\chi\cos\chi' = 0.$$

Nach einem bekannten Theorem der analytischen Geometrie ergiebt sich hieraus der für die praktische Anwendung sehr wichtige Satz: dass die Curven der grössten Neigung einer Fläche auf allen Horizontalen derselben senkrecht stehen.

Wenn die gegebene Fläche durch Umdrehung einer ebenen Curve um die Axe der Z entstanden ist, so ist, wenn $\Phi(Z)$ eine beliebige, bloss von Z abhängende Function bezeichnet, ihre Gleichung bekanntlich von der Form:

$$U = X^2 + Y^2 + \Phi(Z) = 0;$$

also:

$$u = x^2 + y^2 + \Phi(z),$$

und folglich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \Phi'(z).$$

Also ist in diesem Falle für die Curven der grössten Neigung nach dem Obigen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2(x^2+y^2)}{x\Phi'(z)}.$$

Dass, wenn die erste dieser beiden Gleichungen erfüllt ist, immer auch die zweite Statt findet, erhellet leicht. Denn, weil

$$x^2+y^2+\Phi(z)=0$$

ist, so ist

$$2x+2y\frac{\partial y}{\partial x}+\Phi'(z).\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

also:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2(x+y\frac{\partial y}{\partial x})}{\Phi'(z)},$$

folglich, wenn man für $\frac{\partial y}{\partial x}$ seinen obigen Ausdruck einführt:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2(x^2+y^2)}{x\Phi'(z)},$$

wie es nach dem Obigen sein muss.

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y}{x}$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{x\frac{\partial y}{\partial x}-y}{x^2}=\frac{\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{y}{x}}{x}=0.$$

Also ist, wenn C eine Constante bezeichnet:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y}{x}=C, \text{ folglich } y=Cx.$$

Daher ist die Projection jeder Curve der grössten Neigung auf der Ebene der xy eine durch den Anfang der Coordinaten gehende Gerade, woraus sich ergiebt, dass in dem vorliegenden Falle die Curven der grössten Neigung die ebenen Curven sind, in denen die Rotationsfläche von den durch die Rotationsaxe gelegten Ebenen geschnitten wird. Sonst werden im Allgemeinen die Curven der grössten Neigung Linien von doppelter Krümmung sein. Die Constante C bestimmt sich durch den Punkt, durch welchen die Curve der grössten Neigung gehen soll, eine Bemerkung, die in allen Fällen für die Bestimmung der durch die Integration eintretenden willkührlichen Constanten festzuhalten ist.

Für das allgemeine dreiaxige Ellipsoid haben wir schon oben gefunden:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y}{x},$$

also:

$$\frac{\partial y}{y}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\partial x}{x},$$

und folglich, wenn man integrirt:

$$l.y^2=\frac{a^2}{b^2}l.x^2+C.$$

Soll nun die Curve der grössten Neigung durch den Punkt (fgh) gehen, wo

$$\left(\frac{f}{a}\right)^2+\left(\frac{g}{b}\right)^2+\left(\frac{h}{c}\right)^2=1$$

ist, so muss sein:

$$l.g^2=\frac{a^2}{b^2}l.f^2+C;$$

also, wenn man subtrahirt:

$$l.\frac{y^2}{g^2}=\frac{a^2}{b^2}l.\frac{x^2}{f^2}.$$

Diese Gleichung und die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

sind die Gleichungen der durch den Punkt (fgh) gehenden Curve der grössten Neigung auf dem dreiaxigen Ellipsoid, wobei auf mehr in's Einzelne gehende Discussionen uns einzulassen wir jetzt nicht beabsichtigen.

Dieser geometrischen Untersuchung wollen wir nun noch die folgende mechanische Betrachtung hinzufügen.

Wir wollen annehmen, dass auf einen Punkt gewisse Zeitkräfte wirken, denen zur Zeit t die parallel mit den Axen der x, y, z wirkenden Composanten X, Y, Z entsprechen, dass aber dieser Punkt nicht der Bewegung, welche diese Kräfte ihm, als

einen freien Punkt gedacht, ertheilen würden, folgen, sondern auf einer gewissen, durch die Gleichung

$$u=f(x, y, z)=0$$

charakterisirten Fläche zu bleiben genöthigt sein soll; so können wir uns dies bewirkt denken durch eine gewisse besondere, normal auf der Fläche wirkende Zeitkraft *), die wir durch Φ bezeichnen wollen. Sind dann ξ, η, ζ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche zur Zeit t die Richtung dieser Zeitkraft mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, so sind deren derselben Zeit t entsprechende, den Coordinatenaxen parallele Composanten:

$$\Phi\cos\xi,\quad \Phi\cos\eta,\quad \Phi\cos\zeta;$$

und bezeichnen nun x, y, z die Coordinaten des sich bewegenden Punktes zur Zeit t, so haben wir nach den Lehren der Mechanik die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X+\Phi\cos\xi,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y+\Phi\cos\eta,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z+\Phi\cos\zeta.$$

Die Gleichungen der auf der gegebenen Fläche im Punkte (xyz) senkrechten oder normalen Richtung der Kraft Φ sind nach den Lehren der analytischen Geometrie, wenn wir die laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen:

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial u}{\partial z}};$$

und wenn also F einen gewissen Factor bezeichnet, so ist:

$$F\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\xi,\quad F\frac{\partial u}{\partial y}=\cos\eta,\quad F\frac{\partial u}{\partial z}=\cos\zeta;$$

woraus, wenn man quadrirt und addirt,

$$F^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}=1,$$

*) Der Widerstand, den die Fläche vermöge ihrer Festigkeit leistet.

also

$$F=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}$$

folgt. Die obigen Gleichungen der Bewegung lassen sich also jetzt auf folgenden Ausdruck bringen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X+\Phi F\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y+\Phi F\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z+\Phi F\frac{\partial u}{\partial z};$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\Phi F=P$$

gesetzt wird, auf den Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X+P\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y+P\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z+P\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=Y\frac{\partial x}{\partial t}-X\frac{\partial y}{\partial t}+P\left(\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Z\frac{\partial y}{\partial t}-Y\frac{\partial z}{\partial t}+P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=X\frac{\partial z}{\partial t}-Z\frac{\partial x}{\partial t}+P\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}:\frac{\partial x}{\partial t}\right\}=\frac{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial z}{\partial t}:\frac{\partial y}{\partial t}\right\}=\frac{\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial x}{\partial t}:\frac{\partial z}{\partial t}\right\}=\frac{\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2};$$

folglich:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}:\frac{\partial x}{\partial t}\right\},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial z}{\partial t}:\frac{\partial y}{\partial t}\right\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial x}{\partial t}:\frac{\partial z}{\partial t}\right\}.$$

Bekanntlich ist, wenn v die von dem sich bewegenden Punkte am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, und s den von demselben in der Zeit t durchlaufenen Weg bezeichnet:

$$v^2=\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial s}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2,$$

also:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2=\frac{v^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2},\quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=\frac{v^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2=\frac{v^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2};$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{v^2\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}:\frac{\partial x}{\partial t}\right\}}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{v^2\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial z}{\partial t}:\frac{\partial y}{\partial t}\right\}}{\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{v^2\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial x}{\partial t}:\frac{\partial z}{\partial t}\right\}}{\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2}.$$

Wenn man diese Ausdrücke in die drei obigen Gleichungen der Bewegung einführt, dann annimmt, dass auf den sich bewe-

genden Punkt bloss die Schwere wirke, demzufolge $X=0$, $Y=0$ $Z=-2G$ setzt, und hierauf aus der zweiten und dritten Gleichung die Grösse P eliminirt, welches Alles nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{v^2}{2G}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}\right)+\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right\}$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\partial x-\frac{\partial u}{\partial x}\partial y\right)=0.$$

Diese Differentialgleichung und die Gleichung

$$f(x, y, z)=0$$

bestimmen die von dem sich bewegenden Punkte auf der Fläche beschriebene Curve.

Die Curven der grössten Neigung werden nach dem Obigen, durch die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y}\partial x-\frac{\partial u}{\partial x}\partial y=0,\quad f(x, y, z)=0$$

charakterisirt.

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so sieht man, dass auf einer Fläche ein Punkt, auf den bloss die Schwere wirkt *), keine Curve der grössten Neigung, sondern eine solche Curve jederzeit nur näherungsweise beschreibt, wenn v klein ist, und zwar jederzeit desto genauer, je kleiner v ist, eine Bemerkung, die in vieler Beziehung für die Praxis nicht ohne Wichtigkeit ist, was aber näher zu erläutern nicht an diesen Ort gehört.

---

*) Also z. B. das auf einer Fläche herab laufende Wasser.

XI.

Zur Lehre vom Dreieck.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer an der Marine-Akademie zu Triest.

Sind A_1, B_1, C_1 (Taf. X. Fig. 5.) die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise, welche beziehungsweise den Ecken A, B, C eines Dreieckes ABC gegenüberliegen, so gehen die Verbindungslinien A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 durch die Ecken C, B, A und stehen auf den Geraden CC_1, BB_1, AA_1, welche sich im Mittelpunkte o des eingeschriebenen Kreises schneiden, senkrecht. (S. Herrn Rump's Aufsatz: „Beiträge zur Geometrie im Archiv Theil XXVII. p. 35.). Da ferner $\angle A_1BC = \frac{1}{2}(180^0 - B)$, $\angle A_1CB = \frac{1}{2}(180^0 - C)$, so ist in dem Dreiecke A_1BC:

$$\angle A = 180^0 - \tfrac{1}{2}(180^0 - B) - \tfrac{1}{2}(180^0 - C) = \tfrac{1}{2}(B + C) = 90^0 - \tfrac{1}{2}A.$$

Auf dieselbe Art bestimmt man die Winkel bei B_1 und C_1, und man hat in dem Dreiecke $A_1B_1C_1$:

$$(1) \qquad A_1 = 90^0 - \tfrac{1}{2}A, \quad B_1 = 90^0 - \tfrac{1}{2}B, \quad C_1 = 90^0 - \tfrac{1}{2}C.$$

Nach der Figur ist auch der Winkel $x = 90^0 - \frac{1}{2}B$ und der Winkel $y = 90^0 - \frac{1}{2}C$; man hat daher, wenn $AC_1 = u$, $AB_1 = v$ gesetzt wird, im $\Delta\, ABC_1$ $u:c = \operatorname{Sin} x : \operatorname{Sin} C_1 = \operatorname{Cos}\frac{1}{2}B : \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C$, und im $\Delta\, AB_1C$ ist $v:b = \operatorname{Sin} y : \operatorname{Sin} B_1 = \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C : \operatorname{Cos}\frac{1}{2}B$, mithin ist

$$u = \frac{c \operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}, \quad v = \frac{b \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}, \quad B_1C_1 = u + v = \frac{c \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}B + b \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C};$$

da aber bekanntlich

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}B=\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac},\quad \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab};$$

so wird

$$c\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}B+b\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C=\frac{a+b+c}{4a}\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{bc}}=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A}{a},$$

mithin ist, wenn wir $B_1C_1=a_1$ setzen und die beiden andern Seiten des Dreieckes $A_1B_1C_1$ mit b_1 und c_1 bezeichnen:

$$(2)\quad\begin{cases} a_1=\dfrac{a}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A}=\dfrac{2a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)}},\\[2ex] b_1=\dfrac{b}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}=\dfrac{2b\sqrt{ac}}{\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}},\\[2ex] c_1=\dfrac{c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}=\dfrac{2c\sqrt{ab}}{\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}}.\end{cases}$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen kann man die Entfernungen a_1, b_1, c_1 der Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise eines Dreieckes berechnen, wenn die drei Seiten a, b, c desselben gegeben sind. In dem rechtwinkligen Dreiecke B_1C_1C ist der Winkel $z=90^0-B_1=90^0-(90^0-\frac{1}{2}B)=\frac{1}{2}B$; setzt man daher $oC_1=h_3$, $oB_1=h_2$, $oA_1=h_1$, so hat man aus dem rechtwinkligen Dreiecke AC_1o: $u=h_3\operatorname{Cos}z=h_3\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B$, mithin, wenn man für u seinen oben gefundenen Werth setzt und h_3 bestimmt:

$$(3)\quad\begin{cases} h_3=\dfrac{c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}=\dfrac{2c\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}},\ \text{und ebenso ist:}\\[2ex] h_2=\dfrac{b}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}=\dfrac{2b\sqrt{ac}}{\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)}},\\[2ex] h_1=\dfrac{a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}=\dfrac{2a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}.\end{cases}$$

Diese drei Gleichungen geben die Entfernungen h_1, h_2, h_3 des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises eines Dreieckes von den Mittelpunkten der drei äusseren Berührungskreise, wenn die drei Seiten a, b, c desselben gegeben sind.

Wir werden auf die Gleichungen (2) und (3) später wieder zurückkommen und geben nun über zur Auflösung folgender

Aufgabe.

Es sind die Radien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ der drei äusseren Berührungskreise eines Dreieckes gegeben, man soll das Dreieck auflösen.

Bezeichnet ϱ den Radius des eingeschriebenen Kreises und Δ den Flächenraum des Dreieckes, so ist (s. Archiv Thl. XXVII. p. 328.):

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} a+b+c=\dfrac{2\Delta}{\varrho}, \quad b+c-a=\dfrac{2\Delta}{\varrho_1}, \quad a+c-b=\dfrac{2\Delta}{\varrho_2}, \\ a+b-c=\dfrac{2\Delta}{\varrho_3}, \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \Delta=\sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3},$$

$$\text{(c)}\quad \frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}.$$

Da aus der Gleichung (c) folgt:

$$\text{(4)}\quad \varrho=\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3},$$

so erhält man durch Substitution in (b):

$$\text{(5)}\quad \Delta=\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$a+b+c=2\Delta\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}\right),$$

und wenn man von dieser Gleichung nach und nach die zweite, dritte und vierte in (a) subtrahirt, so ergibt sich:

$$a_1=\Delta\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}\right), \quad b=\Delta\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_3}\right), \quad c=\Delta\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right),$$

und wenn man für Δ seinen Werth aus (5) setzt und reducirt:

$$\text{(6)}\quad \begin{cases} a=\dfrac{\varrho_1(\varrho_2+\varrho_3)}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}, \\ b=\dfrac{\varrho_2(\varrho_1+\varrho_3)}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}, \\ c=\dfrac{\varrho_3(\varrho_1+\varrho_2)}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}. \end{cases}$$

Eliminirt man in den aus der ebenen Trigonometrie bekannten Gleichungen:

$$\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{1}{4bc}(a+c-b)(a+b-c),\quad \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{1}{4bc}(a+b+c)(b+c-a)$$

die drei Seiten a, b, c, indem aus (d) und (a) folgt:

$$bc=\Delta^2\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_3}\right)=\Delta^2\frac{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)}{\varrho_1{}^2\varrho_2\varrho_3},$$

$$(a+c-b)(a+b-c)=\frac{4\Delta^2}{\varrho_2\varrho_3},\quad (a+b+c)(b+c-a)=\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}\right)\frac{4\Delta^2}{\varrho_1};$$

so erhält man mit Leichtigkeit:

$$\mathrm{Sin}^2\frac{A}{2}=\frac{\varrho_1{}^2}{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)},\quad \mathrm{Cos}^2\frac{A}{2}=\frac{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)};$$

mithin ist

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{Sin}\dfrac{A}{2}=\dfrac{\varrho_1}{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)}}, \\[2ex] \mathrm{Sin}\dfrac{B}{2}=\dfrac{\varrho_2}{\sqrt{(\varrho_2+\varrho_1)(\varrho_2+\varrho_3)}}, \\[2ex] \mathrm{Sin}\dfrac{C}{2}=\dfrac{\varrho_3}{\sqrt{(\varrho_3+\varrho_1)(\varrho_3+\varrho_2)}}; \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{Cos}\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)}}, \\[2ex] \mathrm{Cos}\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}{\sqrt{(\varrho_2+\varrho_1)(\varrho_2+\varrho_3)}}, \\[2ex] \mathrm{Cos}\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}{\sqrt{(\varrho_3+\varrho_1)(\varrho_3+\varrho_2)}}; \end{cases}$$

woraus sogleich folgt:

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{Sin}\,A=2\varrho_1\dfrac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)}, \\[2ex] \mathrm{Sin}\,B=2\varrho_2\dfrac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}{(\varrho_2+\varrho_1)(\varrho_2+\varrho_3)}, \\[2ex] \mathrm{Sin}\,C=2\varrho_3\dfrac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}{(\varrho_3+\varrho_1)(\varrho_3+\varrho_2)}. \end{cases}$$

Die Gleichung (4) gibt den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises, ausgedrückt durch die Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der äusseren Berührungskreise. Will man ebenso den Radius r des dem Dreieck umschriebenen Kreises ausdrücken, so setze man in der bekannten Formel

$$r=\frac{abc}{4\Delta}$$

für a, b, c und Δ seine Werthe aus (6) und (5), und man erhält sofort:

$$r=\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}{\sqrt{(\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3)^3}}\cdot\frac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}{4\varrho_1\varrho_2\varrho_3},$$

$$(10)\qquad r=\frac{1}{4}\,\frac{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}.$$

Um die Entfernungen a_1, b_1, c_1 der Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise unter sich und die Entfernungen h_1, h_2, h_3 derselben vom Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises zu erhalten, haben wir die Gleichungen (2) und (3), welche durch Verbindung mit jenen (6), (7) und (8) unmittelbar geben:

$$(11)\qquad\left\{\begin{aligned}
a_1&=\sqrt{\varrho_2+\varrho_3}\cdot\frac{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}},\\
b_1&=\sqrt{\varrho_1+\varrho_3}\cdot\frac{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}},\\
c_1&=\sqrt{\varrho_1+\varrho_2}\cdot\frac{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}};
\end{aligned}\right.$$

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned}
h_1&=\varrho_1\sqrt{\varrho_2+\varrho_3}\cdot\frac{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}}{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3},\\
h_2&=\varrho_2\sqrt{\varrho_1+\varrho_3}\cdot\frac{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}}{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3},\\
h_3&=\varrho_3\sqrt{\varrho_1+\varrho_2}\cdot\frac{\sqrt{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_3)(\varrho_2+\varrho_3)}}{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3};
\end{aligned}\right.$$

$$h_1h_2h_3=16r^2\varrho.$$

Führt man in die Gleichungen (11) durch Verbindung mit (10) den Radius r ein, so erhält man auch:

$$(13)\qquad a_1^2=4r(\varrho_2+\varrho_3),\quad b_1^2=4r(\varrho_1+\varrho_3),\quad c_1^2=4r(\varrho_1+\varrho_2),$$

und da man diese Gleichungen auch unter der Form schreiben kann:

$$a_1^2=2r(2\varrho_2+2\varrho_3),\quad b_1^2=2r(2\varrho_1+2\varrho_3);\quad c_1^2=2r(2\varrho_2+2\varrho_3),$$

so wird ersichtlich, dass die Entfernung der Mittelpunkte zweier äusserer Berührungskreise die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen dem Durchmesser des umschriebenen Kreises und der Summe der Durchmesser jener zwei äusseren Berührungskreise.

Bezeichnen wir die drei Perpendikel, welche von den Ecken A, B, C eines Dreieckes ABC auf die gegenüberstehenden Seiten a, b, c gefällt werden mit p_1, p_2, p_3, so ist

$$2\varDelta=ap_1,\quad 2\varDelta=bp_2,\quad 2\varDelta=cp_3$$

oder

$$a=\frac{2\varDelta}{p_1},\quad b=\frac{2\varDelta}{p_2},\quad c=\frac{2\varDelta}{p_3},$$

und wenn man diese Werthe von a, b, c in die Gleichungen (a) einführt und dann durch $2\varDelta$ abkürzt, so erhält man:

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\varrho}&=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3},\\ \frac{1}{\varrho_1}&=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_1},\\ \frac{1}{\varrho_2}&=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_2},\\ \frac{1}{\varrho_3}&=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3};\end{aligned}\right.$$

mithin ist auch

$$(15)\qquad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=\frac{1}{\varrho},$$

d. h. die Summe der reciproken Werthe der Perpendikel ist gleich der Summe der reciproken Werthe der Radien der äusseren Berührungskreise oder gleich dem reciproken Werthe des Radius des eingeschriebenen Kreises.

Zieht man von der Gleichung (15) nach und nach die zweite, dritte und vierte der Gleichungen (14) ab, so gelangt man zu folgenden Relationen:

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{p_1}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}\right),\quad \frac{1}{p_2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_3}\right),\quad \frac{1}{p_3}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right),\\ &p_1=\frac{2\varrho_2\varrho_3}{\varrho_2+\varrho_3},\qquad p_2=\frac{2\varrho_1\varrho_3}{\varrho_1+\varrho_3},\qquad p_3=\frac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}.\end{aligned}\right.$$

Wenn wir denjenigen äusseren Berührungskreis, dessen Radius ϱ_1 ist, in Bezug auf das Perpendikel p_1 den gegenüberliegenden Berührungskreis, die beiden anderen aber anliegende Berührungskreise nennen und dieselben Begriffe in Bezug auf die Perpendikel p_2, p_3 festhalten, so kann man sagen: Der reciproke Werth eines Perpendikels ist gleich dem arithmetischen Mittel der reciproken Werthe der Radien seiner anliegenden Berührungskreise.

Die vorstehenden Gleichungen enthalten die Auflösung eines Dreieckes, wenn die Radien der drei äusseren Berührungskreise gegeben sind. Auf ähnliche Weise gelangt man zur Auflösung des Dreieckes, wenn der Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises und die Radien ϱ_1, ϱ_2 zweier äusserer Berührungskreise gegeben sind, wie sich überhaupt zwischen den hier in Betracht gezogenen Stücken noch manche bemerkenswerthe Relationen ableiten lassen.

Anmerkung. Aehnliche Relationen, wie jene (14), (15) und (16) lassen sich auch für die dreiseitige Pyramide aufstellen, wie folgt: Bezeichnen wir die Seitenflächen derselben, beziehungsweise den Ecken A, B, C, D, mit a, b, c, d, den Radius der eingeschriebenen Kugel mit ϱ, die Radien der vier äusseren Berührungskugeln mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 und das Volumen der Pyramide mit V, so ist:

$$(17)\quad \begin{cases} V=\frac{1}{3}(a+b+c+d)\varrho, \\ V=\frac{1}{3}(b+c+d-a)\varrho_1, \\ V=\frac{1}{3}(a+c+d-b)\varrho_2, \\ V=\frac{1}{3}(a+b+d-c)\varrho_3, \\ V=\frac{1}{3}(a+b+c-d)\varrho_4, \end{cases}$$

$$(18)\quad \frac{1}{\varrho}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_4}\right).$$

(S. Archiv. Thl. XXVIII. p. 99.) Sind ferner p_1, p_2, p_3, p_4 die vier Perpendikel, welche von den Ecken A, B, C, D auf die gegenüberstehenden Seitenflächen gefällt werden, so ist auch

$$V=\frac{1}{3}ap_1,\quad V=\frac{1}{3}bp_2,\quad V=\frac{1}{3}cp_3,\quad V=\frac{1}{3}dp_4;$$

mithin

$$a=\frac{3V}{p_1},\quad b=\frac{3V}{p_2},\quad c=\frac{3V}{p_3},\quad d=\frac{3V}{p_4}.$$

Setzt man diese Werthe von a, b, c, d in die Gleichungen (17), so erhält man:

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho} &= \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4},\\
\frac{1}{\varrho_1} &= \frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}-\frac{1}{p_1},\\
\frac{1}{\varrho_2} &= \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}-\frac{1}{p_2},\\
\frac{1}{\varrho_3} &= \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_4}-\frac{1}{p_3},\\
\frac{1}{\varrho_4} &= \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_4}.
\end{aligned}\right.$$

Die erste dieser fünf Gleichungen gibt in Verbindung mit jener (18):

$$(20)\qquad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_4}\right),$$

und wenn man von dieser Gleichung nach und nach die zweite, dritte, vierte und fünfte der Gleichungen (19) subtrahirt, so ergibt sich leicht folgendes System von vier Gleichungen:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{p_1} &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_4}-\frac{1}{\varrho_1}\right),\\
\frac{1}{p_2} &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_4}-\frac{1}{\varrho_2}\right),\\
\frac{1}{p_3} &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_4}-\frac{1}{\varrho_3}\right),\\
\frac{1}{p_4} &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}-\frac{1}{\varrho_4}\right).
\end{aligned}\right.$$

XII.

Eine andere Auflösung der im Archiv Band XXVIII. Heft 3. Seite 344. behandelten Aufgabe.

Von

Herrn Professor *F. H. Rump*
am Gymnasium zu Cösfeld.

Von einem Dreiecke AOB (Taf. X. Fig. 9.) seien die beiden Seiten $OA=a$, $OB=b$ und der von denselben eingeschlossene Winkel $AOB=i$ gegeben. Man soll diese Seiten um zwei Stücke AC und BD verlängern, so dass diese Stücke in einem gegebenen Verhältnisse $m:n$ stehen und die ihre Endpunkte verbindende gerade Linie CD eine gegebene Grösse c hat.

Geometrische Auflösung.

Construction. Schneide von der Seite OA ein Stück OP ab, so dass sich verhält $OP:OB=m:n$ und ziehe PB. Verlängere hierauf AB um sich selbst bis L und schlage mit c als Radius aus L einen Bogen, der die PB in M trifft. Ziehe dann aus M eine zu AO parallele Linie, welche die OB in N schneidet und verlängere die Seite OA um $AC=NM$ und die Seite OB um $BD=NB$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Beweis. I. Es ist $AC:BD=NM:NB=OP:OB=m:n$. Die Verlängerungen haben also das verlangte Verhältniss.

II. Ziehe AK parallel OD, DK parallel BA und verbinde C mit K, C mit D und M mit L. Dann ist, da $AC=NM$, $AK=BD=NB$ und der Winkel $CAK=MNB$ ist, auch $\triangle CAK \cong \triangle MNB$, und folglich $CK=MB$, ferner $CKA=MBN$; und daher ist auch, wenn man zu beiden Seiten die gleichen Winkel

AKD und NBL hinzufügt, der Winkel $CKD = MBL$. Da nun überdiess auch $KD = AB = BL$, so ist $\triangle CKD \cong \triangle MBL'$ und folglich $CD = ML = c$. Es hat also die Verbindungslinie CD die verlangte Grösse.

Nach Anweisung der vorstehenden geometrischen Behandlung ergiebt sich nun folgende

Trigonometrische Auflösung.

a. Aus dem Dreiecke AOB ergiebt sich

$$\operatorname{tng}\beta = \frac{a\sin i}{b - a\cos i}.$$

b. Aus dem Dreiecke POB, in welchem $OP = \frac{m}{n}.OB = \frac{mb}{n}$ ist, ergiebt sich

$$\operatorname{tng}\eta = \frac{m\sin i}{n - m\cos i}.$$

c. Aus dem Dreiecke MBL, in welchem

$$BL = AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos i}$$

ist, ergiebt sich nun

$$\sin\varepsilon = \frac{BL.\sin(\beta-\eta)}{ML} = \frac{\sin(\beta-\eta)\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos i}}{c}.$$

d. In demselben Dreiecke MBL ist nun ferner

$$MB = \frac{ML.\sin(\beta-\eta-\varepsilon)}{\sin(\beta-\eta)} = \frac{c\sin(\beta-\eta-\varepsilon)}{\sin(\beta-\eta)}.$$

e. Setzen wir nun $AC = x$ und $BC = y$, so ergiebt sich aus dem Dreiecke MNB:

$$x = MN = \frac{MB.\sin\eta}{\sin i} = \frac{c\sin(\beta-\eta-\varepsilon)\sin\eta}{\sin(\beta-\eta)\sin i};$$

$$y = NB = \frac{MB.\sin(\eta+i)}{\sin i} = \frac{c\sin(\beta-\eta-\varepsilon)\sin(\eta+i)}{\sin(\beta-\eta)\sin i}.$$

Wir haben also zur Auflösung unserer Aufgabe folgende Formeln:

$$(1)\qquad \operatorname{tng}\beta = \frac{a\sin i}{b - a\cos i};$$

$$(2)\qquad \operatorname{tng}\eta = \frac{m\sin i}{n - m\cos i};$$

$$(3)\qquad \sin\varepsilon = \frac{\sin(\beta-\eta)\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos i}}{c};$$

$$(4)\qquad x = \frac{c\sin(\beta-\eta-\varepsilon)\sin\eta}{\sin(\beta-\eta)\sin i};$$

$$(5)\qquad y = \frac{c\sin(\beta-\eta-\varepsilon)\sin(\eta+i)}{\sin(\beta-\eta)\sin i}.$$

Zusatz. Setzen wir $\frac{m}{n}=\mu$ und $\frac{a}{b}=\nu$, so gehen die drei ersten der vorstehenden Formeln über in:

$$(1)\qquad \operatorname{tng}\beta = \frac{\nu\sin i}{1-\nu\cos i};$$

$$(2)\qquad \operatorname{tng}\eta = \frac{\mu\sin i}{1-\mu\cos i};$$

$$(3)\qquad \sin\varepsilon = \frac{b}{c}\sin(\beta-\eta)\sqrt{1+\nu^2-2\nu\cos i}.$$

XIII.

Beweis, dass die sämmtlichen Wurzeln der cubischen Gleichung $(x-a)(x-b)(x-c)-d^2(x-a)-e^2(x-b)-f^2(x-c)+2def=0$ reell sind.

Von

dem Herausgeber.

Den von Herrn Sylvester gegebenen schönen Beweis, dass die sämmtlichen Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(x-a)(x-b)(x-c)-d^2(x-a)-e^2(x-b)-f^2(x-c)+2def=0$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$A = a + b + c,$$
$$B = ab + bc + ca - d^2 - e^2 - f^2,$$
$$C = abc - ad^2 - be^2 - cf^2 - 2def$$

setzt, die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

sämmtlich reell sind, kann man, auch ohne auf die allgemeine Theorie der Determinanten zurückzugehen, einfach und ganz elementar auf folgende Art darstellen.

Man setze

$$f(x) = x^3 - Ax^2 + Bx - C,$$

so ist

$$f(-x) = -x^3 - Ax^2 - Bx - C;$$

also:

$$f(x) = (x^3 + Bx) - (Ax^2 + C),$$
$$f(-x) = -(x^3 + Bx) - (Ax^2 + C);$$

und folglich:

$$-f(x).f(-x) = (x^3 + Bx)^2 - (Ax^2 + C)^2,$$

woraus sich sogleich

$$-f(x).f(-x) = x^6 - (A^2 - 2B)x^4 + (B^2 - 2AC)x^2 - C^2$$

ergiebt.

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$A^2 - 2B = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca - d^2 - e^2 - f^2)$$
$$= \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$
$$-2(ab + bc + ca - d^2 - e^2 - f^2),$$

folglich offenbar:

$$A^2 - 2B = a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2 + 2e^2 + 2f^2,$$

woraus sich ergiebt, dass $A^2 - 2B$ eine positive Grösse ist.

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
B^2-2AC = &\ (ab+bc+ca-d^2-e^2-f^2)^2 \\
&-2(a+b+c)(abc-ad^2-be^2-cf^2-2def) \\
= &\ (ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ca)(d^2+e^2+f^2)+(d^2+e^2+f^2)^2 \\
&-2abc(a+b+c)+2(a+b+c)(ad^2+be^2+cf^2+2def) \\
= &\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-2(ab+bc+ca)(d^2+e^2+f^2)+(d^2+e^2+f^2)^2 \\
&+2(a+b+c)(ad^2+be^2+cf^2+2def) \\
= &\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+(d^2+e^2+f^2)^2+4(a+b+c)def \\
&+2(a^2-bc)d^2+2(b^2-ca)e^2+2(c^2-ab)f^2 \\
= &\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2d^2+2b^2e^2+2c^2f^2 \\
&-2abf^2-2bcd^2-2cae^2+4adef+4bdef+4cdef \\
&+f^4+d^4+e^4+2e^2f^2+2d^2f^2+2d^2e^2 \\
= &\ (ab-f^2)^2+(bc-d^2)^2+(ca-e^2)^2 \\
&+2(ad+ef)^2+2(be+df)^2+2(cf+de)^2,
\end{aligned}$$

woraus sich ergiebt, dass auch B^2-2AC eine positive Grösse ist.

Setzen wir der Kürze wegen

$$A_1=A^2-2B,\quad B_1=B^2-2AC,\quad C_1=C^2;$$

so sind A_1, B_1, C_1 lauter positive Grössen, und nach dem Obigen ist:

$$-f(x).f(-x)=x^6-A_1x^4+B_1x^2-C_1.$$

Hätte nun die Gleichung

$$f(x)=0$$

die imaginäre Wurzel $q\sqrt{-1}$, so dass

$$f(q\sqrt{-1})=0$$

wäre, so wäre auch

$$f(q\sqrt{-1}).f(-q\sqrt{-1})=0,$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$-f(q\sqrt{-1}).f(-q\sqrt{-1})=(q\sqrt{-1})^6-A_1(q\sqrt{-1})^4+B_1(q\sqrt{-1})^2-C_1$$

ist:

$$(q\sqrt{-1})^6-A_1(q\sqrt{-1})^4+B_1(q\sqrt{-1})^2-C_1=0,$$

also:

$$-q^6-A_1q^4-B_1q^2-C_1=0$$

oder:

$$q^6+A_1q^4+B_1q^2+C_1=0,$$

was offenbar ungereimt ist, da nach dem Obigen die Coefficienten A_1, B_1, C_1 sämmtlich positiv sind.

Hätte ferner die Gleichung

$$f(x)=0$$

die imaginäre Wurzel

$$x=p+q\sqrt{-1},$$

so setze man

$$x=p+x_1,$$

wo $x_1=q\sqrt{-1}$ ist, und:

$$a=p+a_1,\quad b=p+b_1,\quad c=p+c_1;$$

also:

$$x-a=x_1-a_1,\quad x-b=x_1-b_1,\quad x-c=x_1-c_1.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)-d^2(x-a)-e^2(x-b)-f^2(x-c)+2def$$

ist, so ist

$$f(x)=(x_1-a_1)(x_1-b_1)(x_1-c_1)-d^2(x_1-a_1)-e^2(x_1-b_1)$$
$$-f^2(x_1-c_1)+2def,$$

und folglich, weil nach der gemachten Voraussetzung

$$f(x)=f(p+q\sqrt{-1})=0$$

ist:

$$(x_1-a_1)(x_1-b_1)(x_1-c_1)-d^2(x_1-a_1)-e^2(x_1-b_1)$$
$$-f^2(x_1-c_1)+2def=0,$$

wo bekanntlich $x_1=q\sqrt{-1}$ ist. Also hätte die Gleichung

$$(x-a_1)(x-b_1)(x-c_1)-d^2(x-a_1)-e^2(x-b_1)-f^2(x-c_1)+2def=0$$

die imaginäre Wurzel $q\sqrt{-1}$, was nach dem vorher Bewiesenen ungereimt ist, da oben ganz im Allgemeinen gezeigt worden ist.

dass keine Gleichung von dieser Form eine imaginäre Wurzel von der Form $q\sqrt{-1}$ haben kann. Also kann auch die Gleichung

$$f(x)=0$$

keine imaginäre Wurzel von der Form $p+q\sqrt{-1}$ haben, so dass folglich alle Wurzeln dieser Gleichung reell sind, wie bewiesen werden sollte.

XIV.

Entwickelung der Gleichung aller derjenigen Drehungsflächen, welche für je eine Schnittebene nur einen Parallelkreis zulassen.

Von

Herrn Professor *Friedrich Mann*
an der Kantonsschule in Frauenfeld.

Nehmen wir an, es sei die Axe OZ des rechtwinkeligen Coordinatensystems Drehungsaxe, so muss die Gleichung jeder solchen Drehungsfläche offenbar so beschaffen sein, dass sie in die Mittelpunktsgleichung eines Kreises übergeht, sowie man sich in ihr z constant denkt. Diese Flächengleichung muss daher auf die Form

$$x^2+y^2=f_z \tag{1}$$

gebracht werden können. Eine Gleichung von dieser Beschaffenheit zu haben, ist gemeinsamer Charakter aller Drehungsflächen der bezeichneten Art. Jeder Spezialität innerhalb der Gruppe dieser Flächen entspricht natürlich ein besonderer Bau des Ausdrucks f_z, welcher gefunden werden kann, sowie man

das kennt, was die Fläche in ihrer Besonderheit charakterisirt, nämlich die Erzeugende. Ist z. B. die Gleichung der in die Ebene ZOY fallenden Meridiancurve bekannt, so lässt sich f_z sofort bestimmen. Denn $x^2+y^2=f_z$ geht offenbar in die Gleichung dieser Meridiancurve über, wenn man $x=0$ setzt. Hieraus erhellet, dass f_z nichts anderes ist, als der Werth, welcher dem y^2 jener Meridiancurve zukommt. Hat man daher die Gleichung dieser (in YOZ liegenden) Meridiancurve, so darf man derselben nur den Werth von y^2 entnehmen und denselben in Gleichung (1) an die Stelle von f_z setzen, um die Gleichung der besonderen Drehungsfläche zu haben, um deren Auffindung es sich handelt.

Beispiele.

1) Ist die Erzeugende eine Ellipse, deren Mittelpunkt in O, deren grosse Axe $2a$ längs OY und deren kleine Axe $2b$ längs OZ fällt, so ist die Gleichung der in ZOY liegenden Meridiancurve

$$a^2z^2+b^2y^2=a^2b^2.$$

Der dem y^2 zukommende Werth, d. h. das f_z, ist daher in diesem besonderen Falle

$$=a^2-\frac{a^2}{b^2}.z^2.$$

und daher die Gleichung der betreffenden Drehungsfläche (d. h. die Mittelpunktsgleichung eines **Drehungsellipsoids** mit den Axenlängen $2a$ und $2b$):

$$x^2+y^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}z^2,$$

oder

$$b^2.(x^2+y^2)=a^2b^2-a^2z^2,$$

oder endlich

$$a^2z^2+b^2(x^2+y^2)=a^2b^2.$$

In ganz ähnlicher Weise gelangt man zu den Gleichungen des Drehungshyperboloids und des Drehungsparaboloids.

2) Die Erzeugende sei eine Gerade, welche die Drehungsaxe OZ unter einem Winkel schneidet, dessen Tangente $=m$ ist und welche zugleich durch O geht. In diesem Falle ist die Gleichung der in ZOY liegenden Meridiancurve:

$$y = \pm mz,$$

also der dem y^2 zukommende Werth, d. h. das $f_{z^2} = m^2 z^2$. Die Drehungsfläche (welche in diesem Falle ein Drehungskegel sein muss, dessen Spitze in O liegt und welchem m als Tangente des erzeugenden Winkels entspricht) hat daher zur Gleichung:

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2.$$

XV.

Ueber die Bestimmung der Anzahl aller Zahlen, welche relative Primzahlen zu einer gegebenen Zahl und kleiner als diese sind.

Von

Herrn *J. B. Sturm*,

geprüftem Lehramts-Kandidaten zu Regensburg.

In der Schrift: „Elemente der Zahlen-Theorie von Dr. Herm. Schwarz. Halle. 1855.“ findet sich auf Seite 14 u. f. für die in Rede stehende Bestimmung ein Beweisverfahren, dem eine strenge Verallgemeinerung abgeht. Da diese indess auf dem dort betretenen Wege ohne grosse Weitschweifigkeit schwerlich möglich sein dürfte, so glaube ich, dass eine Modifikation der fraglichen Beweisführung wünschenswerth sein dürfte, und ich theile daher im Nachfolgenden eine solche mit, von der ich dafür halte, dass sie sowohl allen Anforderungen strenger Wissenschaftlichkeit genüge, als auch in praktischer Beziehung die Bestimmung der Anzahl aller Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl und zu dieser relative Primzahlen sind, vielleicht auf die kürzeste und einfachste Weise, die möglich ist, gebe.*)

---

*) Man vergl. meine Darstellung des in Rede stehenden wichtigen Gegenstandes im Archiv. Thl. III. Nr. XX. S. 196. G.

Die Anzahl $S'N$ aller Zahlen, welche kleiner als irgend eine Zahl N und zu dieser relative Primzahlen sind, wird in ganz natürlicher Weise dadurch erhalten, dass man in der Reihe der Zahlen von 1 bis N alle diejenigen streicht, welche einen Theiler mit N gemeinschaftlich haben. Bezeichnen nun $a, b, c \ldots.$ von einander verschiedene absolute Primzahlen, so ergibt sich für die Bestimmung von $S'N$ folgender Weg:

1) Zuerst werden aus der Reihe der Zahlen von 1 bis N alle die gestrichen, welche den Theiler a mit N gemein haben; ihre Anzahl sei x und sonach die der übrig bleibenden $N-x$;

2) aus diesen werden jetzt diejenigen weggelassen, welche den Theiler b mit N gemeinschaftlich besitzen; ihre Anzahl sei y, sonach die der noch übrig bleibenden $N-x-y$;

3) aus diesen streicht man jetzt diejenigen, welche den Theiler c mit N gemein haben; ihre Anzahl sei z, also die der noch übrigen $N-x-y-z$;

u. s. f.

Dieses Verfahren lässt nun aber eine sehr bemerkenswerthe Modifikation zu, die jetzt zuerst ausgesprochen und dann gerechtfertigt werden soll. Es kann nämlich abgeändert werden

2) dahin, dass man in der Reihe der Zahlen von 1 bis $N-x$ alle die ausschliesst, welche durch den Theiler b von N theilbar sind;

3) dahin, dass man in der Reihe der Zahlen von 1 bis $N-x-y$ alle die streicht, welche den Theiler c mit N gemeinschaftlich haben;

u. s. f.

Für die Zahl 105, welche die absoluten Primtheiler 3, 5, 7 hat, gestaltet sich das so eben erwähnte Verfahren folgendermaassen:

$$\begin{array}{rl} & 105 \\ & 35 = \text{Anzahl der durch 3 theilbaren Zahlen von 1 bis 105;} \\ \hline \text{Rest} = & 70 \\ & 14 = \text{Anzahl der durch 5 theilbaren Zahlen von 1 bis 70;} \\ \hline \text{Rest} = & 56 \\ & 8 = \text{Anzahl der durch 7 theilbaren Zahlen von 1 bis 56;} \\ \hline \text{Rest} = & 48 = S'105. \end{array}$$

In welcher Ordnung die absoluten Primtheiler 3, 5, 7 genommen werden, ist ganz gleichgiltig; so hätte man in unserm Beispiele unter Anderm auch so verfahren können:

$$\begin{array}{rl} & 105 \\ & \underline{21} = \text{Anzahl der durch 5 theilbaren Zahlen von 1 bis 105;} \\ \text{Rest} = & 84 \\ & \underline{12} = \text{Anzahl der durch 7 theilbaren Zahlen von 1 bis 84;} \\ \text{Rest} = & 72 \\ & \underline{24} = \text{Anzahl der durch 3 theilbaren Zahlen von 1 bis 72;} \\ \text{Rest} = & 48 = S'105. \end{array}$$

Nun zur Rechtfertigung.

Ist die Zahl N durch a theilbar, so ist die Anzahl aller durch a theilbaren Zahlen von 1 bis N selbstverständlich $=\frac{N}{a}$, indem sie nämlich die folgenden sind:

$$\text{A)} \qquad a,\ 2a,\ 3a,\ 4a \ldots \left(\frac{N}{a}\right)a.$$

Nun theile man die Zahlen von 1 bis N in a Gruppen, so werden in jeder Gruppe $\frac{N}{a}$ Glieder vorkommen, also gerade so viele, als es von 1 bis N durch a theilbare Zahlen gibt, und nehme an, dass es in der letzten Gruppe x Zahlen gebe, welche durch x theilbar sind, nämlich die Zahlen:

$$\text{B)} \ \left(\frac{N}{a}-x+1\right)a,\ \left(\frac{N}{a}-x+2\right)a,\ldots \left(\frac{N}{a}-1\right)a,\ \left(\frac{N}{a}\right)a.$$

Dividirt man jetzt die Glieder der letzten Gruppe durch b, so haben die Reste folgende Reihenfolge:

$$\text{C)} \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots (b-1),\ 0,$$

die sich so oft wiederholt, als der Quotient $\frac{N}{ab}$ angibt. Schreibt man ferner die Zahlenreihe A) in Form folgender Horizontalreihen:

$$\begin{array}{cccccc} a, & 2a, & 3a, & 4a, \ldots & (b-1)a, & ba; \\ (b+1)a, & (b+2)a, & (b+3)a, & (b+4)a, \ldots & (2b-1)a, & 2ba; \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{N}{a}-b+1\right)a, & \left(\frac{N}{a}-b+2\right)a, \ldots & & & \left(\frac{N}{a}-1\right)a, & \left(\frac{N}{a}\right)a; \end{array}$$

deren Anzahl selbstredend ebenfalls $\frac{N}{ab}$ ist, so überzeugt man sich auf der Stelle, dass, wenn durch b dividirt wird, die einzelnen Horizontalreihen die nämlichen Reste in der nämlichen Aufeinanderfolge geben, und dass die Reste, wie sie in jeder Horizontalreihe vorkommen, gerade so viele und dieselben sind, als in C), nur mit dem Unterschiede einer anderen Aufeinanderfolge, mit einziger Ausnahme des Restes 0, der überall an der letzten Stelle steht. Diess festgehalten, wird man vor und nach jeder der Zahlen in B), die letzte ausgenommen, die übrigen Multipla von a, welche in den ersten $(a-1)$ Gruppen vorkommen, der Art beiordnen können, dass, wenn nach dieser Anordnung durch b dividirt wird, die Reihenfolge der Reste die nämliche ist, als in C). Hieraus folgt nun der wichtige Satz:

> Wenn die Reihe der Zahlen von 1 bis N, die durch die von einander verschiedenen absoluten Primzahlen $a, b, c, d, \ldots$ u. s. f. theilbar ist, in a Gruppen getheilt wird, und man hierauf diejenigen Zahlen ausscheidet, welche durch a theilbar sind, so werden die in der letzten Gruppe übrig bleibenden in Bezug auf die Reste bei der Division durch $b, c, d,$ u. s. f. vollkommen ersetzt durch die in den ersten $(a-1)$ Gruppen gestrichenen Zahlen;

durch welchen Satz der oben angegebene Weg zur Bestimmung von $S'N$ vollkommen gerechtfertigt ist.

Da bekanntlich die Zahl N unter der Form: $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ dargestellt werden kann, so ist: $S'N = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1)\ldots$, denn man hat nach und nach:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

$$a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots = \text{Anzahl der durch } a \text{ theilb. Zahlen von 1 bis } N$$

$$\text{Rest} = a^{\alpha-1}(a-1) b^\beta c^\gamma \ldots$$

$$a^{\alpha-1}(a-1) b^{\beta-1} c^\gamma \ldots = \text{Anzahl der durch } b \text{ theilbaren Zahlen von 1 bis } a^{\alpha-1}(a-1) b^\beta c^\gamma \ldots$$

$$\text{Rest} = a^{\alpha-1}(a-1) b^{\beta-1}(b-1) c^\gamma \ldots$$

$$a^{\alpha-1}(a-1) b^{\beta-1}(b-1) c^{\gamma-1} \ldots = \text{Anzahl der durch } c \text{ theilbaren Zahlen von 1 bis } a^{\alpha-1}(a-1) b^{\beta-1}(b-1) c^\gamma \ldots$$

$$\text{Rest} = a^{\alpha-1}(a-1) b^{\beta-1}(b-1) c^{\gamma-1}(c-1) \ldots,$$

u. s. f.,

also

$$S'N = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\gamma-1}(c-1)\ldots.$$

oder

$$S'N = N(1-\frac{1}{a})(1-\frac{1}{b})(1-\frac{1}{c})\ldots.$$

XVI.

Elementarer Beweis der Reihen für den Sinus und Cosinus durch den Bogen.

Von
dem Herausgeber.

Elementare Beweise der Reihen für den Sinus und Cosinus durch den Bogen sind für den Unterricht in der Trigonometrie so wichtig, dass jeder Versuch, dieselben möglichst zu vereinfachen und zu völliger Strenge zu erheben, willkommen geheissen werden muss, auch selbst dann, wenn er sich nur an bereits Bekanntes anschliessen sollte. Freilich liegt es in der Natur der Sache, dass diese Beweise nie ganz einfach ausfallen können; wenn sie sich aber nur an ganz elementare arithmetische Sätze anschliessen, aus der Trigonometrie nur solche Sätze in Anspruch nehmen, welche der Elementar-Unterricht in dieser Wissenschaft nicht leicht übergehen wird, und ausserdem auf einer wenig verwickelten, leicht übersehbaren Schlussfolgerung beruhen: so scheint den Ansprüchen, welche der Elementar-Unterricht zu machen berechtigt ist, genügt zu sein. Ein grosser Gewinn wird es sein, wenn durch solche strenge, möglichst elementare Beweise endlich die ganz unwissenschaftlichen sogenannten Beweise oder Entwickelungen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten und andere

gleich verwerfliche Methoden, mit welchen man die Jugend, zum grössten Schaden für die mathematische Ausbildung derselben, immer noch hin und wieder in einem analytischen Labyrinth herumzuführen beliebt, in welchem kein Weg zum gedeihlichen Ende führt, ganz aus dem mathematischen Elementar-Unterrichte verdrängt werden; denn wie verwerflich namentlich die genannte Methode ist, hat nur erst neuerlich ein als ganz missglückt zu betrachtender und als solcher nachgewiesener Versuch, durch welchen derselben in der höheren Analysis, wer weiss aus welchem Grunde, einige Concessionen gemacht werden sollten, wiederholt auf das Deutlichste bewiesen. Da diese Methode aber immer noch hin und wieder benutzt wird, so kann man nicht oft genug auf deren Schädlichkeit hinweisen.

Der Beweis, welchen ich im Folgenden für die erwähnten Reihen geben werde, ist keineswegs ganz neu, sondern sucht nur auf möglichst einfache, aber strenge Weise den ältesten Beweis, welcher für diese Reihen gegeben worden ist, darzustellen; und es wird mich freuen, wenn derselbe für den so wichtigen trigonometrischen Unterricht sich geeignet erweisen und auch durch Mittheilung dieses Beweises das Archiv einen seiner Hauptzwecke, zur Verbesserung des mathematischen Unterrichts beizutragen, erreichen sollte. Ich wüsste in der That nicht, welcher der im Folgenden angewandten Schlüsse sich einem gut vorbereiteten Anfänger nicht sollte zu völliger Deutlichkeit bringen lassen, wodurch — wie es Hauptziel jedes Unterrichts sein muss — allein völlige Ueberzeugung bewirkt werden kann. Ich möchte doch einmal die Herren, welche sich immer noch der Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen, auf ihr Gewissen fragen: ob sie denn wirklich von der Richtigkeit aller ihrer Schlüsse bei derselben und der Resultate, welche sie durch dieselbe herausbringen, selbst vollkommen überzeugt sind? oder ob sie nicht der Jugend etwas vordemonstriren, was sie selbst, wenn sie aufrichtig gegen sich sein wollen, für leere Spiegelfechterei halten müssen? Den Hinweis auf verschiedene neuerlich erschienene Schriften will ich mir ersparen.

I.

Um die Reihe für den Sinus zu erhalten, nehme ich, wie schon die älteren Analytiker thaten, von der folgenden Reihe, welche für ein positives ganzes n ein nur einigermaassen ausführlicher *) trigonometrischer Elementar-Unterricht durch den

*) Ein anderer wird sich natürlich auch nicht auf die Entwickelung der Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ einlassen, und für einen solchen schreibe ich nicht.

Schluss von n auf $n+1$ *) zu beweisen wohl schwerlich unterlassen wird, meinen Auslauf:

$$\sin nx = n_1 \cos x^{n-1} \sin x - n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 + n_5 \cos x^{n-5} \sin x^5 - \ldots\ldots,$$

wo hier und im Folgenden wie gewöhnlich

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5,\ldots.$$

die Binomial-Coefficienten für den positiven ganzen Exponenten n bezeichnen, übrigens die Reihe so weit fortgesetzt wird, bis sie wegen der verschwindenden Binomial-Coefficienten von selbst abbricht.

Setzt man $\frac{x}{n}$ für x, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sin x = &\frac{n}{1}(\cos\frac{x}{n})^{n-1}\sin\frac{x}{n}\\ &-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos\frac{x}{n})^{n-3}(\sin\frac{x}{n})^3\\ &+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}(\cos\frac{x}{n})^{n-5}(\sin\frac{x}{n})^5\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\sin x = &\ n(\cos\frac{x}{n})^{n-1}\sin\frac{x}{n}\\ &-\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1.2.3}n^3(\cos\frac{x}{n})^{n-3}(\sin\frac{x}{n})^3\\ &+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})(1-\frac{4}{n})}{1.2.3.4.5}n^5(\cos\frac{x}{n})^{n-5}(\sin\frac{x}{n})^5\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

*) Schon um den Anfänger mit diesem so wichtigen Schlusse immer mehr und mehr vertraut zu machen, sollte man die Entwickelung der fraglichen Reihe oder Gleichung bei'm trigonometrischen Elementar-Unterrichte nie unterlassen, da dieselbe so leicht und instructiv zu geben ist.

oder:

$$\sin x = x(\cos\frac{x}{n})^{n-1}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$$

$$-\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1.2.3}x^3(\cos\frac{x}{n})^{n-3}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^3$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})(1-\frac{4}{n})}{1.2.3.4.5}x^5(\cos\frac{x}{n})^{n-5}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^5$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

immer die Reihe so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht, so dass wir es also für jetzt hier immer mit einer endlichen Reihe, d. h. mit einer Reihe von endlicher Gliederzahl, zu thun haben.

Bezeichnet nun $2k$ eine positive gerade Zahl, welche kleiner als n ist, so kann man die obige Reihe auf folgende Art in zwei Theile theilen:

$$\sin x = x(\cos\frac{x}{n})^{n-1}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$$

$$-\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1.2.3}x^3(\cos\frac{x}{n})^{n-3}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^3$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})(1-\frac{4}{n})}{1.2.3.4.5}x^5(\cos\frac{x}{n})^{n-5}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^5$$

u. s. w.

$$+(-1)^k\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{2k}{n})}{1.2.3\ldots(2k+1)}x^{2k+1}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k-1}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k+1}$$

$$+R_k,$$

wo

$$R_k = (-1)^{k+1}\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{2k+2}{n})}{1.2.3....(2k+3)}x^{2k+3}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k-3}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k+3}$$

$$+(-1)^{k+2}\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{2k+4}{n})}{1.2.3....(2k+5)}x^{2k+5}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k-5}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k+5}$$

$$+(-1)^{k+3}\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{2k+6}{n})}{1.2.3....(2k+7)}x^{2k+7}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k-7}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k+7}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist, die Reihe rechts so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht.

Bezeichnen wir nun den absoluten Werth von x durch $\mathfrak{r}$, den absoluten Werth von R_k durch $\mathfrak{R}_k$, so ist offenbar, wie gross man auch die positive ganze Zahl n annehmen mag, immer

$$\mathfrak{R}_k < \frac{\mathfrak{r}^{2k+3}}{1....(2k+3)} + \frac{\mathfrak{r}^{2k+5}}{1....(2k+5)} + \frac{\mathfrak{r}^{2k+7}}{1....(2k+7)} + \text{in inf.},$$

weil augenscheinlich jedes Glied der Reihe für R_k, absolut genommen, kleiner ist als das entsprechende Glied dieser letzteren, aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe, und weil natürlich der absolute Werth jeder Reihe nie grösser ist als der Werth, welchen diese Reihe erhält, wenn man alle ihre Glieder positiv nimmt. Also ist

$$\mathfrak{R}_k < \frac{\mathfrak{r}^{2k+3}}{1...(2k+3)}\left\{1+\frac{\mathfrak{r}^2}{(2k+4)(2k+5)}+\frac{\mathfrak{r}^4}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)} + \text{in inf.}\right\};$$

und nimmt man nur, was offenbar verstattet ist, da man sich ja auch n beliebig gross angenommen denken kann, k nur so, dass

$$2k+4 > \mathfrak{r}, \text{ also } \frac{\mathfrak{r}}{2k+4} < 1$$

ist, so ist offenbar

$$\mathfrak{R}_k < \frac{\mathfrak{r}^{2k+3}}{1....(2k+3)}\left\{1+\left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+4}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+4}\right)^4+\left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+6}\right)^6+\text{in inf.}\right\}.$$

Wenn nun aber $2u$ eine positive ganze gerade Zahl bezeichnet, so ist nach der Lehre von den geometrischen Progressionen:

$$1+\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2+\left(\frac{x}{2k+4}\right)^4+\ldots+\left(\frac{x}{2k+4}\right)^{2u}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^{2(u+1)}}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2}=\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2}-\frac{\left(\frac{x}{2k+4}\right)^{2(u+1)}}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2},$$

also, wie gross auch u sein mag, immer

$$1+\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2+\left(\frac{x}{2k+4}\right)^4+\ldots+\left(\frac{x}{2k+4}\right)^{2u}$$

$$<\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2},$$

folglich auch

$$1+\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2+\left(\frac{x}{2k+4}\right)^4+\left(\frac{x}{2k+6}\right)^6+\text{in inf.}$$

$$<\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2},$$

und daher nach dem Obigen:

$$\mathfrak{R}_k<\frac{x^{2k+3}}{1\ldots\ldots(2k+3)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2},$$

wie gross man sich auch n angenommen denken mag, natürlich immer unter der Voraussetzung, dass

$$2k+4>x,\quad \text{also}\quad \frac{x}{2k+4}<1$$

ist.

Lässt man nun in der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\sin x = x(\cos\frac{x}{n})^{n-1}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$$

$$-\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1.2.3}x^3(\cos\frac{x}{n})^{n-3}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^3$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})(1-\frac{4}{n})}{1.2.3.4.5}x^5(\cos\frac{x}{n})^{n-5}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^5$$

u. s. w.

$$+(-1)^k\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{2k}{n})}{1.2.3\ldots(2k+1)}x^{2k+1}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k-1}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k+1}$$

$$+R_k$$

die positive ganze Zahl n in's Unendliche wachsen, und geht zu den Gränzen über, so erhält man nach ganz bekannten Sätzen *) für ein unendlich grosses n:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{1\ldots(2k+1)} + R,$$

wo, wenn man sich nur, was offenbar verstattet ist, $2k+4$ grösser als x angenommen denkt, R eine Grösse bezeichnet, deren absoluter Werth kleiner als

$$\frac{x^{2k+3}}{1\ldots(2k+3)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2}$$

ist. Lässt man nun aber in vorstehender Gleichung k in's Unendliche wachsen, so nähert sich offenbar

$$\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2}$$

der Einheit, und nach einem bekannten Satze **) nähert sich

*) Namentlich nach dem Satze, dass $\frac{\sin v}{v}$ sich der Einheit nähert, wenn v sich der Null nähert. M. s. den Anhang.

**) M. s. den Anhang.

$$\frac{x^{2k+3}}{1\ldots.(2k+3)}$$

der Null; also nähert sich auch

$$\frac{x^{2k+3}}{1\ldots.(2k+3)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+4}\right)^2},$$

und folglich um so mehr der absolute Werth von R, also auch R selbst, der Null, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots.5} - \frac{x^7}{1\ldots.7} + \ldots. \text{ in inf.}$$

ist, d. h. dass man den Werth von $\sin x$ desto genauer erhält, je mehr Glieder der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vom Anfange an man mit einander vereinigt.

II.

Die Reihe für den Cosinus lässt sich aus der bekannten Gleichung

$$\cos nx = n_0 \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4} \sin x^4 - \ldots.,$$

wo n wieder eine positive ganze Zahl bezeichnet, auf ganz ähnliche Art ableiten.

Setzt man $\frac{x}{n}$ für x, so erhält man:

$$\begin{aligned}\cos x = (\cos\tfrac{x}{n})^n &- \frac{n(n-1)}{1.2}(\cos\tfrac{x}{n})^{n-2}(\sin\tfrac{x}{n})^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(\cos\tfrac{x}{n})^{n-4}(\sin\tfrac{x}{n})^4 \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-5)}{1.2.3.4.5.6}(\cos\tfrac{x}{n})^{n-6}(\sin\tfrac{x}{n})^6 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\cos x = (\cos\tfrac{x}{n})^n &- \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}n^2(\cos\tfrac{x}{n})^{n-2}(\sin\tfrac{x}{n})^2 \\ &+ \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}{1.2.3.4}n^4(\cos\tfrac{x}{n})^{n-4}(\sin\tfrac{x}{n})^4 \\ &- \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots.(1-\frac{5}{n})}{1.2.3.4.5.6}n^6(\cos\tfrac{x}{n})^{n-6}(\sin\tfrac{x}{n})^6, \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

oder

$$\cos x = (\cos\frac{x}{n})^n - \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}x^2(\cos\frac{x}{n})^{n-2}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^2$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}{1.2.3.4}x^4(\cos\frac{x}{n})^{n-4}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^4$$

$$-\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{5}{n})}{1.2.3.4.5.6}x^6(\cos\frac{x}{n})^{n-6}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^6$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bezeichnet nun $2k-1$ eine positive ungerade Zahl, welche kleiner als n ist, so kann man die obige Reihe auf folgende Art in zwei Theile theilen:

$$\cos x = (\cos\frac{x}{n})^n - \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}x^2(\cos\frac{x}{n})^{n-2}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^2$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}{1.2.3.4}x^4(\cos\frac{x}{n})^{n-4}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^4$$

$$-\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{5}{n})}{1.2.3.4.5.6}x^6(\cos\frac{x}{n})^{n-6}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^6$$

u. s. w.

$$+(-1)^k\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{2k-1}{n})}{1.2.3....2k}x^{2k}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k}$$

$$+R_k,$$

wo

$$R_k = (-1)^{k+1}\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{2k+1}{n})}{1.2.3\ldots.(2k+2)}x^{2k+2}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k-2}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k+2}$$

$$+(-1)^{k+2}\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{2k+3}{n})}{1.2.3\ldots.(2k+4)}x^{2k+4}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k-4}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k+4}$$

$$+(-1)^{k+3}\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{2k+5}{n})}{1.2.3\ldots.(2k+6)}x^{2k+6}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k-6}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k+6}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist, die Reihe rechts so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht.

Bezeichnen wir nun wieder den absoluten Werth von x durch $\mathfrak{r}$, den absoluten Werth von R_k durch $\mathfrak{R}_k$, so ist offenbar, wie gross man auch n nimmt, immer:

$$\mathfrak{R}_k < \frac{\mathfrak{r}^{2k+2}}{1\ldots.(2k+2)} + \frac{\mathfrak{r}^{2k+4}}{1\ldots.(2k+4)} + \frac{\mathfrak{r}^{2k+6}}{1\ldots.(2k+6)} + \text{in inf.},$$

also

$$\mathfrak{R}_k < \frac{\mathfrak{r}^{2k+2}}{1\ldots.(2k+2)}\left\{1 + \frac{\mathfrak{r}^2}{(2k+3)(2k+4)} + \frac{\mathfrak{r}^4}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)(2k+6)} + \ldots + \text{in inf.}\right\}$$

Nimmt man nun aber, was offenbar verstattet ist, k so an, dass

$$2k+3 > \mathfrak{r},\ \text{ also }\ \frac{\mathfrak{r}}{2k+3} < 1$$

ist, so ist offenbar

$$\mathfrak{R}_k < \frac{\mathfrak{r}^{2k+2}}{1\ldots.(2k+2)}\left\{1 + \left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^4 + \left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^6 + \text{in inf.}\right\}.$$

Wenn aber $2u$ eine positive gerade Zahl bezeichnet, so ist nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$1 + \left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^{2u}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^{2(u+1)}}{1-\left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^2} - \frac{\left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^{2(u+1)}}{1-\left(\frac{\mathfrak{r}}{2k+3}\right)^2},$$

woraus sich ergiebt, dass, wie gross auch $2u$ sein mag, immer

$$1+\left(\frac{x}{2k+3}\right)^2+\left(\frac{x}{2k+3}\right)^4+\ldots+\left(\frac{x}{2k+3}\right)^{2u}$$
$$<\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+3}\right)^2},$$

folglich auch

$$1+\left(\frac{x}{2k+3}\right)^2+\left(\frac{x}{2k+3}\right)^4+\left(\frac{x}{2k+3}\right)^6+\text{in inf.}$$
$$<\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+3}\right)^2},$$

und daher nach dem Obigen

$$R_k<\frac{x^{2k+2}}{1\ldots.(2k+2)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2k+3}\right)^2}$$

ist, wie gross man sich auch n angenommen denken mag, natürlich immer unter der Voraussetzung, dass

$$2k+3>x,\quad\text{also}\quad\frac{x}{2k+3}<1$$

ist.

Lässt man nun in der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\cos x=(\cos\frac{x}{n})^n-\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}x^2(\cos\frac{x}{n})^{n-2}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^2$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}{1.2.3.4}x^4(\cos\frac{x}{n})^{n-4}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^4$$

$$-\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots.(1-\frac{5}{n})}{1.2.3.4.5.6}x^6(\cos\frac{x}{n})^{n-6}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^6$$

u. s. w.

$$+(-1)^k\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{2k-1}{n})}{1.2.3\ldots.2k}x^{2k}(\cos\frac{x}{n})^{n-2k}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{2k}$$

$$+R_k$$

die positive ganze Zahl n in's Unendliche wachsen, und geht zu den Gränzen über, so erhält man für ein unendlich grosses n:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1....4} - \frac{x^6}{1....6} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{1....2k} + R,$$

wo, wenn man sich nur, was offenbar verstattet ist, $2k+3$ grösser als x angenommen denkt, R eine Grösse bezeichnet, deren absoluter Werth kleiner als

$$\frac{x^{2k+2}}{1....(2k+2)} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2k+3}\right)^2}$$

ist. Lässt man nun aber k in's Unendliche wachsen, so nähert sich offenbar

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2k+3}\right)^2}$$

der Einheit, und nach einem bekannten Satze nähert sich

$$\frac{x^{2k+2}}{1....(2k+2)}$$

der Null; also nähert sich auch

$$\frac{x^{2k+2}}{1....(2k+2)} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2k+3}\right)^2},$$

und folglich nach dem Obigen um so mehr der absolute Werth von R, also auch R selbst, der Null, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1....4} - \frac{x^6}{1....6} + ... \text{ in inf.}$$

ist, d. h. dass man den Werth von $\cos x$ desto genauer erhält, je mehr Glieder der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vom Anfange an man mit einander vereinigt.

III.

A n h a n g.

Hiermit ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes im Wesentlichen erledigt. Da indess im Obigen ein Paar Sätze in An-

wendung gebracht worden sind, welche bei'm Elementar-Unterrichte vielleicht nicht immer die Berücksichtigung finden dürften oder bis jetzt gefunden haben, die sie jedenfalls ihrer vielfachen Wichtigkeit wegen verdienen, so will ich über diese Sätze jetzt noch Einiges sagen.

I. Der erste dieser Sätze ist der Satz, dass der Bruch

$$\frac{\sin v}{v}$$

sich der Einheit als Gränze nähert, wenn v sich der Null nähert. Dies lässt sich auf folgende Art beweisen.

Für den beliebigen Halbmesser r wollen wir den Sinus und die Tangente des durch den der Einheit als Halbmesser entsprechenden Bogen v gemessenen Winkels durch $\operatorname{Sin} v$ und $\operatorname{Tang} v$ bezeichnen, indem wie gewöhnlich $\sin v$ und $\operatorname{tang} v$ sich auf den der Einheit gleichen Halbmesser beziehen. Weil nun zwischen zwei Punkten die gerade Linie die kürzeste ist, so ist

$$2\operatorname{Sin} v < 2rv, \text{ also } \operatorname{Sin} v < rv.$$

Bezeichnen wir ferner den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Spitze im Mittelpunkte des mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises liegt, dessen gleiche Schenkel r sind und dessen Grundlinie $2\operatorname{Tang} v$ ist, durch D, ferner den Flächeninhalt des demselben Kreise angehörenden Sectors, welcher dem Bogen $2rv$ entspricht, durch S, so ist offenbar

$$S < D.$$

Nun ist aber nach bekannten elementar-geometrischen Sätzen:

$$S = \tfrac{1}{2}r.2rv = r^2 v, \quad D = r\operatorname{Tang} v;$$

also

$$r^2 v < r\operatorname{Tang} v, \text{ folglich } rv < \operatorname{Tang} v.$$

Daher ist

$$\operatorname{Sin} v < rv < \operatorname{Tang} v,$$

folglich

$$\frac{\operatorname{Sin} v}{r} < v < \frac{\operatorname{Tang} v}{r},$$

also

$$\sin v < v < \operatorname{tang} v.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\sin v}{\sin v} > \frac{\sin v}{v} > \frac{\sin v}{\operatorname{tang} v},$$

also

$$1 > \frac{\sin v}{v} > \cos v.$$

Daher ist $\frac{\sin v}{v}$ immer zwischen 1 und $\cos v$ enthalten; nähert sich aber v der Null, so nähert sich $\cos v$ der Einheit als Gränze; also muss das zwischen 1 und $\cos v$ liegende $\frac{\sin v}{v}$ sich um so mehr der Einheit als Gränze nähern, wenn v sich der Null nähert.

2. Ferner ist im Obigen der folgende Satz in Anwendung gebracht worden:

Wenn x eine beliebige positive Grösse und n eine positive ganze Zahl bezeichnet, so nähert der Bruch

$$\frac{x^n}{1.2.3....n}$$

sich der Null, wenn n in's Unendliche wächst, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Es giebt verschiedene Beweise dieses Satzes *); mir scheint jedoch der folgende, wenn auch vielleicht nicht der kürzeste, aber doch der für den Anfänger am Leichtesten verständliche zu sein.

Man nehme die positive ganze Zahl k so an, dass $k+1>x$, also

$$\frac{x}{k+1} < 1$$

ist, was offenbar immer möglich ist. Nun ist:

$$\frac{x^{k+1}}{1....(k+1)} = \frac{x^k}{1....k} \cdot \frac{x}{k+1},$$

$$\frac{x^{k+2}}{1....(k+2)} = \frac{x^k}{1....k} \cdot \frac{x}{k+1} \cdot \frac{x}{k+2},$$

$$\frac{x^{k+3}}{1....(k+3)} = \frac{x^k}{1....k} \cdot \frac{x}{k+1} \cdot \frac{x}{k+2} \cdot \frac{x}{k+3},$$

u. s. w.,

*) M. s. z. B. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis.

also, weil

$$\frac{x}{k+1}, \frac{x}{k+2}, \frac{x}{k+3}, \frac{x}{k+4}, \ldots.$$

eine Reihe fortwährend abnehmender Brüche ist:

$$\frac{x^{k+1}}{1\ldots.(k+1)}=\frac{x^k}{1\ldots.k}\cdot\frac{x}{k+1},$$

$$\frac{x^{k+2}}{1\ldots.(k+2)}<\frac{x^k}{1\ldots.k}\cdot\left(\frac{x}{k+1}\right)^2,$$

$$\frac{x^{k+3}}{1\ldots.(k+3)}<\frac{x^k}{1\ldots.k}\cdot\left(\frac{x}{k+1}\right)^3,$$

$$\frac{x^{k+4}}{1\ldots.(k+4)}<\frac{x^k}{1\ldots.k}\cdot\left(\frac{x}{k+1}\right)^4,$$

u. s. w.,

oder, wenn wir

$$K=\frac{x^k}{1\ldots.k}$$

setzen:

$$\frac{x^{k+1}}{1\ldots.(k+1)}=K\frac{x}{k+1},$$

$$\frac{x^{k+2}}{1\ldots.(k+2)}<K\left(\frac{x}{k+1}\right)^2,$$

$$\frac{x^{k+3}}{1\ldots.(k+3)}<K\left(\frac{x}{k+1}\right)^3,$$

$$\frac{x^{k+4}}{1\ldots.(k+4)}<K\left(\frac{x}{k+1}\right)^4,$$

u. s. w.

Die Potenzen

$$\frac{x}{k+1}, \left(\frac{x}{k+1}\right)^2, \left(\frac{x}{k+1}\right)^3, \left(\frac{x}{k+1}\right)^4, \ldots.$$

des ächten Bruchs $\frac{x}{k+1}$ nähern sich nun bekanntlich der Null immer mehr und mehr und können der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur den Potenzexponenten gross genug werden lässt. Also nähern sich auch die Grössen

$$K\frac{x}{k+1}, K\left(\frac{x}{k+1}\right)^2, K\left(\frac{x}{k+1}\right)^3, K\left(\frac{x}{k+1}\right)^4, \ldots.,$$

folglich nach dem Obigen um so mehr auch die Grössen

$$\frac{x^{k+1}}{1\ldots(k+1)},\quad \frac{x^{k+2}}{1\ldots(k+2)},\quad \frac{x^{k+3}}{1\ldots(k+3)},\quad \frac{x^{k+4}}{1\ldots(k+4)},\ldots$$

der Null immer mehr und mehr und können der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man diese Reihe nur weit genug fortsetzt oder die Glieder derselben nur weit genug von ihrem Anfange entfernt nimmt, wodurch unser Satz offenbar vollständig bewiesen ist, indem wir zum Ueberfluss noch besonders bemerken, dass, wie aus diesem Beweise von selbst hervorgeht, die Annäherung des Bruchs

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

an Null bei wachsendem n nicht immer gleich vom Anfange an stattfinden, aber jedenfalls immer endlich einmal eintreten wird.

Als eine unmittelbare Folgerung hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn x eine beliebige positive oder negative Grösse bezeichnet, n eine positive ganze Zahl ist, so nähert sich der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

wenn n wächst, der Null, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

3. Es verdient noch bemerkt zu werden, dass, wenn man eine der beiden Gleichungen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots$$

bewiesen hat, die andere daraus auf verschiedene Arten abgeleitet werden kann. Bemerkenswerth scheint mir das folgende Verfahren, welches noch nicht bekannt sein dürfte.

Ich will etwa annehmen, dass die Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots$$

bewiesen sei, und will zeigen, wie daraus die Reihe für den Sinus abgeleitet werden kann.

Ich gehe dabei von einer bekannten goniometrischen endlichen Reihe aus, deren Summe man auf folgende Art leicht findet. Es ist

$$1+\cos 2i = 2\cos i \cos i,$$
$$\cos i+\cos 3i = 2\cos 2i \cos i,$$
$$\cos 2i+\cos 4i = 2\cos 3i \cos i,$$
$$\cos 3i+\cos 5i = 2\cos 4i \cos i,$$
u. s. w.
$$\cos(n-2)i+\cos ni = 2\cos(n-1)i\cos i;$$

also, wenn man auf beiden Seiten addirt und der Kürze wegen

$$S_n = 1+\cos i+\cos 2i+\cos 3i+\ldots.+\cos ni$$

setzt:

$$\{S_n-\cos(n-1)i-\cos ni\}+\{S_n-1-\cos i\}$$
$$=2\{S_n-1-\cos ni\}\cos i,$$

woraus sich

$$2(1-\cos i)S_n = 1-\cos i+\cos(n-1)i+\cos ni$$
$$-2\cos ni\cos i$$
$$=1-\cos i+\cos(n-1)i+\cos ni$$
$$-\cos(n-1)i-\cos(n+1)i,$$

$$4\sin\tfrac{1}{2}i^2 . S_n = 2\sin\tfrac{1}{2}i^2+2\sin\tfrac{1}{2}i\sin(n+\tfrac{1}{2})i$$
$$=2\sin\tfrac{1}{2}i\{\sin\tfrac{1}{2}i+\sin(n+\tfrac{1}{2})i\}$$
$$=4\sin\tfrac{1}{2}i\sin\tfrac{1}{2}(n+1)i.\cos\tfrac{1}{2}ni$$

ergiebt. Also ist

$$S_n = \frac{\sin\frac{1}{2}i+\sin(n+\frac{1}{2})i}{2\sin\frac{1}{2}i} = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)i\cos\frac{1}{2}ni}{\sin\frac{1}{2}i}.$$

Setzt man nun $ni=x$, so ist

$$i(1+\cos i+\cos 2i+\cos 3i+\ldots.+\cos ni)$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x+i)\cos\frac{1}{2}x}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}}.$$

Lässt man jetzt in dieser Gleichung, indem immer $ni=x$ ist, die positive ganze Zahl n in's Unendliche wachsen, also den absoluten Werth von i in's Unendliche abnehmen, so ist klar, dass

$$i(1+\cos i+\cos 2i+\cos 3i+\ldots.+\cos ni)$$

sich der Gränze

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x=\sin x$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, und kann man also durch irgend ein Verfahren die Gränze, welcher

$$i(1+\cos i+\cos 2i+\cos 3i+\ldots.+\cos ni)$$

sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst, immer die Gleichung $ni=x$ als erfüllt vorausgesetzt, noch auf eine andere Art ausdrücken, so wird man dadurch zugleich einen Ausdruck von $\sin x$ gefunden haben. Weil nun aber die Gleichung

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots.4}-\frac{x^6}{1\ldots.6}+\ldots.$$

als bewiesen vorausgesetzt wird, und nach dem Vorhergehenden für ein unendlich grosses n, unter Voraussetzung der Gleichung $ni=x$,

$$\sin x=i(1+\cos i+\cos 2i+\cos 3i+\ldots.+\cos ni)$$

ist, so ist für ein unendlich grosses n, wie wir uns hier der Kürze wegen jetzt immer ausdrücken wollen:

$$\sin x=i\left\{\begin{array}{l}1\\
+1-\dfrac{i^2}{1.2}+\dfrac{i^4}{1\ldots.4}-\dfrac{i^6}{1\ldots.6}+\ldots.\\
+1-\dfrac{2^2i^2}{1.2}+\dfrac{2^4i^4}{1\ldots.4}-\dfrac{2^6i^6}{1\ldots.6}+\ldots.\\
+1-\dfrac{3^2i^2}{1.2}+\dfrac{3^4i^4}{1\ldots.4}-\dfrac{3^6i^6}{1\ldots.6}+\ldots.\\
\text{u. s. w.}\\
+1-\dfrac{n^2i^2}{1.2}+\dfrac{n^4i^4}{1\ldots.4}-\dfrac{n^6i^6}{1\ldots.6}+\ldots.
\end{array}\right\}$$

$$=i\left\{\begin{array}{l}n+1\\
-(1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2)\dfrac{i^2}{1.2}\\
+(1^4+2^4+3^4+\ldots.+n^4)\dfrac{i^4}{1\ldots.4}\\
-(1^6+2^6+3^6+\ldots.+n^6)\dfrac{i^6}{1\ldots.6}\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

$$=i\left\{\begin{array}{l} n+1 \\ -\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2}{n^3}\cdot\dfrac{n^3i^2}{1.2} \\ +\dfrac{1^4+2^4+3^4+\ldots.+n^4}{n^5}\cdot\dfrac{n^5i^4}{1\ldots.4} \\ -\dfrac{1^6+2^6+3^6+\ldots.+n^6}{n^7}\cdot\dfrac{n^7i^6}{1\ldots.6} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

also, weil $ni=x$ ist, für ein unendlich grosses n:

$$\sin x=\begin{array}{l} x+i \\ -\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2}{n^3}\cdot\dfrac{x^3}{1.2} \\ +\dfrac{1^4+2^4+3^4+\ldots.+n^4}{n^5}\cdot\dfrac{x^5}{1\ldots.4} \\ -\dfrac{1^6+2^6+3^6+\ldots.+n^6}{n^7}\cdot\dfrac{x^7}{1\ldots.6} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Nun ist aber nach einem bekannten Satze, auf dessen Wichtigkeit im Archiv schon oft hingewiesen worden ist *), für in's Unendliche wachsende n

$$\operatorname{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+n^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}.$$

Wendet man diesen Satz auf die obige Gleichung an, indem man n unendlich gross annimmt, womit gleichzeitig i verschwindet, so erhält man:

$$\sin x=x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1.2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{1\ldots.4}-\frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{1\ldots.6}+\ldots.,$$

also

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1\ldots.5}-\frac{x^7}{1\ldots.7}+\ldots.$$

Auf ganz ähnliche Art kann man umgekehrt aus dieser Reihe die Reihe für den Cosinus ableiten, wobei man von der bekannten Gleichung

$$\sin i+\sin 2i+\sin 3i+\ldots.+\sin ni=\frac{\sin\frac{1}{2}ni\sin\frac{1}{2}(n+1)i}{\sin\frac{1}{2}i}$$

ausgeht, welche für $ni=x$ die Form

$$i(\sin i+\sin 2i+\sin 3i+\ldots.+\sin ni)=\frac{2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}(x+i)}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}}$$

*) Beweise desselben s. m. Thl. XXIII. S. 6. und S. 210.



annimmt, woraus sich für in's Unendliche wachsende n

$$\text{Lim.}\,i(\sin i + \sin 2i + \sin 3i + \ldots + \sin ni) = 2\sin\tfrac{1}{2}x^2$$
$$= 1 - \cos x,$$

also für ein unendlich grosses n

$$\cos x = 1 - i(\sin i + \sin 2i + \sin 3i + \ldots + \sin ni)$$

ergiebt. Die weitere Entwickelung überlassen wir dem Leser.

4. Bei Reihen, von denen ein so wichtiger Gebrauch zur Berechnung von in der ganzen Mathematik Anwendung findenden Tafeln gemacht wird, wie von den Reihen für den Sinus und Cosinus, ist es von grosser Bedeutung, im Besitz möglichst einfacher Regeln zu sein, nach denen man die Fehler beurtheilen kann, welche man begeht, wenn man die Reihen bei gewissen Gliedern abbricht. Solche Regeln wollen wir jetzt hier noch entwickeln.

Setzen wir, indem von jetzt an grösserer Deutlichkeit wegen x immer eine positive Grösse bezeichnet:

$$\sin(\pm x) = \pm x \mp \frac{x^3}{1.2.3} \pm \frac{x^5}{1\ldots.5} \mp \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{1\ldots.(2n-1)}.(-1)^{n-1} + F,$$

so ist

$$F = \pm \frac{x^{2n+1}}{1\ldots.(2n+1)}.(-1)^n \pm \frac{x^{2n+3}}{1\ldots.(2n+3)}.(-1)^{n+1} \pm \frac{x^{2n+5}}{1\ldots(2n+5)}.(-1)^{n+2} \pm \ldots,$$

also

$$\begin{aligned} F = &\pm(-1)^n \left\{\frac{x^{2n+1}}{1\ldots.(2n+1)} - \frac{x^{2n+3}}{1\ldots.(2n+3)}\right\} \\ &\pm(-1)^n \left\{\frac{x^{2n+5}}{1\ldots.(2n+5)} - \frac{x^{2n+7}}{1\ldots.(2n+7)}\right\} \\ &\pm(-1)^n \left\{\frac{x^{2n+9}}{1\ldots.(2n+9)} - \frac{x^{2n+11}}{1\ldots.(2n+11)}\right\} \\ &\pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nehmen wir nun, was offenbar immer verstattet ist und im Folgenden stets vorausgesetzt werden soll, n so gross an, dass $2n + 2 > x$ ist, so ist offenbar

$$\frac{x^{2n+1}}{1\ldots.(2n+1)} > \frac{x^{2n+3}}{1\ldots.(2n+3)}, \quad \frac{x^{2n+5}}{1\ldots.(2n+5)} > \frac{x^{2n+7}}{1\ldots.(2n+7)},$$
$$\frac{x^{2n+9}}{1\ldots.(2n+9)} > \frac{x^{2n+11}}{1\ldots.(2n+11)}, \text{ u. s. w.,}$$

und nach dem Obigen ist also offenbar $\pm(-)^n$ das Vorzeichen von F, woraus sich ergiebt, dass, natürlich immer unter der Voraussetzung, dass $2n+2>x$ ist, F immer gleiches Vorzeichen mit seinem ersten Gliede

$$\pm\frac{x^{2n+1}}{1\ldots.(2n+1)}.(-1)^n$$

hat. Setzen wir nun

$$\sin(\pm x)=\pm x\mp\frac{x^3}{1.2.3}\pm\ldots.\pm\frac{x^{2n-1}}{1\ldots.(2n-1)}.(-1)^{n-1}+F,$$

$$\sin(\pm x)=\pm x\mp\frac{x^3}{1.2.3}\pm\ldots.\pm\frac{x^{2n+1}}{1\ldots.(2n+1)}.(-1)^n+F_1,$$

oder der Kürze wegen

$$\sin(\pm x)=X+F,\quad \sin(\pm x)=X_1+F_1;$$

so haben nach dem so eben Bewiesenen F und F_1 offenbar entgegengesetzte Vorzeichen, d. h.

$$\sin(\pm x)-X \text{ und } \sin(\pm x)-X_1$$

haben entgegengesetzte Vorzeichen, so dass also $\sin(\pm x)$ immer zwischen X und X_1 liegt, oder

$$X\lessgtr\sin(\pm x)\lessgtr X_1$$

ist, wonach sich der Fehler immer leicht und sicher beurtheilen lässt, welchen man begeht, wenn man die Reihe für $\sin(\pm x)$ mit dem Gliede

$$\pm\frac{x^{2n-1}}{1\ldots.(2n-1)}.(-1)^{n-1}$$

abbricht, immer vorausgesetzt, dass $2n+2>x$ ist.

Man setze ferner, indem jetzt x einen beliebigen positiven oder negativen Bogen bezeichnet,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots.4}-\ldots.+\frac{x^{2n}}{1\ldots.2n}(-1)^n+\mathfrak{F},$$

so ist

$$\mathfrak{F}=\frac{x^{2n+2}}{1\ldots.(2n+2)}.(-1)^{n+1}+\frac{x^{2n+4}}{1\ldots(2n+4)}.(-1)^{n+2}+\frac{x^{2n+6}}{1\ldots(2n+6)}.(-1)^{n+3}+\ldots,$$

also

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} = \; & (-1)^{n+1}\left\{\frac{x^{2n+2}}{1\ldots.(2n+2)}-\frac{x^{2n+4}}{1\ldots.(2n+4)}\right\}\\ & +(-1)^{n+1}\left\{\frac{x^{2n+6}}{1\ldots.(2n+6)}-\frac{x^{2n+8}}{1\ldots.(2n+8)}\right\}\\ & +(-1)^{n+1}\left\{\frac{x^{2n+10}}{1\ldots.(2n+10)}-\frac{x^{2n+12}}{1\ldots(2n+12)}\right\}\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Nimmt man nun $2n+3$ grösser als den absoluten Werth von x, so ist offenbar

$$\frac{x^{2n+2}}{1\ldots.(2n+2)} > \frac{x^{2n+4}}{1\ldots.(2n+4)},\quad \frac{x^{2n+6}}{1\ldots.(2n+6)} > \frac{x^{2n+8}}{1\ldots.(2n+8)},$$
$$\frac{x^{2n+10}}{1\ldots.(2n+10)} > \frac{x^{2n+12}}{1\ldots.(2n+12)},\ \text{u. s. w.}$$

und das Zeichen von $\mathfrak{S}$ ist also $(-)^{n+1}$, so dass $\mathfrak{S}$ immer gleiches Vorzeichen mit seinem ersten Gliede $\frac{x^{2n+2}}{1\ldots.(2n+2)}.(-1)^{n+1}$ hat. Setzen wir nun

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots.4}-\ldots.+\frac{x^{2n}}{1\ldots.2n}.(-1)^n+\mathfrak{S},$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots.4}-\ldots.+\frac{x^{2n+2}}{1\ldots.(2n+2)}.(-1)^{n+1}+\mathfrak{S}_1;$$

oder der Kürze wegen

$$\cos x = \mathfrak{X}+\mathfrak{S},\quad \cos x = \mathfrak{X}_1+\mathfrak{S}_1;$$

so haben $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. $\cos x-\mathfrak{X}$ und $\cos x-\mathfrak{X}_1$ haben entgegengesetzte Vorzeichen, und es liegt folglich immer $\cos x$ zwischen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$, oder es ist $\mathfrak{X} \lessgtr \cos x \lessgtr \mathfrak{X}_1$, wonach sich wieder leicht der Fehler beurtheilen lässt, welchen man begeht, wenn man die Reihe für $\cos x$ mit dem Gliede $\frac{x^{2n}}{1\ldots.2n}.(-1)^n$ abbricht.

Weil

$$X_1-X=\pm\frac{x^{2n+1}}{1\ldots.(2n+1)}.(-1)^n \text{ und } \mathfrak{X}_1-\mathfrak{X}=\frac{x^{2n+2}}{1\ldots.(2n+2)}.(-1)^{n+1}$$

ist, so kann man nach dem Satze in 2. die Gränzen X, X_1 von $\sin(\pm x)$, und die Gränzen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ von $\cos x$, einander beliebig nahe bringen, also $\sin(\pm x)$ und $\cos x$ mit jeder beliebigen Genauigkeit mittelst der obigen Reihen erhalten, wenn man nur n gross genug nimmt.

XVII.

Ueber die Summe der Winkel im Vielecke.

Von

Herrn Director Dr. *Heinen*

an der Realschule zu Düsseldorf.

Der Satz des Proclus von der Winkelsumme im Polygon wird für den Fall, dass dasselbe ein convexes ist, bekanntlich auf den von der Summe der Winkel im Dreieck basirt, indem man von irgend einem Punkte innerhalb oder einer seiner Ecken dasselbe in Dreiecke zerlegt. Man nimmt dabei ohne Weiteres an, dass die Winkel, welche an diesem Punkte in Betracht kommen, sich alle summiren, während diese Voraussetzung doch bei nicht convexen Polygonen unter Umständen falsch wäre, also aus dem Wesen der convexen Figur begründet werden muss. Das hat freilich keine Schwierigkeit, allein auch wenn dem Beweise diese Ergänzung gegeben wird, kann man es nur als einen Nothbehelf oder aus didactischen Rücksichten gerechtfertigt ansehen, wenn der spezielle Fall vom Dreieck dem allgemeinen Satze vorangeht, und, wenn van Swinden in seiner Geometrie (S. die Bearbeitung von Jacobi Satz 104) sich dahin ausspricht, „es sei unmöglich, diesen allgemeinen Satz zu beweisen, ohne die Richtigkeit für einen besondern Fall, namentlich das Dreieck, vorher dargethan zu haben", so liegt hierin offenbar das Geständniss, dass es für die Geometrie als wissenschaftliches System wünschenswerth wäre, einen andern Weg einschlagen zu können. — Dem gedachten Satze lässt man stets den ebenfalls von Proclus herrührenden Satz folgen, dass die Summe der sogenannten äusseren Winkel des Polygons $4R$ betrage, und nicht selten wird er, weil sich sein Beweis aus jenem allerdings sofort ergibt, nur als ein Corollar angeführt. Dass er wegen seiner Tragweite und hohen Einfachheit ein gleiches Recht

habe, ein Hauptsatz zu sein als jener, dürfte wol keinem Zweifel unterliegen; aber, ist es prinzipiel richtig, dass in einer Wissenschaft, welche ihre Wahrheiten durch Combination unmittelbar gegebener oder von ihr geschaffener Begriffe findet, diejenigen Sätze, welche deren weniger enthalten, den übrigen vorangehen sollten, so wird der zweite dem ersten Satze selbst voranzustellen sein, indem in ihm ein Element weniger vorkommt, das der Seitenzahl. Diese Ansichten legte ich bereits im J. 1845 in einer kleinen Arbeit nieder, welche im Museum des Rheinisch-Westphälischen Schulmänner-Vereins Bd. III. S. 405. u. f.*) aufgenommen worden ist. Sie ward veranlasst durch eine ebenfalls dort befindliche Recension von Herrn Dr. Druckenmüller, in welcher derselbe unter Anderem darauf hingewiesen hat, dass man nicht berechtigt sei, wie stets geschieht, den Polygonwinkel eines regulären Vielecks als einen hohlen ohne Weiteres anzunehmen, und da, um dieses zu begründen, der Satz von der Winkelsumme auch für nicht convexe Polygone bewiesen sein müsse, die Geometrie dieses Beweises nicht entbehren könne. Die in mehr als einer Hinsicht ausgezeichnete Recension scheint aber — vielleicht weil jene Zeitschrift dem mathematischen Publikum ziemlich fern stand — unbeachtet geblieben zu sein, und so ist es auch dem von mir dort mitgetheilten Versuche, diesen allgemeinen Beweis den obigen Ansichten gemäss zu liefern, ergangen. Indem ich nun auf den Wunsch des geehrten H. Herausgebers des Archivs denselben hier nochmals veröffentliche, schicke ich aus didactischen Gründen ein Paar Vorbegriffe und Bemerkungen voraus.

1) Jede Gerade theilt, gehörig verlängert, die Ebene, in der sie liegt, in zwei völlig getrennte Theile, Seiten genannt, welche nur die Punkte der Geraden gemein haben, und man sagt, ein Punkt liege auf der einen oder andern Seite der Geraden, je nachdem er in dem einen oder andern dieser beiden Theile liegt.

2) Ein Polygon heisst convex, wenn es ganz einerseits einer jeden seiner Seiten liegt. Hieraus ergibt sich sofort für das convexe Polygon:

a) Die Verlängerung einer Seite kann dem Umfange d. h. den übrigen, nicht verlängerten Seiten nicht begegnen. Es hat daher keinen Rückkehrpunkt.

b) Es hat nur hohle Winkel.

---

*) Museum des Rheinisch-Westphälischen Schulmänner-Vereins, redigirt von Dr. Grauert, Dr. Heinen, Dr. Schoene und Dr. Wilberg. Essen. Bädeker.

c) Auf den Schenkeln eines seiner Winkel liegen ausser der eigenen nur die Winkelspitzen der nächsten Polygonwinkel; die Winkelspitzen aller übrigen liegen innerhalb seiner Winkelebenen.

d) Eine Gerade kann den Umfang nur in zwei Punkten schneiden. (Denn wären A, B, C drei aufeinanderfolgende Durchschnittspunkte, so würden A und C auf entgegengesetzter Seite der durch B gehenden Seite des Polygons liegen.)

3) Der Name „Aussenwinkel" für den Winkel, welchen die Verlängerung einer Seite mit der folgenden macht, passt offenbar nicht, wenn der Polygonwinkel ein erhabener ist. Man könnte sich freilich zur Noth mit dem Worte „Ergänzungswinkel der Polygonwinkel" behelfen, allein die Ausdehnung dieses Begriffes auf den erhabenen Winkel hat für die geometrische Anschauungsweise etwas anstössiges, und so bleibt eine eigene, und wie es uns selbst scheinen will, vom Begriffe des Polygonwinkels unabhängige, Benennung wünschenswerth. Mit Rücksicht darauf, dass für einen auf dem Umfange des Polygons Fortschreitenden diese Winkel die Grösse der Wendungen angeben, welche er an den einzelnen Ecken zu machen hat, erlauben wir uns das Wort „Wendewinkel" in Vorschlag zu bringen, ähnlich wie man Wendekreis, Wendepunkt sagt, und unterscheiden äussere oder innere, je nachdem sie in dem Polygon oder ausserhalb desselben liegen.

4) Obschon von den beiden folgenden Sätzen der erste in dem andern enthalten ist und nur im Beweis als besonderer Fall demnach zu behandeln wäre, so scheint es doch für den Unterricht zweckmässiger, sie, wie folgt, zu trennen.

I. Die Summe der Wendewinkel eines convexen Polygons beträgt $4R$.

Es sei (Taf. X. Fig. 1.) $ABCD....X$ das convexe Polygon, die Verlängerungen der Seiten AB, BC, $CD....XA$ über B, C, $D....A$ hinaus, seien BA', CB', $DC'....AX'$, also die Wendewinkel $A'BC$, $B'CD....X'AB$. Zieht man nun von B nach einer beliebigen andern Ecke S eine Diagonale BS, so fällt dieselbe ganz in die Winkelebene des Polygonwinkels B und es liegt die in der Ordnung $ABC....X$ der Ecke S vorangehende Ecke R mit C auf der einen, dagegen die folgende T mit A auf der andern Seite dieser Diagonalen, ferner T mit B auf derselben Seite von RS,

also T innerhalb des Winkels, den BS mit der Verlängerung SR' von RS bildet. Denkt man sich aber durch alle Ecken mit BA' parallele und gleichgerichtete Linien (d. h. solche, welche sich nach derselben Seite der von B nach diesen Ecken gezogenen Diagonalen erstrecken, als BA') gezogen, als deren erste BA' selbst und letzte AB betrachtet werden kann, $CO, DO ... RO$, $SO .... XO$, und rechnet man die Winkel $A'BC$, $OCD ... ORS$, $OST .... OXA$ dieser Parallelen mit den Seiten BC, $CD .... RS$, $ST .... XA$ in derselben Richtung, in welcher der erste derselben, der Wendewinkel $A'BC$ genommen ist (also von den Parallelen gewissermassen nach der Aussenseite der folgenden Seite, oder nach welcher in Bezug auf diese das Polygon nicht liegt), so ist irgend einer derselben OST gleich dem vorhergehenden ORS, vermehrt um den Wendewinkel an seiner Ecke $R'ST$, folglich, da der erste dieser Winkel der Wendewinkel $A'BC$ selbst ist, jeder gleich der Summe aller vorhergehenden Wendewinkel. Der convexe Winkel OXA ist demnach gleich der Summe der Wendewinkel von der Ecke B bis zur Ecke X und, da er auch dem convexen Winkel BAX' gleich ist, der letztere mit dem Wendewinkel $X'AB$ aber $4R$ beträgt, auch die Gesammtsumme aller Wendewinkel $= 4R$.

II. In jedem Polygon, welches keinen Rückkehrpunkt hat, ist die Summe der äussern weniger der Summe der innern Wendewinkel oder kürzer die algebraische Summe der Wendewinkel eines Umlaufs $= 4R$.

Gesetzt das Polygon habe neun erhabene Polygonwinkel und sei $MNP = N$ (Taf. X. Fig. 2.) einer derselben. Wir verlängern einen Schenkel desselben MN über den Scheitel N hinaus, bis er dem Umfang wieder begegnet, und es sei V dieser nächste Durchschnittspunkt. Das Polygon wird hierdurch in zwei Polygone I. und II. getheilt, von denen das eine II. den innern Wendewinkel PNV zum Polygonwinkel erhält, während N für das andere I. aufhört eine Ecke zu sein. Gleichviel ob nun V auf einer Seite des ursprünglichen Polygons liegt, die Stücke, in welche dieselbe durch NV getheilt wird, also einen gestreckten Winkel bilden, oder in einer Ecke desselben: die Linie NV muss, weil ganz im Innern der Figur auch ganz innerhalb des Winkels liegen, welcher von den Stücken dieser Seite oder den Seiten dieser Ecke gebildet wird. Nennen wir diesen Winkel in beiden Fällen V (im erstern ist $V = 2R$), so bildet NV mit den Schenkeln desselben in I. und II. zwei Polygonwinkel α und β, deren Summe gleich V ist. Nur wenn V schon ein erhabener Winkel im ursprünglichen Polygon ist, kann einer der Winkel α und β wieder

ein erhabener sein, und da der erhabene Winkel N als solcher in keinem der Polygone I. und II. noch vorkommt, so hat jedes nothwendig wenigstens einen erhabenen Winkel weniger als das ursprüngliche. Nun ist, wenn p einen Polygonwinkel bezeichnet, der zugehörige Wendewinkel, jenachdem er ein äusserer oder innerer ist, $=2R-p$ oder $p-2R$, $=\pm(2R-p)$, also wenn der erstere additiv, der andere subtractiv in Rechnung gebracht werden soll, $(2R-p)$ der gemeinschaftliche Ausdruck für beide. Bezeichnet also S die algebraische Summe der Wendewinkel im Polygon I. mit Ausnahme des α zugehörigen $(2R-\alpha)$, S' die algebraische Summe der Wendewinkel im Polygon II. mit Ausnahme der zu PNV und β gehörigen $(2R-PNV)$ und $(2R-\beta)$, und nehmen wir für einen Augenblick an, unser Satz gelte für alle Polygone, welche weniger als neun erhabene Winkel haben, also auch für I. und II., so ist

$$S+(2R-\alpha)=4R,$$

$$S'+(2R-PNV)+(2R-\beta)=4R;$$

also

$$S+S'+4R-PNV+2R-(\alpha+\beta)=8R$$

oder, da $\alpha+\beta=V$,

$$S+S'-PNV+(2R-V)=4R,$$

in welcher Gleichung der Ausdruck links offenbar nichts anders als die algebraische Summe Σ aller Wendewinkel des ursprünglichen Polygons ist.

Nun gilt aber der Satz für alle Polygone mit keinem, also auch mit 1, 2, 3....9 erhabenen Winkeln.

III. Die Summe der Polygonwinkel Π in jedem Vielecke, welches keinen Rückkehrpunkt hat, ist, wenn n die Zahl seiner Ecken bezeichnet, gleich $2nR-4R$.

Denn die vorige Gleichung

$$\Sigma=4R$$

geht, wenn man jeden Wendewinkel w durch den zugehörigen Polygonwinkel ausdrückt, also jedesmal $2R-p$ für ihn setzt, in

$$2nR-\Pi=4R$$

oder

$$\Pi=2nR-4R$$

über.

XVIII.

Das sphärische Dreieck dargestellt in seinen Beziehungen zum Kreise.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer an der Marine-Akademie zu Triest.

§. 1.

Legt man durch die Ecken A, A_1 (Taf. X. Fig. 6.) eines sphärischen Zweieckes einen grössten Kreisbogen AOA', welcher die gleichen Winkel A, A_1 halbirt, so sind die sphärischen Abstände OE, OF eines jeden Punktes O desselben von den Seiten des Zweieckes einander gleich, denn die beiden rechtwinkligen Dreiecke AOE und AOF haben gleiche Seiten und gleiche Winkel. Wird daher dieses sphärische Zweieck von einem grössten Kreisbogen BC geschnitten, so liegen die Mittelpunkte der den Dreiecken ABC und A_1BC eingeschriebenen Kreise nothwendig auf dem Bogen AOA_1. Ist O der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises und O_1 jener des dem Dreieck A_1BC eingeschriebenen Kreises, so ist auch O_1 in Bezug auf das Dreieck ABC der Mittelpunkt des äusseren Berührungskreises, welcher dem Winkel A gegenüber liegt. Der Mittelpunkt des äusseren Berührungskreises, welcher einer bestimmten Ecke A eines Dreieckes ABC gegenüber liegt, liegt daher immer auf demjenigen grössten Kreisbogen, welcher durch eben diese Ecke A und durch den Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises geht.

Ist daher O (Taf. X. Fig. 7.) der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises und zieht man durch O die grössten Kreisbogen AO_1, BO_2, CO_3, so werden erstens durch dieselben die drei Winkel A, B, C des Dreieckes ABC halbirt und zweitens liegen auf denselben die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise. Es seien O_1, O_2, O_3 diese Mittelpunkte, welche beziehungsweise den Ecken A, B, C gegenüberliegen. Verbinden

wir O_3 mit A durch einen sphärischen Bogen O_3A, so wird dieser den Winkel BAn halbiren. Verbinden wir ebenso O_2 mit A durch den Bogen O_2A, so wird dieser den Winkel CAm halbiren, da aber $\angle BAn$ und $\angle CAm$ sphärische Scheitelwinkel sind, so liegen die Bogen O_3A und O_2A in einem und demselben grössten Kreis oder mit anderen Worten, der durch die Mittelpunkte O_2 und O_3 gelegte grösste Kreisbogen geht durch den Eckpunkt A. Ebenso beweiset man, dass die grössten Kreisbogen, welche durch O_1, O_3 und durch O_1, O_2 gelegt werden, auch durch die Ecken B und C gehen.

Ferner ist, da nach dem Obigen

$$\angle BAO_1 = \tfrac{1}{2}A, \quad \angle O_3AB = \tfrac{1}{2}(180^0 - A) = 90^0 - \tfrac{1}{2}A$$

ist,

$$\angle O_3AO_1 = \tfrac{1}{2}A + (90^0 - \tfrac{1}{2}A) = 90^0,$$

d. h. O_2O_3 steht senkrecht auf AO_1. Ebenso steht O_1O_3 senkrecht auf BO_2 und O_1O_2 senkrecht auf CO_3:

$$(1) \qquad AO_1 \perp O_2O_3, \quad BO_2 \perp O_1O_3, \quad CO_3 \perp O_1O_2.$$

Es ist nun zunächst unsere Absicht, die Entfernungen der Mittelpunkte O_1, O_2, O_3 der drei äusseren Berührungskreise unter sich, vom Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises und von den Ecken A, B, C durch die Bestandtheile A, B, C und a, b, c des gegebenen Dreieckes auszudrücken oder, kurz gesagt, die Beziehungen zu untersuchen, welche zwischen dem Dreieck $O_1O_2O_3$ und dem primitiven Dreieck ABC bestehen.

§. 2.

In dem Dreieck ABO_3 ist $AB = c$, $\angle O_3AB = 90^0 - \tfrac{1}{2}A$, $\angle O_3BA = 90^0 - \tfrac{1}{2}B$, mithin sind eine Seite und zwei anliegende Winkel bekannt und man hat:

$$\operatorname{Cos} O_3 = \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos} c - \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B;$$

da aber bekanntlich

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin} c} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin} c} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C;$$

so wird:

$$\operatorname{Cos} O_3 = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} C}{\operatorname{Sin} c} \{ \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos} c - \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a+b-c) \}$$

und wegen

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a+b-c) = \operatorname{Sin} \{ \tfrac{1}{2}(a+b+c) - c \}$$

$$= \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos} c - \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Sin} c,$$

$$\operatorname{Cos} O_3 = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b+c);$$

auf dieselbe Art bestimmt man $\operatorname{Cos} O_2$, $\operatorname{Cos} O_1$ und hat zur Berechnung der Winkel des Dreieckes $O_1 O_2 O_3$ die Gleichungen:

(2)

$$\operatorname{Cos} O_1 = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b+c), \quad \operatorname{Cos} O_2 = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} B \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

$$\operatorname{Cos} O_3 = \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Da wir nur solche Dreiecke betrachten, in welchen die Seiten a, b, c einzeln genommen kleiner als 180° sind, so ist auch $A < 180°$, $B < 180°$, $C < 180°$, mithin $\operatorname{Sin} \frac{1}{2} A$, $\operatorname{Sin} \frac{1}{2} B$, $\operatorname{Sin} \frac{1}{2} C$ stets positiv. Ist daher $a+b+c > 180°$, so ist $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+b+c)$ negativ, mithin auch $\operatorname{Sin} O_1$, $\operatorname{Sin} O_2$, $\operatorname{Sin} O_3$, oder es ist $O_1 > 90°$, $O_2 > 90°$, $O_3 > 90°$. Ist aber $a+b+c < 180°$, so ist $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+b+c)$ positiv und deswegen $O_1 < 90°$, $O_2 < 90°$, $O_3 < 90°$. Die drei Winkel des Dreieckes $O_1 O_2 O_3$ sind daher entweder gleichzeitig stumpf oder gleichzeitig spitz, je nachdem der Umfang des Dreieckes ABC grösser oder kleiner als ein halber Hauptkreis ist.

Zusatz. Ist $a+b+c = 180°$, so wird $\operatorname{Cos} O_1 = 0$, $\operatorname{Cos} O_2 = 0$, $\operatorname{Cos} O_3 = 0$ oder es ist $O_1 = O_2 = O_3 = 90°$, mithin auch

$$O_1 O_2 = O_1 O_3 = O_2 O_3 = 90°$$

und das Dreieck $O_1 O_2 O_3$ geht in das gleichseitige rechtwinkelige Dreieck über.

§. 3.

Ist O (Taf. X. Fig. 6.) der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises und $OD \perp a$, $OE \perp b$, $OC \perp c$, so hat man, wenn $AE = u$, $BF = v$, $CD = w$ gesetzt wird, nach §. 1. auch $AF = u$, $BD = v$, $CE = w$, d. h. die an demselben Winkel liegenden Segmente sind einander gleich. Mithin ist

$$a = v + w, \quad b = u + w, \quad c = u + v;$$

daher

$$u + v + w = \tfrac{1}{2}(a + b + c),$$
$$u = \tfrac{1}{2}(b + c - a),$$
$$v = \tfrac{1}{2}(a + c - b),$$
$$w = \tfrac{1}{2}(a + b - c).$$

Ist O_1 der Mittelpunkt desjenigen äusseren Berührungskreises, welcher der Ecke A gegenüber liegt, und $O_1G \perp a$, $O_1H \perp b$, $O_1I \perp c$, so hat man, wenn $BG = u'$, $CG = v'$ gesetzt wird, nach §. 1. auch $CH = u'$, $BI = v'$ und $AI = c + v' = AH = b + u'$; und da $a = u' + v'$ ist, so hat man zur Bestimmung der Segmente u', v' die zwei Gleichungen:

$$u' + v' = a,$$
$$c + v' = b + u';$$

woraus folgt:

$$2u' = a + c - b, \qquad u' = \tfrac{1}{2}(a + c - b),$$
$$2v' = a + b - c, \qquad v' = \tfrac{1}{2}(a + b - c).$$

§. 4.

Fällt man vom Mittelpunkt O (Taf. X. Fig. 7.) des eingeschriebenen Kreises auf die Seite b das sphärische Perpendikel OE, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen $AE = u = \tfrac{1}{2}(b + c - a)$ und da in dem rechtwinkeligen Dreieck AOE, $\operatorname{tg} AE = \operatorname{tg} OA . \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}A$, so ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b + c - a) = \operatorname{tg} OA . \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}A,$$

mithin:

$$(3) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} OA = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b + c - a)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}A}, \\[2ex] \operatorname{tg} OB = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + c - b)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}B}, \\[2ex] \operatorname{tg} OC = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b - c)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C}. \end{cases}$$

Erhebt man diese drei Gleichungen zum Quadrat und ersetzt alsdann $\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}A$, $\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}B$, $\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}C$ durch ihre bekannten Werthe, so erhält man auch leicht:

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 OA = \dfrac{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}(b+c-a)}, \\ \operatorname{tg}^2 OB = \dfrac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}(a+c-b)}, \\ \operatorname{tg}^2 OC = \dfrac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}(a+b-c)}. \end{cases}$$

Ferner ist auch in demselben Dreieck AOE:

$$\operatorname{Sin} OE = \operatorname{Sin} \varrho = \operatorname{Sin} OA . \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}A,$$

mithin:

$$(5)\quad \operatorname{Sin} OA = \frac{\operatorname{Sin} \varrho}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}A},\quad \operatorname{Sin} OB = \frac{\operatorname{Sin} \varrho}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}B},\quad \operatorname{Sin} OC = \frac{\operatorname{Sin} \varrho}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}C};$$

wobei ϱ den Radius des eingeschriebenen Kreises bezeichnet.

§. 5.

In dem Dreieck ABO_3 ist $AB=c$, der Winkel bei $A=90^0-\frac{1}{2}A$, der Winkel bei $B=90^0-\frac{1}{2}B$, man kennt also in demselben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel und hat nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$\operatorname{ctg} AO_3 = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}B \operatorname{Cos} \frac{1}{2}A + \operatorname{Sin} \frac{1}{2}A \operatorname{Cos} c}{\operatorname{Sin} c}.$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}B} \cdot \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}A \operatorname{Sin} \frac{1}{2}B}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}B} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin} c},$$

und

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos} c = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}A \operatorname{Cos} \frac{1}{2}B}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C} \cdot \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}B} \operatorname{Cos} c$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}B} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} c} . \operatorname{Cos} c,$$

folglich:

$$\operatorname{ctg} AO_3 = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}B} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 c} \{\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(b+c-a) + \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a+c-b) \operatorname{Cos} c\},$$

oder auch, weil

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(b+c-a) = \operatorname{Sin} \{c - \tfrac{1}{2}(a+c-b)\}$$

$$= \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(a+c-b) - \operatorname{Cos} c \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(a+c-b)$$

ist:

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} AO_3 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C} \cdot \dfrac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)} \\ \text{und ebenso} \\ \operatorname{tg} AO_2 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B} \cdot \dfrac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)}, \\ \operatorname{tg} BO_3 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C} \cdot \dfrac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}, \\ \operatorname{tg} BO_1 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A} \cdot \dfrac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)}, \\ \operatorname{tg} CO_1 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A} \cdot \dfrac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)}, \\ \operatorname{tg} CO_2 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B} \cdot \dfrac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}. \end{cases}$$

Erhebt man die erste dieser sechs Gleichungen zum Quadrat und substituirt dann statt $\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}B$, $\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}C$ ihre durch die Seiten des Dreieckes ausgedrückten Werthe, so wird:

$$\operatorname{tg}^2 AO_3$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c} \cdot \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)} \cdot \frac{\operatorname{Sin}^2 c}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+c-b)}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)} \cdot \frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+c-b)} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A},$$

mithin:

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} AO_3 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A}, \\ \operatorname{tg} AO_2 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A}; \\ \operatorname{tg} BO_3 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}, \\ \operatorname{tg} BO_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}; \\ \operatorname{tg} CO_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}, \\ \operatorname{tg} CO_2 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}. \end{cases}$$

Zusatz. Diese letzteren Ausdrücke kann man auch unmittelbar aus der Figur herleiten, denn in dem rechtwinkligen Dreieck CO_1G (Taf. X. Fig. 6.) ist offenbar der Winkel bei $C = 90^0 - \frac{1}{2}C$ und nach §. 3. $CG = v' = \frac{1}{2}(a+b-c)$, folglich, da

$$\operatorname{tg} CG = \operatorname{tg} O_1C . \operatorname{Cos}(90^0 - \tfrac{1}{2}C)$$

ist:

$$\operatorname{tg} O_1C = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}.$$

§. 6.

Betrachten wir jetzt das Dreieck AO_1C, so sind in demselben auch eine Seite $AC = b$, und die beiden anliegenden Winkel $\angle O_1AC = \frac{1}{2}A$, $\angle ACO_1 = 90^0 + \frac{1}{2}C$ bekannt, und man hat zur Bestimmung des Winkels α_1 die Gleichung:

$$\operatorname{Cos}\alpha_1 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Sin}(90^0 + \tfrac{1}{2}C)\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}(90^0 + \tfrac{1}{2}C)$$
$$= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C;$$

da aber

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin} b}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B,$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin} b}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B;$$

so wird

$$\operatorname{Cos}\alpha_1 = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Sin} b}\{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{Cos} b + \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\}$$

und weil

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \operatorname{Sin}\{b - \tfrac{1}{2}(a+b-c)\}$$
$$= \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c) - \operatorname{Cos} b \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

ist:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{Cos}\alpha_1 &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c),\\
\operatorname{Cos}\beta_1 &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a),\\
\operatorname{Cos}\gamma_1 &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b);\\
\operatorname{Cos}\alpha_2 &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b),\\
\operatorname{Cos}\beta_2 &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}A \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c),\\
\operatorname{Cos}\gamma_2 &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a).
\end{aligned}\right.$$

§. 7.

In dem rechtwinkeligen Dreiecke BO_2O_3 ist

$$\operatorname{tg} BO_3 = \operatorname{tg} O_2O_3 . \operatorname{Cos} O_3,$$

mithin

$$\operatorname{tg} O_2O_3 = \frac{\operatorname{tg} BO_3}{\operatorname{tg} O_3},$$

oder mit Anwendung der Gleichungen (5) und (2):

$$\operatorname{tg} O_2O_3 = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C} \cdot \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)} \times \frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

$$= \frac{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A \operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)},$$

weil

$$\frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C} = \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{\operatorname{Sin} a}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}.$$

Auf dieselbe Art bestimmt man $\operatorname{tg} O_1O_3$, $\operatorname{tg} O_1O_2$ und erhält zur Berechnung der Seiten des Dreieckes $O_1O_2O_3$ folgendes System von Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} O_2O_3 = \dfrac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}, \\ \operatorname{tg} O_1O_3 = \dfrac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)}, \\ \operatorname{tg} O_1O_2 = \dfrac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)}. \end{cases}$$

Zusatz. Zu demselben Resultate gelangt man durch die Gleichungen (5), denn es ist

$$\operatorname{tg} O_2O_3 = \operatorname{tg}(AO_2 + AO_3) = \frac{\operatorname{tg} AO_2 + \operatorname{tg} AO_3}{1 - \operatorname{tg} AO_2 . \operatorname{tg} AO_3}$$

und

$$\operatorname{tg} AO_2 + \operatorname{tg} AO_3$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}B \operatorname{Sin} c \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c) + \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}C \operatorname{Sin} b \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)},$$

ferner

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$
$$=\frac{1}{\mathrm{Sin}\,a}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)$$
$$=\frac{1}{\mathrm{Sin}\,a}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b);$$

folglich die Summe gleich

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\mathrm{Sin}\,a}$$
$$\times\{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)\}$$
$$=\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

und

$$\mathrm{tg}\,AO_2+\mathrm{tg}\,AO_3=\frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}.$$

Ebenso ist

$$1-\mathrm{tg}\,AO_2\,\mathrm{tg}\,AO_3=1-\frac{\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}$$
$$=\frac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)-\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}.$$

Um den Zähler dieses Bruches zu reduciren, ist folgende Rechnung nothwendig. Es ist

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\mathrm{Cos}\,\{\tfrac{1}{2}(a+b+c)-b\}$$
$$=\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Cos}\,b+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,b$$

und ebenso

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Cos}\,c+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,c;$$

werden diese zwei Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man:

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$
$$=\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,c+\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,c$$
$$+\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{\mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,c+\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Sin}\,c\}$$

$$= \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c + \operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c - \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c$$

$$+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}(b+c)$$

$$= \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c - \operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c\} + \operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c$$

$$+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c)$$

$$= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}(b+c) + \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}(b+c)\}$$

$$+\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c$$

$$= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a) + \operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c;$$

folglich ist obiger Zähler:

$$(\Delta)\qquad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c) - \operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c$$

$$= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a);$$

und

$$1-\operatorname{tg}AO_2.\operatorname{tg}O_3 = \frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c)},$$

also

$$\operatorname{tg}O_2O_3 = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)},$$

und weil bekanntlich

$$\frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A} = \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin}a},\quad \frac{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{Sin}a}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A}$$

ist, so ist

$$\operatorname{tg}O_2O_3 = \frac{\operatorname{Sin}a}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}A}\cdot\frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(b+c-a)},$$

wie oben.

§. 8.

Das rechtwinkelige Dreieck AO_1O_2 gibt jetzt

$$\operatorname{tg}AO_1 = \operatorname{tg}O_1O_2.\operatorname{Cos}\alpha_1,$$

oder wenn man substituirt:

$$\operatorname{tg}AO_1 = \frac{\operatorname{Sin}c}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C}\cdot\frac{1}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}\times\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}B}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C}\cdot\frac{\operatorname{Sin}c}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}B}\cdot\frac{\operatorname{Sin}b}{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b+c)};$$

weil aus

$$\frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C}=\frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} c}$$

leicht gefolgert werden kann:

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\operatorname{Sin} c=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}\operatorname{Sin} b.$$

Ferner ist auch:

$$\operatorname{tg}^2 AO_1=$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} a\operatorname{Sin} c}\cdot\frac{\operatorname{Sin} a\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}\cdot\frac{\operatorname{Sin}^2 c}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin} b\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\cdot\frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}A}.$$

Man hat also zur Bestimmung der drei Perpendikel des Dreiecks $O_1O_2O_3$ folgende Formeln:

$$(9)\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}AO_1&=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\cdot\frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}\cdot\frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}\\
&=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A},\\
\operatorname{tg}BO_2&=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\cdot\frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A}\cdot\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}\\
&=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B},\\
\operatorname{tg}CO_3&=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}\cdot\frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A}\cdot\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}\\
&=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}.
\end{aligned}\right.$$

Zusatz. Wir haben schon im Zusatz des §. 2. auf den besonderen Fall aufmerksam gemacht, wenn der Umfang des gegebenen Dreieckes ABC einem halben grössten Kreise gleich ist. Unter dieser Voraussetzung fanden wir $O_1=O_2=O_3=90^0$, $O_1O_2=O_1O_3=O_2O_3=90^0$, und die Gleichungen (9) geben dem entsprechend auch:

$$O_1A=O_2B=O_3C=90^0.$$

Da sich von den Ecken dieses gleichseitigen rechtwinkeligen Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ auf die gegenüberstehenden Seiten bekanntlich unendlich viele Perpendikel fällen lassen, so ziehen wir aus dem Vorhergehenden die bemerkenswerthe Folgerung, dass, wenn man die Fusspunkte A, B, C dreier solcher in Einem Punkte O sich durchschneidender Perpendikel zu einem sphärischen Dreieck ABC verbindet, dieses stets einen constanten Umfang hat, welcher einem halben grössten Kreise gleich ist.

§. 9.

Aus dem rechtwinkeligen Dreiecke OCO_1 folgt:

$$\operatorname{tg} O_1C = \operatorname{tg} OO_1 . \operatorname{Cos} \alpha_1, \quad \operatorname{tg} OO_1 = \frac{\operatorname{tg} OC_1}{\operatorname{Cos} \alpha_1},$$

oder mit Anwendung der Gleichungen (6) und (7):

$$\operatorname{tg} OO_1 = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}C} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}B \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+b-c)}$$
$$= \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}C \operatorname{Cos} \frac{1}{2}B} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+b-c)};$$

da aber

$$\frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}C \operatorname{Cos} \frac{1}{2}B}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}A} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} a}, \quad \operatorname{Sin} \frac{1}{2}C \operatorname{Cos} \frac{1}{2}B = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}A}{\operatorname{Sin} a} \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+c-b);$$

so wird

$$\operatorname{tg} OO_1 = \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}A} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+c-b)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+b-c)},$$

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} OO_1 &= \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}A} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+c-b) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+b-c)}, \\ \operatorname{tg} OO_2 &= \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}B} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(b+c-a) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+b-c)}, \\ \operatorname{tg} OO_3 &= \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}C} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}(b+c-a) \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(a+c-b)}. \end{aligned} \right.$$

§. 10.

Wir gehen nun über zur Auflösung der Aufgabe, die Radien der Berührungskreise eines sphärischen Dreieckes zu berechnen, wenn die Seiten oder Winkel desselben gegeben sind, und zur Ausmittelung der zwischen diesen Stücken statthabenden Beziehungen.

Bezeichnen wir den Radius des eingeschriebenen Kreises mit ϱ, und mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Radien der drei äusseren Berührungskreise, welche beziehungsweise den Ecken A, B, C gegenüber liegen, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken AOE und CO_1G (Taf. X. Fig. 6.) $OE=\varrho$, $O_1G=\varrho_1$, $\operatorname{tg}\varrho=\operatorname{Sin}AE.\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tg}\varrho_1=\operatorname{Sin}CG.\operatorname{tg}(90^0-\frac{1}{2}C)$; da aber nach §. 3.

$$AE=u=\tfrac{1}{2}(b+c-a),\quad CG=u'=\tfrac{1}{2}(a+c-b)$$

ist, so wird

$$\operatorname{tg}\varrho=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a),\quad \operatorname{tg}\varrho_1=\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b),$$

und wenn man diese zwei Gleichungen zum Quadrat erhebt und statt $\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A$, $\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}C$ ihre durch die drei Seiten a, b, c ausgedrückten Werthe substituirt, so erhält man leicht:

$$\operatorname{tg}^2\varrho=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(a+b+c)},$$

$$\operatorname{tg}^2\varrho_1=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(b+c-a)}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

(11)

$$H_1^2=\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

so hat man zur Berechnung der Radien der vier Berührungskreise eines sphärischen Dreieckes folgende Gleichungen:

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{tg}\varrho&=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)},\\ \operatorname{tg}\varrho_1&=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)},\\ \operatorname{tg}\varrho_2&=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)},\\ \operatorname{tg}\varrho_3&=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)},\end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad H_1^4=\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3.$$

§. 11.

Bekanntlich ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = &-\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c\\ &+\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c\\ &+\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c\\ &+\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b,\end{aligned}$$

und wenn man

$$(14)\quad\begin{cases}\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c = \varDelta,\\ \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c = \varDelta_1,\\ \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c = \varDelta_2,\\ \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}b = \varDelta_3\end{cases}$$

setzt, so findet man leicht:

$$(15)\quad\begin{cases}\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \dfrac{H_1}{\mathrm{tg}\,\varrho} = \varDelta_1+\varDelta_2+\varDelta_3-\varDelta,\\ \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \dfrac{H_1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1} = \varDelta+\varDelta_2+\varDelta_3-\varDelta_1,\\ \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \dfrac{H_1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2} = \varDelta+\varDelta_1+\varDelta_3-\varDelta_2,\\ \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \dfrac{H_1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3} = \varDelta+\varDelta_1+\varDelta_2-\varDelta_3.\end{cases}$$

Durch Addition dieser vier Gleichungen ergibt sich sogleich:

$$\varDelta+\varDelta_1+\varDelta_2+\varDelta_3 = \tfrac{1}{2}H_1\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}\right),$$

und wenn hiervon nach und nach die Gleichungen (15) abgezogen werden:

$$(16)\quad\begin{cases}\varDelta = \tfrac{1}{4}H_1\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}\right),\\ \varDelta_1 = \tfrac{1}{4}H_1\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}\right),\\ \varDelta_2 = \tfrac{1}{4}H_1\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}\right),\\ \varDelta_3 = \tfrac{1}{4}H_1\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}\right).\end{cases}$$

Denkt man sich hierin statt H_1 dessen Werth aus (13) substituirt, so erscheinen die Grössen $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ lediglich ausge-



drückt durch die Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der vier Berührungskreise. Wir können daher einerseits durch Auflösung der Gleichungen (14) in Bezug auf a, b, c die drei Seiten des Dreieckes ABC durch die Berührungsradien darstellen und andererseits durch Elimination der drei Seiten a, b, c aus den vier Gleichungen (14) zur Bedingungsgleichung gelangen, durch welche die vier Radien der Berührungskreise eines Dreieckes mit einander verbunden sind.

§. 12.

Erhebt man die Gleichungen (14) zum Quadrat, führt statt der Cosinus durchgehends die Sinus ein und setzt $\text{Sin}^2\frac{1}{2}a = x$, $\text{Sin}^2\frac{1}{2}b = y$, $\text{Sin}^2\frac{1}{2}c = z$, so erhält man:

$$(17)\quad \begin{cases} xyz = \Delta^2, \\ x(1-y)(1-z) = \Delta_1{}^2, \\ y(1-x)(1-z) = \Delta_2{}^2, \\ z(1-x)(1-y) = \Delta_3{}^2. \end{cases}$$

Wenn man die letzten drei Gleichungen mit einander multiplicirt, das Product durch xyz dividirt und aus dem Resultat die Quadratwurzel auszieht, so ergibt sich mit Rücksicht auf die erste Gleichung leicht:

$$(1-x)(1-y)(1-z) = \frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{\Delta},$$

und wenn man diese Gleichung nach und nach durch die zweite, dritte und vierte der Gleichungen (17) dividirt:

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta\Delta_1},\quad \frac{1}{y} - 1 = \frac{\Delta_1\Delta_3}{\Delta\Delta_2},\quad \frac{1}{z} - 1 = \frac{\Delta_1\Delta_2}{\Delta\Delta_3}$$

oder

$$(\Delta')\quad x = \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\Delta\Delta_1}{\Delta\Delta_1 + \Delta_2\Delta_3},\quad y = \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}b = \frac{\Delta\Delta_2}{\Delta\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3},$$

$$z = \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\Delta\Delta_3}{\Delta\Delta_3 + \Delta_1\Delta_2};$$

woraus mit Leichtigkeit folgt:

$$\text{Cos}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta\Delta_1 + \Delta_2\Delta_3},\quad \text{Cos}^2\tfrac{1}{2}b = \frac{\Delta_1\Delta_3}{\Delta\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3},\quad \text{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\Delta_1\Delta_2}{\Delta\Delta_3 + \Delta_1\Delta_2};$$

$$\text{tg}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\Delta\Delta_1}{\Delta_2\Delta_3},\qquad \text{tg}^2\tfrac{1}{2}b = \frac{\Delta\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3},\qquad \text{tg}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\Delta\Delta_3}{\Delta_1\Delta_2}.$$

Um also die drei Seiten des Dreieckes durch die Radien der Berührungskreise ausgedrückt zu erhalten, braucht man nur in diese Formeln statt $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ ihre in (16) gegebenen Werthe zu substituiren, und erhält z. B.:

$$
(18)\left\{
\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a &= \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right)}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right)}, \\
\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b &= \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\right)}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right)}, \\
\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}c &= \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right)}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Werden die Gleichungen $(\varDelta')$ mit einander multiplicirt und berücksichtigt man dabei die Gleichung $xyz=\varDelta^2$, so folgt als Bedingungsgleichung zwischen den vier Radien der Berührungskreise eines sphärischen Dreieckes:

$$(\varDelta\varDelta_1+\varDelta_2\varDelta_3)(\varDelta\varDelta_2+\varDelta_1\varDelta_3)(\varDelta\varDelta_3+\varDelta_1\varDelta_2)=\varDelta\varDelta_1\varDelta_2\varDelta_3,$$

in welcher ebenfalls statt $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ die Werthe aus (16) zu setzen sind.

§. 13.

Wenn wir in der Absicht, die im vorhergehenden Paragraphen erscheinenden Ausdrücke möglichst einfach durch die Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 darzustellen, für einen Augenblick

$$(\varDelta'')\qquad \frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}=\lambda,\quad \frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}=\lambda_1,\quad \frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}=\lambda_2,\quad \frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}=\lambda_3$$

und die Summe

$$(\varDelta''')\qquad \frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}=\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\sigma$$

setzen, so wird:

$$
(19)\quad \begin{cases}
\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}=2(\sigma-\lambda),\\
\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}=2(\sigma-\lambda_1),\\
\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}=2(\sigma-\lambda_2),\\
\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}=2(\sigma-\lambda_3),
\end{cases}
$$

$\varDelta=\frac{1}{2}H_1(\sigma-\lambda)$; $\varDelta_1=\frac{1}{2}H_1(\sigma-\lambda_1)$, $\varDelta_2=\frac{1}{2}H_1(\sigma-\lambda_2)$, $\varDelta_3=\frac{1}{2}H_1(\sigma-\lambda_3)$;

mithin ist

$$\varDelta\varDelta_1+\varDelta_2\varDelta_3=\tfrac{1}{4}H_1^2\{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)+(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)\};$$

da aber

$$(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)=\sigma^2-(\lambda+\lambda_1)\sigma+\lambda\lambda_1,$$
$$(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)=\sigma^2-(\lambda_2+\lambda_3)\sigma+\lambda_2\lambda_3;$$

so wird die Summe gleich

$$\sigma^2-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\sigma+\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3,$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gleichung $(\varDelta'')$:

$$(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)+(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)=\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3 \text{ und}$$
$$(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_2)+(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_3)=\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3,$$
$$(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_3)+(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)=\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2,$$

$$\varDelta\varDelta_1+\varDelta_2\varDelta_3=\tfrac{1}{4}H_1^2(\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3),\quad \varDelta\varDelta_2+\varDelta_1\varDelta_3=\tfrac{1}{4}H_1^2(\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3),$$
$$\varDelta\varDelta_3+\varDelta_1\varDelta_2=\tfrac{1}{4}H_1^2(\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2).$$

Es ist daher

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a=\frac{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)}{\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3},\ \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}b=\frac{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_2)}{\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3},\ \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_3)}{\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2};$$

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a=\frac{(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)}{\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3},\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b=\frac{(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_3)}{\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3},\ \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)}{\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2};$$

und die Bedingungsgleichung:

$$(\varDelta''')\qquad \tfrac{1}{4}H_1^2=\frac{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)}{(\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)(\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)(\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)};$$

oder, mit Anwendung der Gleichungen $(\varDelta'')$ und (19), nach einer leichten Rechnung:

(20)

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right),$$

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_3}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\right),$$

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_3+\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right);$$

(21)

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right),$$

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_3}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right),$$

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{4}\frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_3+\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\right);$$

(22)

$$4\,\frac{(\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1+\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3)(\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_2+\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_3)(\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_3+\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2)}{(\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3)^2}$$

$$=\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}\right).$$

Ferner ist

$$\operatorname{Sin}^2 a = 4\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}a = 4\,\frac{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)}{(\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)^2},$$

oder mit Anwendung der Bedingungsgleichung (Δ''):

$$\operatorname{Sin}^2 a = H_1^2\,\frac{(\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)(\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)}{\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3},$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Sin}^2 a &= \frac{(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_2+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_3)(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_3+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_2)}{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3},\\ \mathrm{Sin}^2 b &= \frac{(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3)(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_3+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_2)}{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_2+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_3},\\ \mathrm{Sin}^2 c &= \frac{(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3)(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_2+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_3)}{\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_3+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_2}; \end{aligned}\right.$$

$$(24)\qquad \mathrm{Sin}^2 a\,\mathrm{Sin}^2 b\,\mathrm{Sin}^2 c$$
$$=(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_1+\mathrm{tg}\varrho_2\,\mathrm{tg}\varrho_3)(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_2+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_3)(\mathrm{tg}\varrho\,\mathrm{tg}\varrho_3+\mathrm{tg}\varrho_1\,\mathrm{tg}\varrho_2).$$

Auch hat man nach dem Obigen:

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{(\sigma-\lambda_1)^2(\sigma-\lambda_2)^2(\sigma-\lambda_3)^2}{(\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)(\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)(\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)},$$

oder mit Anwendung der Bedingungsgleichung (Δ'''):

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{(\sigma-\lambda_1)^2(\sigma-\lambda_2)^2(\sigma-\lambda_3)^2}{\frac{4}{H_1^2}(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)}$$
$$=\frac{H_1^2}{4}\,\frac{(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)}{\sigma-\lambda}.$$

Bezeichnet ε den sphärischen Excess des Dreieckes ABC, so ist nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie:

$$\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{H_1^2}{4\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c},$$

mithin, wenn man für $\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}a$, $\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}b$, $\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c$ den vorhin gefundenen Werth setzt:

$$(\Delta^{IV})\qquad \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{\sigma-\lambda}{(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)}$$

oder

$$(25)\qquad \mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon$$
$$=\frac{\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho}}{\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho}+\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho}+\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho}+\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\mathrm{tg}\varrho_3}\right)}.$$

§. 14.

Da bekanntlich

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)},$$

so hat man mit Hilfe der Gleichungen (15) auch:

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\dfrac{H_1}{\operatorname{tg}\varrho_2}\cdot\dfrac{H_1}{\operatorname{tg}\varrho_3}}{\dfrac{H_1}{\operatorname{tg}\varrho}\cdot\dfrac{H_1}{\operatorname{tg}\varrho_1}} = \frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1}{\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3},$$

$$(26)\quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_1}{\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3},\quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_2}{\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_3},\quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho_3}{\operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2};$$

und so haben wir auch die Winkel des sphärischen Dreieckes ABC durch die Radien seiner vier Berührungskreise dargestellt.

Zusatz. Ist der Umfang des Dreieckes ABC gleich 180°, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c) = 90^0, \qquad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = 1,$$
$$\tfrac{1}{2}(b+c-a) = 90^0 - a, \qquad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \operatorname{Cos}a,$$
$$\tfrac{1}{2}(a+c-b) = 90^0 - b, \qquad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b) = \operatorname{Cos}b,$$
$$\tfrac{1}{2}(a+b-c) = 90^0 - c, \qquad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \operatorname{Cos}c;$$

mithin

$$H_1{}^2 = \operatorname{Cos}a\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c,$$

und die Gleichungen (12) geben alsdann:

$$(27)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\varrho = \operatorname{Cos}a\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c, \\ \operatorname{tg}^2\varrho_1 = \dfrac{\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c}{\operatorname{Cos}a}, \\ \operatorname{tg}^2\varrho_2 = \dfrac{\operatorname{Cos}a\operatorname{Cos}c}{\operatorname{Cos}b}, \\ \operatorname{tg}^2\varrho_3 = \dfrac{\operatorname{Cos}a\operatorname{Cos}b}{\operatorname{Cos}c}, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\varrho = \operatorname{tg}\varrho_1\operatorname{tg}\varrho_2\operatorname{tg}\varrho_3.$$

Ferner wird:

$$\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}A = \frac{\operatorname{tg}^2\varrho\operatorname{tg}^2\varrho_1}{\operatorname{tg}^2\varrho_2\operatorname{tg}^2\varrho_3} = \operatorname{Cos}^2b\operatorname{Cos}^2c\frac{\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c}{\operatorname{Cos}^2a\operatorname{Cos}b\operatorname{Cos}c} = \frac{\operatorname{Cos}^2b\operatorname{Cos}^2c}{\operatorname{Cos}^2a}$$
$$= \operatorname{tg}^4\varrho_1,$$

folglich ist:

$$(28)\ \begin{cases} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \operatorname{tg}\varrho_1, & \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \operatorname{tg}\varrho_2, & \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \operatorname{tg}\varrho_3; \\ A = 2\varrho_1, & B = 2\varrho_2, & C = 2\varrho_3. \end{cases}$$

Ist also in einem sphärischen Dreiecke die Summe der drei Seiten gleich 180°, so sind die Winkel desselben beziehungsweise den Durchmessern der gegenüberliegenden äusseren Berührungskreise gleich.

§. 15.

Wenn wir die Bezeichnung der vorhergehenden Paragraphen beibehalten, so ist:

$$\operatorname{Sin} A = \frac{2H_1}{\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}, \quad \operatorname{Sin} B = \frac{2H_1}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} c}, \quad \operatorname{Sin} C = \frac{2H_1}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b};$$

mithin

$$(29)\qquad \operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C = \frac{8H_1{}^3}{\operatorname{Sin}^2 a \operatorname{Sin}^2 b \operatorname{Sin}^2 c},$$

und wenn wir

$$H'^2$$

$$= -\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

setzen, so ist:

$$\operatorname{Sin} a = \frac{2H'}{\operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C}, \quad \operatorname{Sin} b = \frac{2H'}{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} C}, \quad \operatorname{Sin} c = \frac{2H'}{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B}$$

und

$$(30)\qquad \operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c = \frac{8H'^3}{\operatorname{Sin}^2 A \operatorname{Sin}^2 B \operatorname{Sin}^2 C}.$$

Wird aus den Gleichungen (29) und (30) einmal $\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c$ eliminirt und H_1 bestimmt, dann $\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C$ eliminirt und H' bestimmt, so ergibt sich:

$$(31)\qquad H_1 = \frac{2H'^2}{\operatorname{Sin} A \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} C},$$

$$(32)\qquad H' = \frac{2H_1{}^2}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}.$$

Die erste Gleichung gibt die Radicalgrösse H_1, ausgedrückt durch die drei Winkel, und die zweite die Radicalgrösse H', ausgedrückt durch die drei Seiten.

Ferner ist bekanntlich:

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin}c},\quad \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin}c}$$

und wenn man hierin statt $\operatorname{Sin}c$ seinen obigen, durch die drei Winkel ausgedrückten Werth setzt und dann $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)$, $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)$ bestimmt, nach einer kleinen Reduction:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{H'}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\frac{H'}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C};$$

folglich:

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}{H_1}=\frac{H'}{H_1}\cdot\frac{1}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}=\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho},$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{H_1}=\frac{H'}{H_1}\cdot\frac{1}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}=\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1};$$

oder weil aus (31):

$$\frac{H'}{H_1}=\frac{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}{H'}$$

folgt:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}=\frac{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}{H'},\quad \frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}=\frac{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}{H'};$$

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{tg}\varrho&=\frac{H'}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C},\\ \operatorname{tg}\varrho_1&=\frac{H'}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C},\\ \operatorname{tg}\varrho_2&=\frac{H'}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C},\\ \operatorname{tg}\varrho_3&=\frac{H'}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}.\end{aligned}\right.$$

Diese vier Gleichungen bestimmen die Radien der vier Berührungskreise durch die drei Winkel.

Zusatz. Aus der ersten Gleichung dieses Paragraphen folgt auch

$$\frac{\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Sin}a}=\frac{2H_1}{\operatorname{Sin}a\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c},$$

oder weil nach der Gleichung (32):

$$\frac{2H_1}{\operatorname{Sin}a\operatorname{Sin}b\operatorname{Sin}c}=\frac{H'}{H_1},$$

so ergibt sich auch die Relation:

$$\frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} a}=\frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} b}=\frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} c}=\frac{H'}{H_1}. \tag{34}$$

§. 16.

Anwendung der vorhergehenden Formeln auf das Polardreieck.

Sind a', b', c' die drei Seiten, A', B', C' die drei Winkel des dem Dreieck ABC entsprechenden Polardreieckes, so ist:

$$\begin{aligned} a' &= 180^\circ - A, & A' &= 180^\circ - a, \\ b' &= 180^\circ - B, & B' &= 180^\circ - b, \\ c' &= 180^\circ - C; & C' &= 180^\circ - c; \end{aligned}$$

mithin:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(a'+b'+c') &= 270^\circ - \tfrac{1}{2}(A+B+C), & \tfrac{1}{2}(A'+B'+C') &= 270^\circ - \tfrac{1}{2}(a+b+c), \\ \tfrac{1}{2}(b'+c'-a') &= \ 90^\circ - \tfrac{1}{2}(B+C-A), & \tfrac{1}{2}(B'+C'-A') &= \ 90^\circ - \tfrac{1}{2}(b+c-a), \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a'+b'+c') &= -\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C), & -\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A'+B'+C') &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c), \\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b'+c'-a') &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A), & \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B'+C'-A') &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a), \\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a'+c'-b') &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B), & \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A'+C'-B') &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b), \\ \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a'+b'-c') &= \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C), & \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A'+B'-C') &= \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c). \end{aligned}$$

Setzen wir daher für das Polardreieck:

$$K_1{}^2 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a'+b'+c')\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b'+c'-a')\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a'+c'-b')\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a'+b'-c'),$$

$$K'^2 = -\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A'+B'+C')\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B'+C'-A')\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A'+C'-B') \\ \times \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A'+B'-C'),$$

so ist offenbar

$$K_1 = H', \quad K' = H_1.$$

Ist ϱ' der Radius des dem Polardreieck eingeschriebenen Kreises und sind ϱ_1', ϱ_2', ϱ_3' die Radien der äusseren Berührungskreise desselben, welche beziehungsweise den Ecken A', B', C' gegenüberliegen, so geben die Gleichungen (12):

$$\operatorname{tg}\varrho' = \frac{K_1}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a'+b'+c')}, \quad \operatorname{tg}\varrho_1' = \frac{K_1}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b'+c'-a')} \text{ u. s. w.},$$

oder nach dem Obigen:

$$(35)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varrho' = -\dfrac{H'}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}, \\ \operatorname{tg}\varrho_1' = \dfrac{H'}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)}, \\ \operatorname{tg}\varrho_2' = \dfrac{H'}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}, \\ \operatorname{tg}\varrho_3' = \dfrac{H'}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)}; \end{cases}$$

und die Gleichungen (33):

$$\operatorname{tg}\varrho' = \frac{K'}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A'\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B'\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C'}, \quad \operatorname{tg}\varrho_1' = \frac{K'}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A'\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B'\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C'}$$

u. s. w.

also auch:

$$(36)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varrho' = \dfrac{H_1}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}, \\ \operatorname{tg}\varrho_1' = \dfrac{H_1}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}, \\ \operatorname{tg}\varrho_2' = \dfrac{H_1}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}, \\ \operatorname{tg}\varrho_3' = \dfrac{H_1}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}. \end{cases}$$

Diese zwei Systeme von Gleichungen geben die Radien der Berührungskreise des Polardreieckes, ausgedrückt durch die Winkel oder Seiten des Hauptdreieckes.

§. 17.

Aus den Gleichungen (35) folgt auch:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\frac{H'}{\operatorname{tg}\varrho'},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \frac{H'}{\operatorname{tg}\varrho_1'},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B) = \frac{H'}{\operatorname{tg}\varrho_2'},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{H'}{\operatorname{tg}\varrho_3'};$$

und wenn man diese Gleichungen addirt und berücksichtigt, dass

$$\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C)+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)$$
$$+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)=4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C,$$

so erhält man sofort:

$$H'\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}\right)=4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C$$

oder

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}=\frac{4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C}{H'}=\frac{2}{\mathrm{tg}\,\varrho}\ \text{[nach (33)]},$$

mithin ist:

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}\right);$$

ebenso hat man, weil

$$-\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C)-\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)$$
$$+\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)=4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C$$

ist:

$$H'\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}\right)=4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C,$$

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}=\frac{4\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C}{H'}=\frac{2}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}\ \text{[nach (33)]},$$

und es ergibt sich daher folgendes System von Gleichungen:

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}\right),\\
\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}\right),\\
\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}\right),\\
\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}\right);
\end{aligned}\right.$$

durch deren Summirung nachstehende merkwürdige Relation entsteht:

$$(38)\quad \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'};$$

und wirft man hievon nach und nach die erste, zweite, dritte und vierte Gleichung in (37) subtrahirt:

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}=\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}\right), \\[2ex] \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}=\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}\right), \\[2ex] \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}=\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}\right), \\[2ex] \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}=\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3}\right); \end{cases}$$

durch welche letzteren Gleichungen die Radien der Berührungskreise des Polardreieckes berechnet werden können, wenn jene des Hauptdreieckes gegeben sind.

§. 18.

Die zwischen den Radien der Berührungskreise des Polardreieckes bestehende Bedingungsgleichung wird natürlich aus jener (22) abgeleitet, wenn man alle in ihr enthaltenen ϱ mit Strichen versieht, so dass man hat:

$$(40)$$

$$4\frac{(\mathrm{tg}\,\varrho'\,\mathrm{tg}\,\varrho_1'+\mathrm{tg}\,\varrho_2'\,\mathrm{tg}\,\varrho_3')(\mathrm{tg}\,\varrho'\,\mathrm{tg}\,\varrho_2'+\mathrm{tg}\,\varrho_1'\,\mathrm{tg}\,\varrho_3')(\mathrm{tg}\,\varrho'\,\mathrm{tg}\,\varrho_3'+\mathrm{tg}\,\varrho_1'\,\mathrm{tg}\,\varrho_2')}{(\mathrm{tg}\,\varrho'\,\mathrm{tg}\,\varrho_1'\,\mathrm{tg}\,\varrho_2'\,\mathrm{tg}\,\varrho_3')^2}$$

$$=\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_1'}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_2'}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varrho_3'}\right).$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\mathrm{tg}\,\varrho'$, $\mathrm{tg}\,\varrho_1'$, $\mathrm{tg}\,\varrho_2'$, $\mathrm{tg}\,\varrho_3'$ durch ihre Werthe in (39) und bedient sich zugleich zur Abkürzung der Bezeichnung des §. 13., so wird der Zähler des ersten Theiles gleich:

$$\left.\begin{array}{l} 4\left\{\dfrac{1}{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)}+\dfrac{1}{(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)}\right\} \\[2ex] \times\left\{\dfrac{1}{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_2)}+\dfrac{1}{(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_3)}\right\} \\[2ex] \times\left\{\dfrac{1}{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_3)}+\dfrac{1}{(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)}\right\} \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} 4\dfrac{\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3}{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)} \\[2ex] \times\dfrac{\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3}{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)} \\[2ex] \times\dfrac{\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2}{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)} \end{array}\right.$$

und der Nenner des ersten Theiles gleich

$$\frac{1}{\{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)\}^2}.$$

Da sich ferner der zweite Theil der Bedingungsgleichung verwandelt in

$$16\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

so hat man statt (40):

$$\frac{(\lambda\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)(\lambda\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)(\lambda\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)}{(\sigma-\lambda)(\sigma-\lambda_1)(\sigma-\lambda_2)(\sigma-\lambda_3)}=4\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

eine Gleichung, welche mit jener $(\varDelta''')$ identisch ist und unmittelbar in die Bedingungsgleichung (22) übergeht, wenn man statt λ, λ_1, λ_2, λ_3 und σ seine in §. 13. angegebenen Werthe substituirt, wie schon früher gezeigt wurde. Die Bedingungsgleichung (22) hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass sie ungeändert bleibt, wenn man in ihr $\operatorname{tg}\varrho$, $\operatorname{tg}\varrho_1$, $\operatorname{tg}\varrho_2$, $\operatorname{tg}\varrho_3$ durch

$$\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}},$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}},$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}},$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3}}$$

ersetzt.

§. 19.

Ist O (Taf. X. Fig. 8.) der Mittelpunkt und r der Radius des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises, und legt man durch diesen Punkt die drei sphärischen Hauptbogen OA, OB, OC, so ist $OA=OB=OC=r$, und es entstehen offenbar drei gleichschenkelige Dreiecke: OBC, OAC, OAB, deren Winkel an der Basis durch folgende drei Gleichungen bestimmt werden:

$$v_1+w_1=A,\quad u_1+w_1=B,\quad u_1+v_1=C;$$

dieselben geben in der That mit Leichtigkeit:

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(B+C-A),\quad v_1 = \tfrac{1}{2}(A+C-B),\quad w_1 = \tfrac{1}{2}(A+B-C).$$

Fällt man nun von O auf die Seite a das sphärische Perpendikel OD, so ist $\operatorname{tg} CD = \operatorname{tg} OC . \operatorname{Cos} u_1$, oder, weil $CD = \tfrac{1}{2} a$ nach dem Obigen, $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \operatorname{tg} r . \operatorname{Cos} u_1$, und hieraus:

(41)

$$\operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}b}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)};$$

da aber bekanntlich

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a \operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}\operatorname{Sin} C \text{ und } \operatorname{Sin} C = \frac{2H_1}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b},$$

so ist auch

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \frac{H_1}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a \operatorname{Sin}\frac{1}{2}b \operatorname{Sin}\frac{1}{2}c},$$

und demnach

$$(42)\qquad \operatorname{tg} r = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a \operatorname{Sin}\frac{1}{2}b \operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{H_1},$$

nach welcher Formel r berechnet werden kann, wenn die drei Seiten des Dreieckes gegeben sind.

Wenn man diese Gleichung mit jener (Δ^{IV}) §. 13. verbindet, so erhält man auch:

$$\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}{2H_1^2},$$

oder weil nach (32)

$$\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c = \frac{2H_1^2}{H'},$$

so wird:

$$\operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varepsilon}{H'},$$

oder endlich, da $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varepsilon = -\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)$ ist:

$$(43)\qquad \operatorname{tg} r = -\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)}{H'},$$

nach welcher Formel r berechnet werden kann, wenn die drei Winkel des Dreieckes ABC gegeben sind.

Zusatz. Nach dem Obigen ist:

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}{2H_1},$$

mithin auch:

$$\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A} = 2\frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a \operatorname{Sin}\frac{1}{2}b \operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{H_1}.\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c,$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (42):

$$(44)\quad \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{\operatorname{Sin} b}{\operatorname{Sin} B} = \frac{\operatorname{Sin} c}{\operatorname{Sin} C} = 2\operatorname{tg} r.\{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\}.$$

§. 20.

In dem Nebendreiecke A_1BC, welches an der Seite a liegt, ist, wenn wir $A_1C = b_1$, $A_1B = c_1$, $\angle A_1BC = B_1$, $\angle A_1CB = C_1$ setzen:

$$b_1 = 180^0 - b,\quad c_1 = 180^0 - c,\quad B_1 = 180^0 - B,\quad C_1 = 180^0 - C;$$

mithin:

$$\tfrac{1}{2}(a+b_1+c_1) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(b+c-a),\quad \tfrac{1}{2}(A+B_1+C_1) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(B+C-A),$$

$$\tfrac{1}{2}(b_1+c_1-a) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(a+b+c),\quad \tfrac{1}{2}(B_1+C_1-A) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(A+B+C),$$

$$\tfrac{1}{2}(a+c_1-b_1) = \tfrac{1}{2}(a+b-c),\quad \tfrac{1}{2}(A+C_1-B_1) = \tfrac{1}{2}(A+B-C),$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b_1-c_1) = \tfrac{1}{2}(a+c-b);\quad \tfrac{1}{2}(A+B_1-C_1) = \tfrac{1}{2}(A+C-B);$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b_1+c_1) = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b+c-a),\quad -\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B_1+C_1) = +\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A),$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b_1+c_1-a) = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b+c),\quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B_1+C_1-A) = -\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C),$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c_1-b_1) = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b-c),\quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C_1-B_1) = +\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C),$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b_1-c_1) = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+c-b);\quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B_1-C_1) = +\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B);$$

woraus folgt, dass die mit H_1 und H' bezeichneten Radicale in beiden Dreiecken ABC und A_1BC gleichen Werth haben, und wenn wir den Radius des dem Dreiecke A_1BC umschriebenen Kreises mit r_1 bezeichnen, so ist nach (41), (42) und (43):

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B_1+C_1-A)} = \frac{-\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\varepsilon},$$

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a \operatorname{Sin}\frac{1}{2}b_1 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}c_1}{H_1} = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a \operatorname{Cos}\frac{1}{2}b \operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}{H_1},$$

$$\operatorname{tg} r_1 = -\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A_1 + B_1 + C_1)}{H'} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B + C - A)}{H'}.$$

Wenn wir noch die Radien der umschriebenen Kreise der beiden an den Seiten b und c liegenden Nebendreiecke mit r_2 und r_3 bezeichnen und alles zusammenstellen, so hat man folgende drei Systeme von Gleichungen:

$$(45)\qquad \operatorname{tg} r_1 = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s};\quad \operatorname{tg} r_2 = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}b}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s},\quad \operatorname{tg} r_3 = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s};$$

$$(46)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} r = \dfrac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}{H_1}, \\[2ex] \operatorname{tg} r_1 = \dfrac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}{H_1}, \\[2ex] \operatorname{tg} r_2 = \dfrac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}{H_1}, \\[2ex] \operatorname{tg} r_3 = \dfrac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b}{H_1}; \end{cases}$$

$$(47)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} r = -\dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A + B + C)}{H'}, \\[2ex] \operatorname{tg} r_1 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B + C - A)}{H'}, \\[2ex] \operatorname{tg} r_2 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A + C - B)}{H'}, \\[2ex] \operatorname{tg} r_3 = \dfrac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A + B - C)}{H'}. \end{cases}$$

Werden die Gleichungen (46) mit einander multiplicirt, so ergibt sich mit Anwendung der Gleichung (11) auch die Relation:

$$(48)\qquad \operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} r_3 = \frac{1}{H'^2}.$$

Zusatz. Aus den Gleichungen (45) folgt:

$$(49)\qquad \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}s = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tg} r_1} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}b}{\operatorname{tg} r_2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}{\operatorname{tg} r_3},$$

wovon man sich auch leicht durch die Betrachtung der Figur überzeugen kann; denn ist O' (Taf. X. Fig. 8.) der Mittelpunkt des dem Nebendreiecke A_1BC umschriebenen Kreises und man fällt auf die Seite a das sphärische Perpendikel $O'D$ und verbindet O' mit C, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $O'CD$:

$$\text{tg}\,CD = \text{tg}\,O'C.\text{Cos}\,\varphi,$$

oder, weil $CD = \frac{1}{2}a$, $O'C = r$, und nach §. 20.

$$\varphi = (B_1 + C_1 - A) = 180^0 - \tfrac{1}{2}(A + B + C) = 90^0 - \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

ist:

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}a = \text{tg}\,r.\text{Sin}\tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ u. s. w.}$$

Aus den Gleichungen (49) wird auch ersichtlich, dass, da ε nur von a und r_1 abhängig ist, alle über derselben Seite a errichteten Dreiecke gleichen sphärischen Excess oder, was dasselbe ist, gleiche Winkelsumme haben, wenn ihre an dieser Seite liegenden Nebendreiecke demselben Kreise eingeschrieben sind.

§. 21.

Wenden wir die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln auf das Polardreieck an, indem wir den Radius des demselben umschriebenen Kreises mit r' und mit r_1', r_2', r_3' die Radien der den drei Nebendreiecken umschriebenen Kreise bezeichnen, welche in derselben Ordnung an den Seiten a', b', c' liegen, so ist, der in §. 16. eingeführten Bezeichnung gemäss:

$$\text{tg}\,r' = -\frac{\text{Cos}\frac{1}{2}(A' + B' + C')}{K'}, \quad \text{tg}\,r' = \frac{2\,\text{Sin}\frac{1}{2}a'\,\text{Sin}\frac{1}{2}b'\,\text{Sin}\frac{1}{2}c'}{K_1},$$

$$\text{tg}\,r_1' = \frac{\text{Cos}\frac{1}{2}(B' + C' - A')}{K'}, \quad \text{tg}\,r_1' = \frac{2\,\text{Sin}\frac{1}{2}a'\,\text{Cos}\frac{1}{2}b'\,\text{Cos}\frac{1}{2}c'}{K_1},$$

u. s. w. u. s. w.

oder:

$$(50)\quad \begin{cases} \text{tg}\,r' = \dfrac{\text{Sin}\frac{1}{2}(a + b + c)}{H_1}, \\ \text{tg}\,r_1' = \dfrac{\text{Sin}\frac{1}{2}(b + c - a)}{H_1}, \\ \text{tg}\,r_2' = \dfrac{\text{Sin}\frac{1}{2}(a + c - b)}{H_1}, \\ \text{tg}\,r_3' = \dfrac{\text{Sin}\frac{1}{2}(a + b - c)}{H_1}; \end{cases}$$

$$(51)\quad \begin{cases} \text{tg}\,r' = \dfrac{2\,\text{Cos}\frac{1}{2}A\,\text{Cos}\frac{1}{2}B\,\text{Cos}\frac{1}{2}C}{H'}, \\ \text{tg}\,r_1' = \dfrac{2\,\text{Cos}\frac{1}{2}A\,\text{Sin}\frac{1}{2}B\,\text{Sin}\frac{1}{2}C}{H'}, \\ \text{tg}\,r_2' = \dfrac{2\,\text{Cos}\frac{1}{2}B\,\text{Sin}\frac{1}{2}A\,\text{Sin}\frac{1}{2}C}{H'}, \\ \text{tg}\,r_3' = \dfrac{2\,\text{Cos}\frac{1}{2}C\,\text{Sin}\frac{1}{2}A\,\text{Sin}\frac{1}{2}B}{H'}. \end{cases}$$

Durch Multiplication der Gleichungen (50) mit einander erhält man auch mit Rücksicht auf (11) die Relation:

$$\text{(52)} \qquad \operatorname{tg} r' \operatorname{tg} r_1' \operatorname{tg} r_2' \operatorname{tg} r_3' = \frac{1}{H_1^2},$$

und durch Multiplication der Gleichungen (47), (35) und jener (12), (50) mit einander:

(53)

$$\begin{array}{llll}
\operatorname{tg} r \operatorname{tg} \varrho' = 1, & \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} r' = 1, & \text{also } r + \varrho' = 90^\circ, & \varrho + r' = 90^\circ, \\
\operatorname{tg} r_1 \operatorname{tg} \varrho_1' = 1, & \operatorname{tg} \varrho_1 \operatorname{tg} r_1' = 1, & r_1 + \varrho_1' = 90^\circ, & \varrho_1 + r_1' = 90^\circ, \\
\operatorname{tg} r_2 \operatorname{tg} \varrho_2' = 1, & \operatorname{tg} \varrho_2 \operatorname{tg} r_2' = 1, & r_2 + \varrho_2' = 90^\circ, & \varrho_2 + r_2' = 90^\circ, \\
\operatorname{tg} r_3 \operatorname{tg} \varrho_3' = 1, & \operatorname{tg} \varrho_3 \operatorname{tg} r_3' = 1; & r_3 + \varrho' = 90^\circ, & \varrho_3 + r_3' = 90^\circ.
\end{array}$$

Die Summe der Radien des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises und des dem Polardreieck umschriebenen Kreises ist also constant und stets gleich einem Quadranten.

Weil $\operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} r' = \operatorname{tg} r \operatorname{tg} \varrho'$, so hat man auch die Proportion $\operatorname{tg} \varrho : \operatorname{tg} \varrho' = \operatorname{tg} r : \operatorname{tg} r'$, welche in Worte gekleidet lautet: Die Tangenten der Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise eines sphärischen Dreieckes und seines Polardreieckes stehen in directer Proportion.

§. 22.

Durch Verbindung der Gleichungen (53) und (39) mit einander erhält man auch ohne Schwierigkeit:

$$\text{(54)} \qquad \left\{ \begin{array}{l}
\operatorname{tg} r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho}\right), \\
\operatorname{tg} r_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varrho} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_1}\right), \\
\operatorname{tg} r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varrho} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_2}\right), \\
\operatorname{tg} r_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varrho} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_3}\right)
\end{array} \right.$$

zur Berechnung der Radien der umschriebenen Kreise, wenn jene der Berührungskreise gegeben sind. Werden diese Gleichungen addirt, so folgt:

$$\text{(55)} \qquad \operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_1 + \operatorname{tg} r_2 + \operatorname{tg} r_3 = \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho_3},$$

und wenn hiervon nach und nach die Gleichungen (54) abgezogen werden:

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varrho} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r) = \operatorname{tg}r', \\ \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varrho_1} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_1) = \operatorname{tg}r_1', \\ \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varrho_2} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_2) = \operatorname{tg}r_2', \\ \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varrho_3} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 - \operatorname{tg}r_3) = \operatorname{tg}r_3'. \end{cases}$$

§. 23.

Um die drei Seiten, die drei Winkel und den sphärischen Excess des Dreieckes ABC durch die Radien r, r_1, r_2, r_3 der umschriebenen Kreise zu bestimmen und die Bedingungsgleichung zu erhalten, durch welche diese letzteren mit einander zusammenhängen, braucht man nur aus den Gleichungen (18), (26), (25) und (22) mit Hilfe der im vorigen Paragraphen erhaltenen Relationen die Radien der Berührungskreise zu eliminiren, und erhält nach einer leichten Rechnung ohne Weiteres:

$$(57)\quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1}{\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3},\quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b = \frac{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_2}{\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_3},\quad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_3}{\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2};$$

$$(58)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A = \dfrac{(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_2)(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 - \operatorname{tg}r_3)}{(\operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r)(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_1)}, \\ \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B = \dfrac{(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_1)(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 - \operatorname{tg}r_3)}{(\operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r)(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_2)}, \\ \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C = \dfrac{(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_1)(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_2)}{(\operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r)(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 - \operatorname{tg}r_3)}; \end{cases}$$

$$(59)\quad \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}r}{\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3};$$

(60)

$$4\frac{(\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3)(\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_3)(\operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_3 + \operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2)}{\left\{\begin{array}{l}(\operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r)(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_2 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_1) \\ \times(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_3 - \operatorname{tg}r_2)(\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}r_1 + \operatorname{tg}r_2 - \operatorname{tg}r_3)\end{array}\right\}}$$

$$= \operatorname{tg}r\operatorname{tg}r_1\operatorname{tg}r_2\operatorname{tg}r_3.$$

§. 24.

Wenn man vom sphärischen Dreieck auf seine körperliche Ecke übergeht, so entspricht dem eingeschriebenen Kreise ein Kegel, welcher diesen letzteren zur Basis, mit der körperlichen Ecke eine gemeinschaftliche Spitze hat und die Seitenflächen desselben berührt. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises mit dem Mittelpunkte der Kugel ist die Axe des eingeschriebenen Kegels, und der Winkel, welchen diese mit den Seiten des Kegels bildet, repräsentirt den sphärischen Radius. Denkt man sich zwei Seitenflächen des Körperwinkels über die dritte hinaus erweitert, so entsteht eine zweite körperliche Ecke, deren eingeschriebener Kegel ein äusserer Berührungskegel der ersten ist, und so wie jedes sphärische Dreieck drei äussere Berührungskreise hat, so hat jede dreiseitige körperliche Ecke drei äussere Berührungskegel. Die sphärischen Bogen, welche wir im Vorhergehenden immer mit O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3 bezeichnet haben, sind alsdann die Winkel, welche die Axen der äusseren Berührungskegel mit einander einschliessen. Die Bogen OO_1, OO_2, OO_3 sind die Winkel, welche die Axen der äusseren Berührungskegel mit der Axe des eingeschriebenen Kegels bilden. Ebenso entspricht dem, einem sphärischen Dreiecke umschriebenen Kreise ein Kegel, welcher jenen Kreis zur Grundfläche hat und durch die Kanten des Körperwinkels geht, u. s. w. Von diesem Gesichtspunkte aus können die vorhergehenden Sätze, Relationen und Formeln unmittelbar auf die dreiseitige körperliche Ecke übertragen und zur Lösung vieler stereometrischer Aufgaben verwendet werden.

§. 25.

Wir gehen nun über zur Ableitung einiger Relationen zwischen den in den ersten neun Paragraphen berechneten Distanzen und den Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise.

Aus den Gleichungen (3), (6) und (9) folgt durch Multiplication:

$$\operatorname{tg} OA.\operatorname{tg} OB.\operatorname{tg} OC = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}.\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B}.\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C},$$

$$\operatorname{tg} O_1A.\operatorname{tg} O_1B.\operatorname{tg} O_1C = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A}.\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B}.\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}$$

oder

$$\operatorname{tg} OA.\operatorname{tg} OB.\operatorname{tg} OC=\frac{H_1^2}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\cdot\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}$$

$$\times\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)},$$

$$\operatorname{tg} O_1A.\operatorname{tg} O_1B.\operatorname{tg} O_1C=\frac{H_1^2}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}\cdot\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}$$

$$\times\frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)};$$

oder weil nach (12) und (33):

$$\operatorname{tg}\varrho=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)},\quad \operatorname{tg}\varrho=\frac{H'}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C},$$

$$\operatorname{tg}\varrho_1=\frac{H_1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)},\quad \operatorname{tg}\varrho_1=\frac{H'}{2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A\operatorname{Sin}\frac{1}{2}B\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C},$$

und wenn wir zur Abkürzung

(61)

$$\mathfrak{H}_1^2=\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)$$

setzen:

$$\operatorname{tg} OA.\operatorname{tg} OB.\operatorname{tg} OC=2\operatorname{tg}^2\varrho\frac{H_1}{H'}\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\mathfrak{H}_1^2},$$

$$\operatorname{tg} O_1A.\operatorname{tg} O_1B.\operatorname{tg} O_1C=2\operatorname{tg}^2\varrho_1\frac{H_1}{H'}\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathfrak{H}_1^2}.$$

Da aber nach dem Obigen:

$$\frac{H_1}{H'}=\frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Sin} A}=2\operatorname{tg} r.\{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c\},$$

so wird:

(62)

$$\operatorname{tg} OA.\operatorname{tg} OB.\operatorname{tg} OC=4\operatorname{tg}^2\varrho\operatorname{tg} r.\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\mathfrak{H}_1^2}\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c\right\},$$

$$\operatorname{tg} O_1A.\operatorname{tg} O_1B.\operatorname{tg} O_1C=4\operatorname{tg}^2\varrho_1\operatorname{tg} r.\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathfrak{H}_1^2}\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c\right\},$$

$$\operatorname{tg} O_2A.\operatorname{tg} O_2B.\operatorname{tg} O_2C=4\operatorname{tg}^2\varrho_2\operatorname{tg} r.\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\mathfrak{H}_1^2}\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c\right\},$$

$$\operatorname{tg} O_3A.\operatorname{tg} O_3B.\operatorname{tg} O_3C=4\operatorname{tg}^2\varrho_3\operatorname{tg} r.\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathfrak{H}_1^2}\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a\operatorname{Cos}\frac{1}{2}b\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c\right\}.$$

§. 26.

Ebenso geben die Gleichungen (8) und (10):

$$\operatorname{tg} OO_1 \cdot \operatorname{tg} OO_2 \cdot \operatorname{tg} OO_3$$
$$= \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\frac{1}{2}B \operatorname{Cos}\frac{1}{2}C} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b-c)},$$

$$\operatorname{tg} O_1 O \cdot \operatorname{tg} O_1 O_2 \cdot \operatorname{tg} O_1 O_3$$
$$= \frac{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}A \operatorname{Sin}\frac{1}{2}B \operatorname{Sin}\frac{1}{2}C} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b-c)};$$

oder mit Rücksicht auf das Obige und weil

$$\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c = \frac{2H_1^2}{H'}$$

ist:

$$\operatorname{tg} OO_1 \cdot \operatorname{tg} OO_2 \cdot \operatorname{tg} OO_3 = 4 \operatorname{tg} \varrho \frac{H_1^2}{H'^2} \cdot \frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(a+b+c)}{\mathfrak{H}_1^4},$$

$$\operatorname{tg} O_1 O \cdot \operatorname{tg} O_1 O_2 \cdot \operatorname{tg} O_1 O_3 = 4 \operatorname{tg} \varrho_1 \frac{H_1^2}{H'^2} \cdot \frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathfrak{H}_1^4};$$

also auch:

$$(63) \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tg} OO_1 \cdot \operatorname{tg} OO_2 \cdot \operatorname{tg} OO_3 \\
&= 16 \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg}^2 r \cdot \left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\mathfrak{H}_1^2} \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\right\}^2, \\
&\operatorname{tg} O_1 O \cdot \operatorname{tg} O_1 O_2 \cdot \operatorname{tg} O_1 O_3 \\
&= 16 \operatorname{tg} \varrho_1 \operatorname{tg}^2 r \cdot \left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathfrak{H}_1^2} \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\right\}^2, \\
&\operatorname{tg} O_2 O \cdot \operatorname{tg} O_2 O_1 \cdot \operatorname{tg} O_2 O_3 \\
&= 16 \operatorname{tg} \varrho_2 \operatorname{tg}^2 r \cdot \left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\mathfrak{H}_1^4} \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\right\}^2, \\
&\operatorname{tg} O_3 O \cdot \operatorname{tg} O_3 O_1 \cdot \operatorname{tg} O_3 O_2 \\
&= 16 \operatorname{tg} \varrho_3 \operatorname{tg}^2 r \cdot \left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathfrak{H}_1^4} \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\right\}^2.
\end{aligned}\right.$$

§. 27.

Multiplicirt man die Gleichungen (63) der Reihe nach mit

$\operatorname{tg}^2\varrho$, $\operatorname{tg}^2\varrho_1$, $\operatorname{tg}^2\varrho_2$, $\operatorname{tg}^2\varrho_3$ und erhebt die Gleichungen (62) zum Quadrat, so sind die zweiten Theile derselben beziehungsweise einander gleich, und es ist daher auch:

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\operatorname{tg} OA.\operatorname{tg} OB.\operatorname{tg} OC)^2 = \operatorname{tg}^8\varrho.(\operatorname{tg} OO_1.\operatorname{tg} OO_2.\operatorname{tg} OO_3),\\
&(\operatorname{tg} O_1A.\operatorname{tg} O_1B.\operatorname{tg} O_1C)^2 = \operatorname{tg}^8\varrho_1.(\operatorname{tg} O_1O.\operatorname{tg} O_1O_2.\operatorname{tg} O_1O_3),\\
&(\operatorname{tg} O_2A.\operatorname{tg} O_2B.\operatorname{tg} O_2C)^2 = \operatorname{tg}^8\varrho_2.(\operatorname{tg} O_2O.\operatorname{tg} O_2O_1.\operatorname{tg} O_2O_3),\\
&(\operatorname{tg} O_3A.\operatorname{tg} O_3B.\operatorname{tg} O_3C)^2 = \operatorname{tg}^8\varrho_3.(\operatorname{tg} O_3O.\operatorname{tg} O_3O_1.\operatorname{tg} O_3O_2).
\end{aligned}\right.$$

§. 28.

Multiplicirt man der Reihe nach und paarweise die Gleichungen (62) und (63) mit einander und setzt zur Vereinfachung der Resultate:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} R &= \operatorname{tg} r.\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\mathfrak{G}_1^2}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\right\},\\
\operatorname{tg} R_1 &= \operatorname{tg} r.\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathfrak{G}_1^2}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\right\},\\
\operatorname{tg} R_2 &= \operatorname{tg} r.\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\mathfrak{G}_1^2}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\right\},\\
\operatorname{tg} R_3 &= \operatorname{tg} r.\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathfrak{G}_1^2}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}a\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}b\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c\right\};
\end{aligned}$$

so ergibt sich sofort:

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\operatorname{tg} OA.\operatorname{tg} OB.\operatorname{tg} OC)(\operatorname{tg} OO_1.\operatorname{tg} OO_2.\operatorname{tg} OO_3)\\
&\qquad = 64\operatorname{tg}^3\varrho.\operatorname{tg}^3 R,\\
&(\operatorname{tg} O_1A.\operatorname{tg} O_1B.\operatorname{tg} O_1C)(\operatorname{tg} O_1O.\operatorname{tg} O_1O_2.\operatorname{tg} O_1O_3)\\
&\qquad = 64\operatorname{tg}^3\varrho_1.\operatorname{tg}^3 R_1,\\
&(\operatorname{tg} O_2A.\operatorname{tg} O_2B.\operatorname{tg} O_2C)(\operatorname{tg} O_2O.\operatorname{tg} O_2O_1.\operatorname{tg} O_2O_3)\\
&\qquad = 64\operatorname{tg}^3\varrho_2.\operatorname{tg}^3 R_2,\\
&(\operatorname{tg} O_3A.\operatorname{tg} O_3B.\operatorname{tg} O_3C)(\operatorname{tg} O_3O.\operatorname{tg} O_3O_1.\operatorname{tg} O_3O_2)\\
&\qquad = 64\operatorname{tg}^3\varrho_3.\operatorname{tg}^3 R_3.
\end{aligned}\right.$$

§. 29.

Multiplicirt man endlich die Gleichungen (62) der Reihe nach

mit $(4\operatorname{tg}R)^3$, $(4\operatorname{tg}R_1)^3$, $(4\operatorname{tg}R_2)^3$, $(4\operatorname{tg}R_3)^3$ und erhebt die Gleichungen (63) zum Quadrat, so sind die zweiten Theile derselben paarweise einander gleich und man hat demnach auch:

$$(66)\left\{\begin{aligned}
&(\operatorname{tg}OO_1.\operatorname{tg}OO_2.\operatorname{tg}OO_3)^2\\
&=64\operatorname{tg}^3R.(\operatorname{tg}OA.\operatorname{tg}OB.\operatorname{tg}OC)=256\operatorname{tg}^2\varrho\operatorname{tg}^4R,\\
&(\operatorname{tg}O_1O.\operatorname{tg}O_1O_2.\operatorname{tg}O_1O_3)^2\\
&=64\operatorname{tg}^3R_1.(\operatorname{tg}O_1A.\operatorname{tg}O_1B.\operatorname{tg}O_1C)=256\operatorname{tg}^2\varrho_1\operatorname{tg}^4R_1,\\
&(\operatorname{tg}O_2O.\operatorname{tg}O_2O_1.\operatorname{tg}O_2O_3)^2\\
&=64\operatorname{tg}^3R_2.(\operatorname{tg}O_2A.\operatorname{tg}O_2B.\operatorname{tg}O_2C)=256\operatorname{tg}^2\varrho_2\operatorname{tg}^4R_2,\\
&(\operatorname{tg}O_3O.\operatorname{tg}O_3O_1.\operatorname{tg}O_3O_2)^2\\
&=64\operatorname{tg}^3R_3.(\operatorname{tg}O_3A.\operatorname{tg}O_3B.\operatorname{tg}O_3C)=256\operatorname{tg}^2\varrho_3\operatorname{tg}^4R_3.
\end{aligned}\right.$$

§. 30.

Wie in der sphärischen Trigonometrie überhaupt, so wurde auch in dieser Abhandlung der Kugelradius gleich Eins gesetzt, und es ist hinlänglich bekannt, dass, wenn durch Einführung des Radius R alle Gleichungen linear gemacht werden, sich dieselben leicht für das ebene Dreieck modificiren lassen, wenn man dieses als ein sphärisches von unendlich grossem Kugelradius betrachtet. Dieser Uebergang kann auch bei den hier aufgestellten Relationen und Formeln meistens mit Erfolg bewerkstelligt werden, und wir bemerken hier schliesslich, dass für das ebene Dreieck als Grenze z. B. die Gleichungen (12) übergehen in:

$$\varrho=\frac{\varDelta}{a+b+c},\quad \varrho_1=\frac{\varDelta}{b+c-a}\quad \text{u. s. w.}$$

Die Gleichungen (13) und (42) geben:

$$\varDelta^2=\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3,$$

$$r=\frac{abc}{4\varDelta},$$

wobei $\varDelta$ den Flächenraum des ebenen Dreiecks bezeichnet. In dieser Beziehung ist es interessant, die in den §§. 25.—29. entwickelten Relationen mit jenen zu vergleichen, welche Herr Rump im Archiv. Thl. XXVII. p. 348. u. f. für das ebene Dreieck synthetisch bewiesen hat.

XIX.

Miscellen.

Schreiben des Herrn J. B. Sturm, geprüften Lehramts-Kandidaten zu Regensburg, an den Herausgeber.

Anliegend übersende ich Ihnen zur gütigen Mittheilung im Archiv ein Paar Aufsätze, von denen ich dafür halte, dass sie derselben werth sind, und benütze zugleich die Gelegenheit, Herrn Dr. Stammer meinen Dank hiermit auszudrücken, dass er mich von einem Irrthum geheilt hat. Gewohnt, bei Betrachtung geometrischer Wahrheiten den ganzen Gedankengang ohne irgend eine Figur zu machen, habe ich dies auch bei meinem Beweise für den Satz von den Kantenwinkeln einer körperlichen Ecke gethan, und mir die Figuren erst dann gemacht, als ich angegriffen wurde. Die Eile, mit der ich erwiederte, liess abermals nicht zu, dass ich meinen Irrthum bemerkte, und erst jüngst, als ich im 3. Hefte Thl. XXVIII. dieses Archivs meine Erwiederung las und die Figuren genauer ansah, fielen mir die Schuppen von den Augen des Geistes und erkannte ich, dass in der Fig. 3. Taf. VI. der um das Dreieck $AO'B$ beschriebene Kreis die Linie OC immer zwischen O' und C zum zweiten Male schneiden müsse, wenn der Satz des Mittelgliedes in meinem Beweise auf alle Fälle richtig sein solle; denn in dem Falle, in welchem der in Rede stehende Kreis über O' hinaus die Linie OC zum zweiten Male schneidet, ist die Wahrheit des Mittelgliedes in vielen Fällen über den Haufen geworfen.

Regensburg, den 4. Juni 1857.

Es handelte sich einmal um die Wahl eines Mitgliedes für das Längen-Büreau. Die ausgezeichnetsten Mathematiker warben um diese Stelle und um Arago's Stimme. Arago hielt jedes Wort der Erwiderung für überflüssig. Jedem, der zu ihm kam,

sagte er nur: „**Cauchy** ist unter den Bewerbern." Und wenn der Concurrent fortfuhr hervorzuheben, was ihm Anspruch auf die Stelle gebe, so wiederholte Arago: „Ich habe Ihnen nur zu sagen, dass **Cauchy** unter den Bewerbern ist."

Von dem Herausgeber.

I.

Der folgende allgemeine arithmetische oder algebraische Satz leistet zur Abkürzung vieler Rechnungen wesentliche Dienste:

Wenn zwischen zwei Grössen u, v zwei Gleichungen von der allgemeinen Form

$$(ap+a_1)u+(bp+b_1)v+cp+c_1=0,$$
$$(ap'+a_1)u+(bp'+b_1)v+cp'+c_1=0$$

Statt finden, so ist unter der Voraussetzung, dass $p-p'$ nicht verschwindet:

$$u=\frac{bc_1-cb_1}{ab_1-ba_1},\quad v=\frac{ca_1-ac_1}{ab_1-ba_1}.$$

Eliminirt man nämlich aus den beiden obigen Gleichungen zuerst v, dann u, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\{(ap+a_1)(bp'+b_1)-(bp+b_1)(ap'+a_1)\}u\\ +(cp+c_1)(bp'+b_1)-(bp+b_1)(cp'+c_1)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(ap+a_1)(bp'+b_1)-(bp+b_1)(ap'+a_1)\}v\\ -(cp+c_1)(ap'+a_1)+(ap+a_1)(cp'+c_1)\end{array}\right\}=0.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(ap+a_1)(bp'+b_1)-(bp+b_1)(ap'+a_1)=(ab-ba_1)(p-p'),$$

und ganz eben so:

$$(cp+c_1)(ap'+a_1)-(ap+a_1)(cp'+c_1)=(ca_1-ac_1)(p-p'),$$
$$(cp+c_1)(bp'+b_1)-(bp+b_1)(cp'+c_1)=(cb_1-bc_1)(p-p');$$

also nach dem Obigen:

$$(p-p')\{(ab_1-ba_1)u+(cb_1-bc_1)\}=0,$$
$$(p-p')\{(ab_1-ba_1)v-(ca_1-ac_1)\}=0;$$

folglich unter der oben gemachten Voraussetzung:

$$(ab_1 - ba_1)u + (cb_1 - bc_1) = 0,$$

$$(ab_1 - ba_1)v - (ca_1 - ac_1) = 0;$$

und daher:

$$u = \frac{bc_1 - cb_1}{ab_1 - ba_1}, \quad v = \frac{ca_1 - ac_1}{ab_1 - ba_1};$$

wie behauptet wurde. Dass u, v von den Grössen p, p' ganz unabhängig sind, bemerkt Jeder sogleich.

Man kann dies auch zweckmässig zu einer algebraischen Uebungsaufgabe benutzen.

III.

Ueber einen allgemeinen Satz von den Kegelschnitten.

Vorläufig bemerke ich im Allgemeinen, dass alle Formeln, welche im Folgenden zur Anwendung kommen werden, in der Abhandlung Thl. XXIV. Nr. XXIX. entwickelt sind, auf welche ich daher ein für alle Mal verweise.

Wir betrachten zuerst die Ellipse. Die Anomalien der Endpunkte der Hauptaxe sind 0 und 180°. Ist nun u die Anomalie irgend eines anderen Punktes der Ellipse, so sind die Gleichungen der beiden von demselben nach den Endpunkten der Hauptaxe gezogenen Geraden:

$$bx\cos\tfrac{1}{2}u + ay\sin\tfrac{1}{2}u = \quad ab\cos\tfrac{1}{2}u,$$

$$bx\sin\tfrac{1}{2}u - ay\cos\tfrac{1}{2}u = -ab\sin\tfrac{1}{2}u;$$

oder:

$$y = \frac{b}{a}(a - x)\cot\tfrac{1}{2}u,$$

$$y = \frac{b}{a}(a + x)\tang\tfrac{1}{2}u.$$

Bezeichnen wir nun den von den beiden in Rede stehenden Geraden an dem Punkte der Ellipse, von welchem sie ausgehen, nach der Seite der Hauptaxe eingeschlossenen Winkel durch U, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\operatorname{tang} U^2 = \frac{\frac{b^2}{a^2}(\cot\tfrac{1}{2}u + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u)^2}{(1-\frac{b^2}{a^2})^2},$$

also, wie man leicht findet:

$$\operatorname{tang} U^2 = \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2 \sin u^2}.$$

Bezeichnen wir nun die rechtwinkligen Coordinaten des durch die Anomalie u bestimmten Punktes der Ellipse durch X, Y, so ist bekanntlich

$$Y = b \sin u,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\operatorname{tang} U^2 = \frac{4a^2b^4}{(a^2-b^2)^2 Y^2}.$$

Der Winkel U ist aber immer ein stumpfer Winkel, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\cos U = \frac{(a+X)^2 + (a-X)^2 + 2Y^2 - 4a^2}{2\sqrt{(a+X)^2+Y^2}.\sqrt{(a-X)^2+Y^2}}$$

oder

$$\cos U = \frac{X^2 + Y^2 - a^2}{\sqrt{(a+X)^2+Y^2}.\sqrt{(a-X)^2+Y^2}}.$$

Nun ist aber

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - X^2), \quad X^2 - a^2 = -\frac{a^2Y^2}{b^2};$$

also:

$$\cos U = -\frac{(a^2-b^2)\,Y^2}{b^2\sqrt{(a+X)^2+Y^2}.\sqrt{(a-X)^2+Y^2}}$$

oder

$$\cos U = -\frac{e^2Y^2}{b^2\sqrt{(a+X)^2+Y^2}.\sqrt{(a-X)^2+Y^2}},$$

folglich $\cos U$ negativ, und daher U ein stumpfer Winkel. Also ist nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang} U = \mp \frac{2ab^2}{e^2 Y},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem Y positiv oder negativ ist.

Auf ähnliche Art wollen wir jetzt die Hyperbel betrachten. Die Anomalien der Endpunkte der Hauptaxe sind auch hier 0 und 180°. Ist nun wieder u die Anomalie eines beliebigen Punktes der Hyperbel, so sind die Gleichungen der beiden von demselben nach den Endpunkten der Hauptaxe gezogenen Geraden:

$$y=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin u}{\cos u-\sqrt{\cos 2u}}(x-a),$$

$$y=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin u}{\cos u+\sqrt{\cos 2u}}(x+a).$$

Hat jetzt U dieselbe Bedeutung wie vorher bei der Ellipse, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\operatorname{tang} U^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\left(\frac{\sin u}{\cos u-\sqrt{\cos 2u}}-\frac{\sin u}{\cos u+\sqrt{\cos 2u}}\right)^2}{\left\{1+\frac{b^2\sin u^2}{a^2(\cos u-\sqrt{\cos 2u})(\cos u+\sqrt{\cos 2u})}\right\}^2},$$

oder, wie man leicht findet:

$$\operatorname{tang} U^2=\frac{4a^2b^2\cos 2u}{(a^2+b^2)^2\sin u^2}.$$

Bezeichnen nun aber X, Y die rechtwinkligen Coordinaten des durch die Anomalie u bestimmten Punktes der Hyperbel, so ist

$$Y=\frac{b\sin u}{\sqrt{\cos 2u}},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\operatorname{tang} U^2=\frac{4a^2b^4}{(a^2+b^2)^2\,Y^2}.$$

Bei der Hyperbel ist aber U immer ein spitzer Winkel, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Offenbar ist in völliger Allgemeinheit ganz wie vorher bei der Ellipse:

$$\cos U=\frac{X^2+Y^2-a^2}{\sqrt{(a+X)^2+Y^2}.\sqrt{(a-X)^2+Y^2}}.$$

Nun ist aber jetzt

$$Y^2=\frac{b^2}{a^2}(X^2-a^2),\quad X^2-a^2=\frac{a^2Y^2}{b^2};$$

also:

$$\cos U=\frac{(a^2+b^2)Y^2}{b^2\sqrt{(a+X)^2+Y^2}.\sqrt{(a-X)^2+Y^2}}$$

oder

$$\cos U=\frac{e^2Y^2}{b^2\sqrt{(a+X)^2+Y^2}.\sqrt{(a-X)^2+Y^2}},$$

folglich cos U positiv, und daher U spitz. Also ist nach dem Obigen:

$$\operatorname{tang} U=\pm\frac{2ab^2}{e^2Y},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem Y positiv oder negativ ist.

Bezeichnet endlich bei der Parabel U den Winkel, welchen die von einem beliebigen Punkte derselben aus parallel und gleich gerichtet mit der Axe gezogene Gerade mit der von demselben Punkte nach dem Scheitel der Parabel gezogenen Geraden einschliesst; so ist offenbar, wenn X, Y die rechtwinkligen Coordinaten des in Rede stehenden Punktes der Parabel bezeichnen:

$$\operatorname{tang}(180^0-U)=\pm\frac{Y}{X},\quad\text{also}\quad \operatorname{tang} U=\mp\frac{Y}{X};$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem Y positiv oder negativ ist. Folglich ist mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens:

$$\operatorname{tang} U=\mp\frac{Y^2}{XY}=\mp\frac{pX}{XY}=\mp\frac{p}{Y}.$$

Nach allem Bisherigen lässt sich der folgende Satz aussprechen:

> Bei jedem Kegelschnitte verhalten sich rücksichtlich der absoluten Werthe die trigonometrischen Tangenten der vorher durch U bezeichneten Winkel umgekehrt wie die Ordinaten der betreffenden Punkte des Kegelschnitts.

Anmerkung. Bei'm Kreise wird tang U unendlich, also U constant ein rechter Winkel, wie bekannt.

Fig. 13.

Fig. 13. a.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.



Fig. 2[illegible]

Fig. 24.

Fig. 24 a.

Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 35.

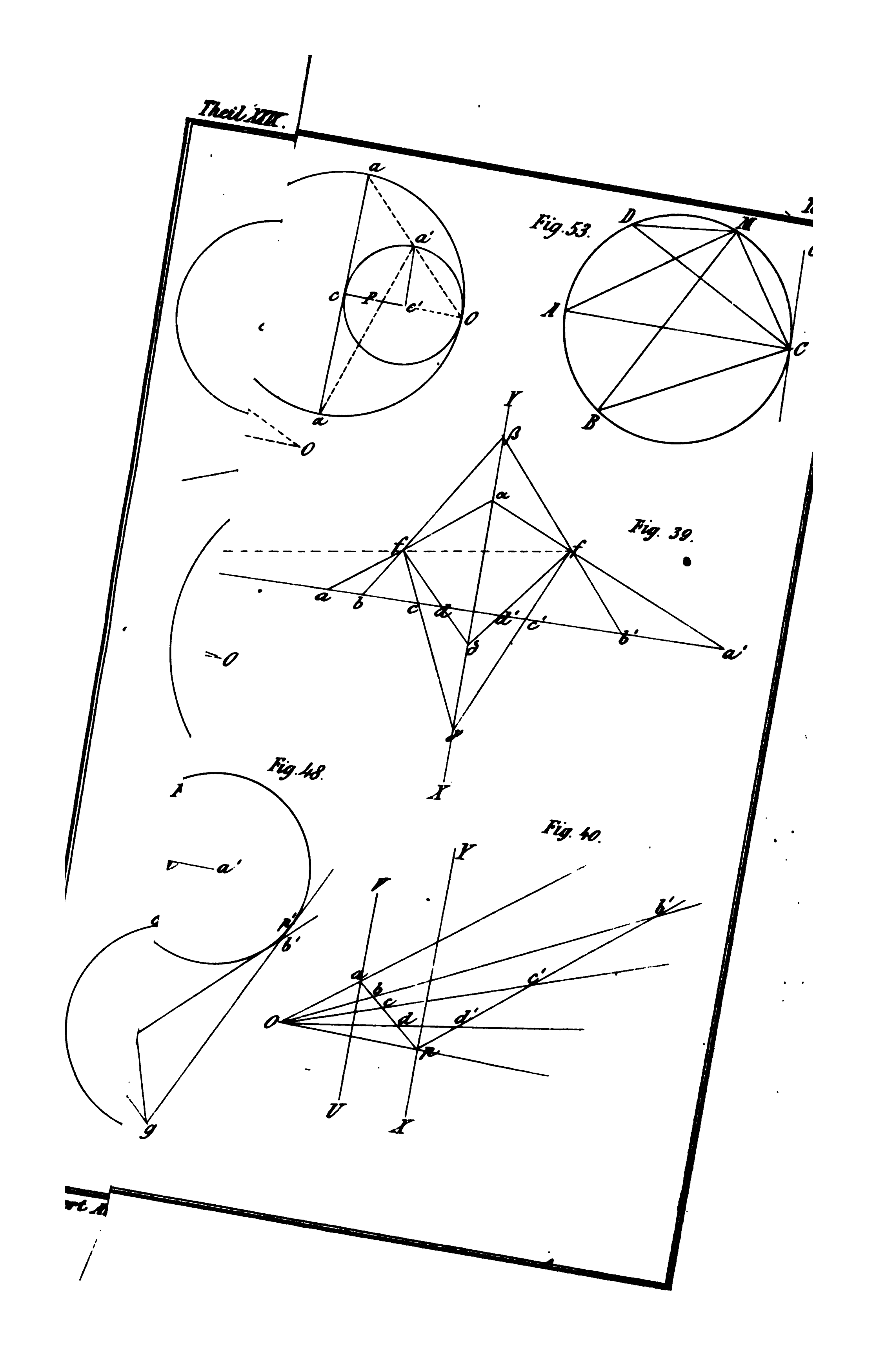
Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

Grun[illegible]





Theil XIII.
Fig. 53.
Fig. 39.
Fig. 48.
Fig. 40.

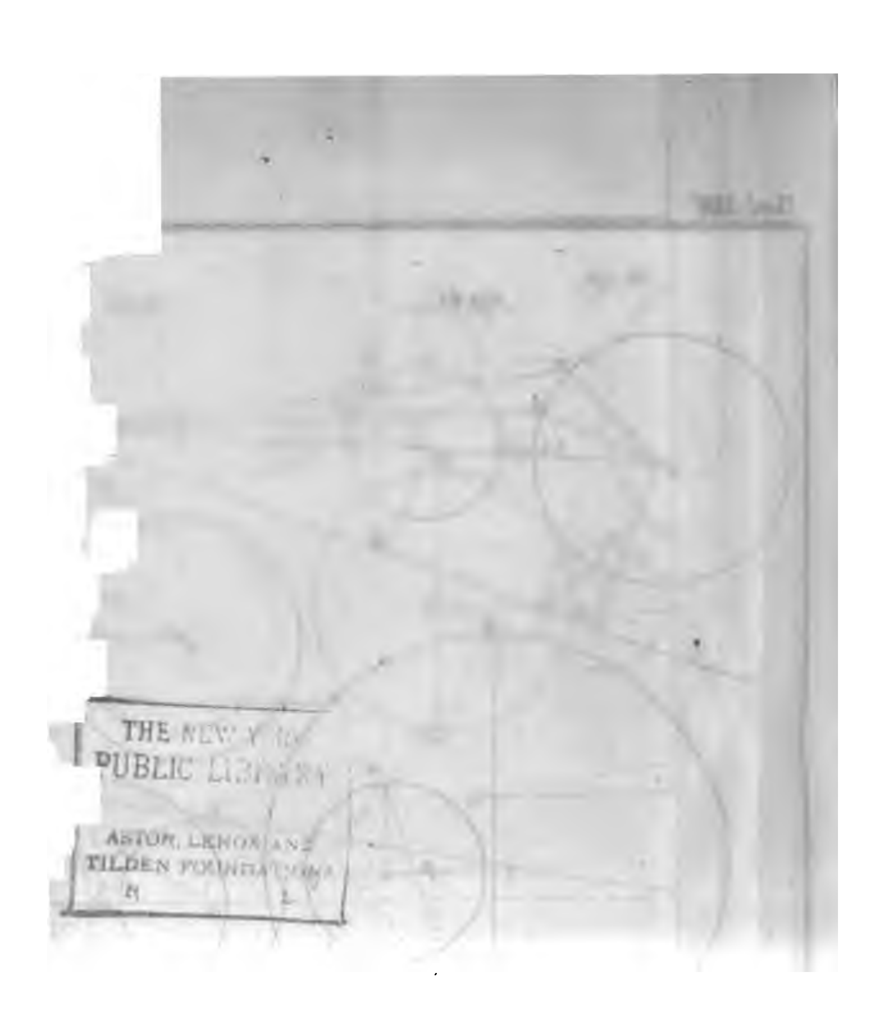


Fig. 54.

Fig. 59.

Fig. 55.

Fig. 60.

Fig. 60. a.

Fig. 62.

Fig. 53. s. m. auf Taf. III.

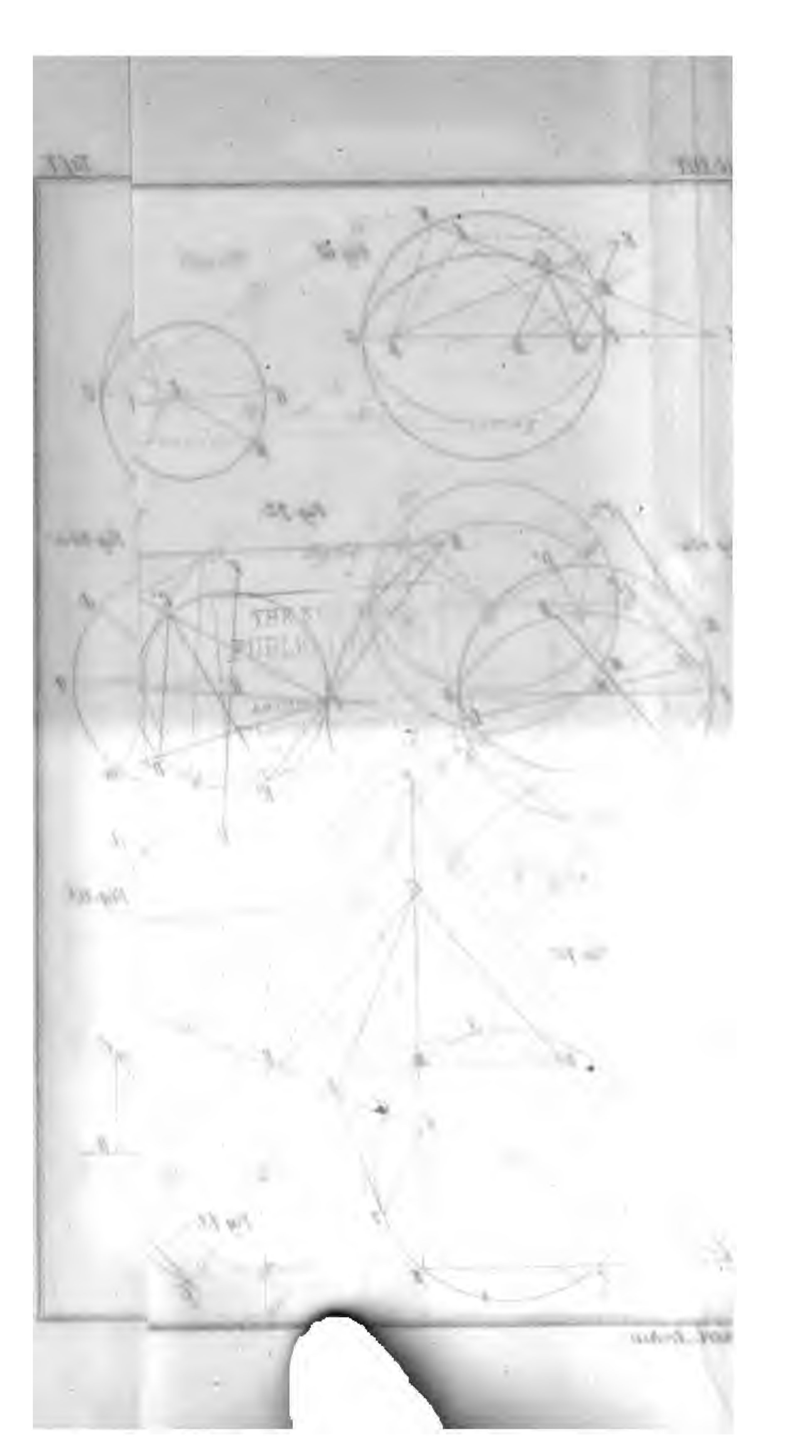


Fig. 63.

Fig. 65.

Fig. 61 a.

Fig. 65 a.

Fig. 68 a.

Fig. 68.

Fig. 71.

Fig. 62. s. m. auf Taf. IV.



Fig. 79.

Fig. 80.

Fig. 80 a.

Fig. 82 a.

Fig. 82.

Fig. 86.

Fig. 87.

Fig. 76. s. m. auf Taf. V.



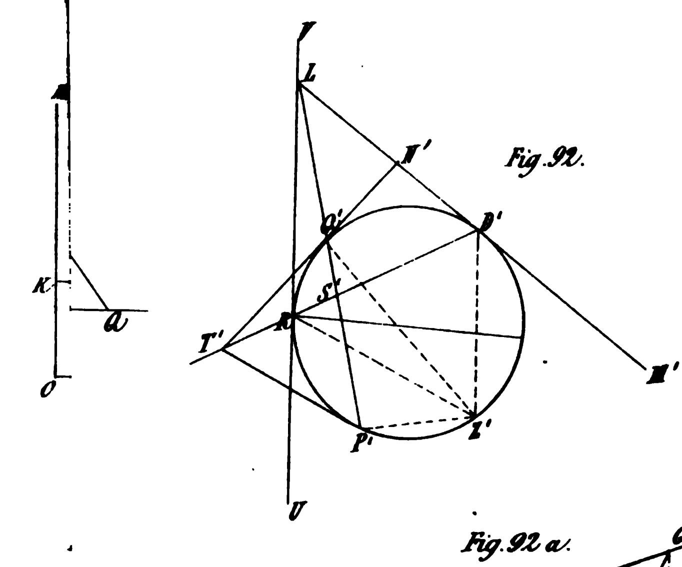


Fig. 92.



Fig. 94.



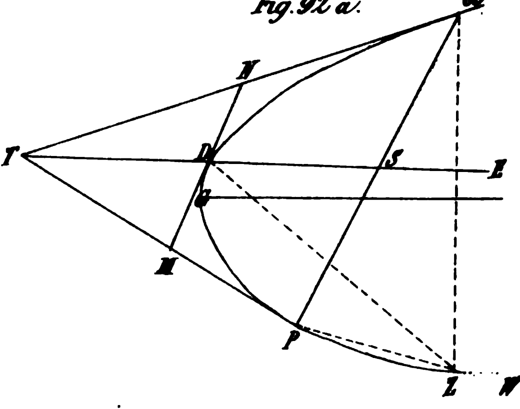


Fig. 92 a.

Fig. 99.

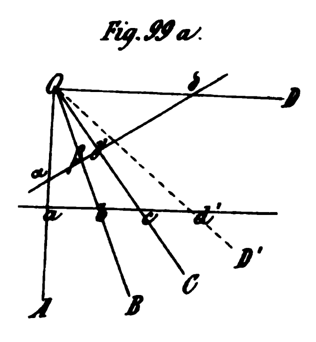


Fig. 99 a.



Fig. 106 Fig. 102 a.

Fig. 103.

Fig. 106 a.

Fig. 103 a.

Fig. 109. Fig. 109 a.



Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 8

Essen. | Grunert


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

Literarischer Bericht
CXIII.

Augustin Louis Cauchy,

der grosse Begründer der neuen strengen Analysis,

starb am 23sten Mai 1857

auf seinem Landsitze bei Paris.

Welcher Verlust!!

Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der Variationsrechnung. Erster Theil. Von F. Giesel. (Einladungsschrift zu der Feier des Schröderschen Stifts-Actus im Gymnasium zu Torgau am 5. April 1857.) Torgau. 1857. 4°.

Je mehr dergleichen Gelegenheitsschriften sich häufig der verdienten Beachtung entziehen, desto mehr halten wir es für unsere Pflicht, die Leser des Archivs, namentlich alle Liebhaber historischer Forschung auf mathematischem Gebiete, auf diese Geschichte der Variationsrechnung aufmerksam zu machen, welche in ihrem bis jetzt vorliegenden ersten Theile von dem Probleme von der Brachystochrone bis zu Lagrange's Essai d'une

nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indefinies in den Mélanges de philosophie et de mathématique de la société royale de Turin pour les années 1760—1761 reicht. Eine sehr dankenswerthe Zugabe zu dieser mit Sachkenntniss verfassten Schrift ist die in den Anmerkungen (S. 31.—S. 45.) enthaltene überaus reichhaltige Literatur. Wir wünschen, dass der Herr Verfasser die Fortsetzung seiner Arbeit bald veröffentlichen möge.

Arithmetik.

Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen. Mit zahlreichen Anwendungen, namentlich auf geodätische Messungen, von Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig. Vieweg. 1857. 8.

Nach Entwickelung der nothwendigsten vorbereitenden Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält diese mit grosser Deutlichkeit verfasste Schrift zuerst eine sehr vollständige Darstellung der Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen, und dann eine höchst lehrreiche Sammlung von Beispielen, in solcher Mannigfaltigkeit, wie man sie unseres Wissens in keiner anderen ähnlichen Schrift findet, hauptsächlich in Bezug auf Geodäsie, wenn auch Physik und Astronomie keineswegs leer ausgegangen sind. Wir sind überzeugt, dass diese Schrift, eben so wie die beiden verdienstlichen Abhandlungen des Herrn Verfassers über denselben Gegenstand im Archiv. Thl. XVIII. Nr. XIV. und Thl. XIX. Nr. XIV., hauptsächlich auch der vielen lehrreichen Anwendungen wegen, vielfachen Nutzen stiften und besonders auch dazu beitragen wird, ein richtiges Urtheil über die Gränzen, innerhalb welcher die in Rede stehende Methode nur angewandt werden darf und angewendet werden sollte, zu vermitteln, worin gewiss noch sehr vielfach gefehlt wird, da von derselben gegenwärtig auf Gott weiss was alles für Dinge, z. B. die Wollproduction der Schaafe u. dergl., Anwendung gemacht wird, was freilich die gröbste Unkenntniss des eigentlichen Wesens dieser Methode verräth. Wir empfehlen daher allen Denen, die mit der Berechnung von Beobachtungen und Versuchen sich zu beschäftigen haben, angelegentlichst, sich vorher mit dem Inhalte der vorliegenden

ausgezeichneten Schrift vollkommen vertraut zu machen, um eine deutliche Einsicht in das eigentliche Wesen der Methode der kleinsten Quadratsummen zu gewinnen und ihren Unterschied von den Methoden der Interpolation, womit sie leider nur zu häufig verwechselt wird, sich recht klar zu machen, wozu wir ein besseres Hülfsmittel als die vorliegende Schrift jetzt nicht zu empfehlen wüssten.

Physik.

Grundriss der Physik nach ihrem gegenwärtigen Standpunkte von Ph. Spiller. Zweite wesentlich verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 250 in den Text gedruckten Figuren. Triest. Literar. artist. Abtheilung des Oesterreichischen Lloyd. 1857. 8.

Dieser Grundriss der Physik verschmäht nicht, wie so viele andere derartige Lehrbücher, eine in zweckmässige Gränzen eingeschlossene Anwendung der Elementarmathematik, und berücksichtigt überall, wo es am Orte ist, in anerkennungswerther Weise, und theilweise mehr als andere ähnliche Schriften, die Anwendung der Lehren der Physik auf das Leben. Aus diesen Gründen, und auch seiner zweckentsprechenden Vollständigkeit wegen, empfehlen wir das deutlich abgefasste Buch unsern Lesern zur Beachtung.

Preisaufgabe

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlich österreichischen Akademie der Wissenschaften.

Eine der fühlbarsten Lücken unserer gegenwärtigen astronomischen Kenntnisse ist der Mangel irgend umfassender Helligkeitsmessungen von Fixsternen. So sehr verdienstlich die bisherigen Leistungen dieser Art, besonders von Argelander, dann von Heis u. A. sind, so können dieselben doch, da sie lediglich auf Schätzungen mit freiem Auge beruhen, nur als Vorarbeiten betrachtet werden. So lange aber eigentlich photometrische Bestimmungen in grösserer Anzahl fehlen, ist z. B. weder an völlig genügende Sternkarten noch an genauere Be-

obachtung der Lichtverhältnisse von sogenannten Veränderlichen zu denken. Da nun andererseits durch die Arbeiten von Steinheil, J. Herschel, Dawes etc. der Weg zu solchen Untersuchungen völlig angebahnt ist, so findet sich die kaiserliche Akademie veranlasst, folgende Preisfrage auszuschreiben:

> Es sind möglichst zahlreiche und möglichst genaue photometrische Bestimmungen von Fixsternen in solcher Anordnung und Ausdehnung zu liefern, dass der heutigen Sternkunde dadurch ein bedeutender Fortschritt erwächst.

Diese Preisaufgabe wurde bereits in der feierlichen Sitzung der Akademie am 30. Mai 1854 ausgeschrieben, da aber bis zum festgesetzten Termine, dem 31. December 1856, keine Abhandlung zur Lösung derselben eingelangt war, in der feierlichen Sitzung am 30. Mai 1857 erneuert.

Preis: Dreihundert Stück k. k. österreichische Münzducaten. Termin der Einsendung: 31. December 1860. Die Ertheilung des Preises erfolgt am 30. Mai 1861.

Die um einen Preis werbenden Abhandlungen dürfen den Namen des Verfassers nicht enthalten, sind aber, wie allgemein üblich, mit einem Wahlspruche zu versehen. Jeder Abhandlung hat ein versiegelter, mit demselben Motto versehener Zettel beizuliegen, der den Namen des Verfassers enthält. In der feierlichen Sitzung am 30. Mai 1861 eröffnet der Vorsitzende den versiegelten Zettel jener Abhandlung, welcher der Preis zuerkannt wurde, und verkündet den Namen des Verfassers. Die übrigen Zettel werden uneröffnet verbrannt, die Abhandlungen aber aufbewahrt, bis deren Verfasser sie zurück verlangen.

Theilung eines Preises unter mehrere Bewerber findet nicht Statt.

Jede gekrönte Preisschrift bleibt Eigenthum ihres Verfassers. Wünscht es derselbe, so wird die Schrift von der Akademie als abgesondertes Werk in Druck gelegt. In diesem Falle erhält der Verfasser fünfzig Exemplare und verzichtet auf das Eigenthumsrecht.

Abhandlungen, welche der Veröffentlichung würdig sind, ohne jedoch den Preis erhalten zu haben, können mit Einwilligung des Verfassers entweder in den Schriften der Akademie oder auch als abgesonderte Werke herausgegeben werden.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XIV.

Arithmetik.

Rch. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Mit Beziehung auf die Originalquellen dargestellt. Leipzig. 4°. 1 Thlr. 15 Ngr.

J. Petzval, Integration der linearen Differenzialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten. 4. Lief. gr. 4°. Wien. 4 Thlr.

F. X. Pollack, Sammlung arithmetischer und algebraischer Aufgaben. 1. Abth. 4. Aufl. gr. 8°. geh. Augsburg. 20 Ngr.

J. Strehl, Handbuch beim Unterricht in der Arithmetik für Unter-Realschulen. 3. Thl. gr. 8°. Wien. 12 Ngr.

Sturm, Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique. Publié d'après le vocu de l'auteur, par M. E. Pouchet. Tome I. In 8. Paris. 2 vol. 12 fr.

G. v. Vega, Logarithmic Tables of Numbres and Trigonometrical Functions. Translated from the Forthieth, or Dr. Bremiker's thoroughly revised and enlarged Edition, by W. L. Fischer, M. A. F. R. S. 8°. London. cloth. 7 s.

G. Wirth, Algebraische Aufgaben. 8°. geh. Langensalza. 9 Ngr.

Geometrie.

B. Féaux, Lehrbuch der ebenen Planimetrie. gr. 8°. geh. Paderborn. $^3/_4$ Thlr.

C. Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. gr. 8°. geh. Heidelberg. 24 Ngr.

Dessen Anhang dazu. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung der Aufgaben. gr. 8°. geh. Heidelberg. 8 Ngr.

Mechanik.

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik. In's Deutsche übersetzt von O. Schlömilch. 2. Aufl. 2. u. 3 Lief. gr. 8°. geh. Leipzig. à 10 Ngr.

Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Herausgegeben von C. v. Littrow. 3. Folge. 4—6. Bd. Jahrgang 1854—56. 8°. Wien. Jeder Band 2 Thlr. 20 Ngr.

Atlas des nördlichen gestirnten Himmels für den Anfang des Jahres 1855 entworfen auf der königl. Sternwarte zu Bonn. (Von F. Argelander.) 1. Lief. Bonn. Fol. 4 Taf. 3 Thlr.

G. A. Baurmeister, Die Erde und ihre Bewegungen nach freier Forschung dargestellt. 8°. geh. Soest. 6 Ngr.

Beobachtungen der kaiserl. Universitäts-Sternwarte Dorpat, herausgegeben von J. H. Mädler. 13. 14. Bd. gr. 4°. geh. Dorpat. (13. Bd. 2⅔ Thlr., 14. Bd. 4 Thlr.) 6⅔ Thlr.

G. v. Boguslawski, Die Kometen und ihre Bedeutung als Weltkörper. gr. 8°. geh. Stettin. 12 Ngr.

P. van Galen, Bahnbestimmung des Kometen III 1846, für die Wiedererscheinung in den Jahren 1851 und 1857, mit Rücksicht auf die Störung der Planeten. Rotterdam. 4°. 16 Ngr.

P. A. Hansen, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 2. Abhdlg. gr. Lex. 8°. geh. Leipzig. 1⅓ Thlr.

S. F. Jonas, Grundzüge der Astronomie. Kometenlehre. geh. gr. 8°. Amsterdam u. Leipzig. ½ Thlr.

S. J. Jonas, Der gefürchtete Komet des gegenwärtigen Jahres, über Kometen überhaupt und über den Einfluss derselben auf Temperatur, Fruchtbarkeit der Erde und auf die Gesundheit. Mit lithogr. Tafeln. gr. 8°. Amsterdam. 1 f.

P. Kramer, Elemente der mathematischen Geographie. gr. 8°. geh. Augsburg. 10 Ngr.

J. H. Kurtz, The Bible and Astronomy: an exposition of the Biblical Cosmology and its Relations to Natural Science. Translated, from the third and improved German Edition, by S. D. Crown. 8. Philadelphia and London. 7 s. 6 d.

W. Oeltzen, Resultate aus der Vergleichung des Sternkatalogs von Fedorenko mit anderen Quellen. Wien. 8°. 8 Ngr. Aus den „Sitzungsberichten 1856 der k. k. Akademie der Wissenschaften."

Geographischer Zeitmesser der nördlichen Hemisphäre (auf Pappe gezogen mit Drehscheibe) für Freunde der mathematischen Geographie, mit erklärendem Texte. Meissen. 1 Thlr. 10 Ngr.

Nautik.

Heybrock und Ratzeburg, Nautischer Handatlas zum Gebrauch für Seeleute und Alle, welche sich für das Seewesen interessiren. Quer-Fol. Broch. Berlin. 1 Thlr. 25 Ngr.

Physik.

Rb. Bunsen, Gasometrische Methoden. Mit 60 eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig. 8°. 2 Thlr.

M. P. Desains, Leçons de physique. In 18 jésus, figures intercalées dans le texte. Paris. 6 fr.

W. Hermann, Physikalischer Atlas. 6 Blatt. Royal-Folio. Berlin. 2 Thlr. Jede einzelne Karte 15 Ngr.

Physikalisches Lexikon. 2. Aufl. Von O. Marbach. Fortgesetzt von C. S. Cornelius. 55. 56. Lief. gr. 8°. geh. Leipzig. à 15 Ngr.

Thdr. du Moncel, Exposé des applications de l'électricité. Tome III. Applications mécaniques, physiques et physiologiques. 2e édition. Paris. Mit 4 Taf. 2 Thlr. 20 Ngr. Das vollständige Werk kostet 8 Thlr. 20 Ngr.

E. E. Perkins, A. Practical Treatise on Gas and Ventilation, with special relation to Illuminating, Heating and Cooking by Gas etc. with illustrated diagrams. 12. Philadelphia and London. cloth. 4 s. 6 d.

Résumé des observations recueillies en 1856 dans le bassin

de la Saône, par les soins de la commission hydrométrique de Lyon. Lyon. 8°. 12 Tabl. in 4°. u. 1 Taf.

Vermischte Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. 1857. I. gr. 8°. geh. Leipzig. 10 Ngr.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle gegründeten Journals herausgegeben von C. W. Borchardt. 54 Bd. 1. Hft. gr. 4°. Berlin. Preis pro Band 4 Thlr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. XXIII. Bd. 2. Hft. Lex. 8°. geh. Wien. 1⅔ Thlr.

Literarischer Bericht
CXV.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Siebenter Jahrgang. 1857. Wien. K. K. Hof- und Staatsdruckerei. (Braumüller.) 8.

Wir haben im Archiv schon mehrmals auf die Wichtigkeit dieses Almanachs, hauptsächlich in literar-historischer Rücksicht, für die mathematischen und physikalischen Wissenschaften hingewiesen. Aber auch abgesehen hiervon enthält derselbe in allen Jahrgängen sehr werthvolle wissenschaftliche Beiträge, wovon der vorliegende Jahrgang wieder ein sehr erfreuliches Zeugniss ablegt. Zunächst liefert der ausführliche Bericht des General-Sekretärs, des Herrn Prof. Dr. Anton Schrötter, ein sehr anziehendes Bild von der weitverzweigten Thätigkeit der Akademie sowohl im Allgemeinen, als insbesondere ihrer mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse, wobei zwei verstorbenen Mitgliedern der Akademie: Franz Adam Petřina *) in Prag und Johann Nep. von Fuchs

*) Franz Adam Petřina, der dem Kreise des Archivs näher steht als von Fuchs, ward zu Semil, einem čechischen Städtchen im Jungbunzlauer Kreise Böhmens am 24. December 1799 als der Sohn eines in dürftigen Verhältnissen lebenden Schneiders, der später das Geschäft eines Webers und Garnhändlers betrieb, geboren, und schwang sich, mit den schwierigsten äusseren Verhältnissen kämpfend, durch eisernen Fleiss und rastlose Thätigkeit bis zu der Stelle als Professor der Physik an der Prager Universität, wozu er mit Allerhöchster Entschliessung vom 27. Aug. 1844 ernannt wurde, empor, nachdem er seit dem 30. Aug. 1837

in München, ein sehr ehrenvolles Denkmal gesetzt wird. Mit besonderem Danke ist es anzuerkennen, dass Herr Prof. Schrötter in diesem Jahrgange die Mühe nicht gescheuet hat, die vollständigen Titel aller von der Akademie in dem Zeitraume, auf welchen sich dieser Bericht bezieht, veröffentlichten Abhandlungen auf S. 82 bis S. 92, nach den Gegenständen geordnet, mitzutheilen, was den literar-historischen Werth des Almanachs in jeder Beziehung zu erhöhen geeignet ist. — Ausser dem Berichte des General-Sekretärs enthält der vorliegende Jahrgang noch die Rede des Präsidenten der Akademie, des Herrn Freiherrn Dr. Andreas von Baumgartner: „über das mechanische Aequivalent der Wärme und seine Bedeutung in den Naturwissenschaften", die diesen so bedeutungsvollen und in der Wissenschaft Epoche machenden Gegenstand wieder in so überaus lichtvoller und jedem gebildeten Publikum allgemein verständlicher Weise zur Anschauung bringt, dass wir dem Talent des hochverehrten Verfassers in dieser Beziehung nur von Neuem unsere lebhafteste Bewunderung haben zollen können *). In social-politischer Beziehung sehr interessant, aber dem Kreise des Archivs etwas ferner stehend, ist auch die Rede des Herrn Regierungsraths Ritters von Burg: „über den Einfluss des Maschinenwesens auf unsere socialen Verhältnisse", die den vorliegenden Jahrgang in sehr würdiger Weise schliesst.

Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1856. Vingt-deuxième année. Bruxelles 1856—1857. Vingt-troisième année. Bruxelles 1857.

Dem vorher angezeigten Almanach der k. k. österreichischen Akademie der Wissenschaften schliessen sich in würdiger Weise die beiden neuesten uns vorliegenden Jahrgänge (1856 und 1857)

Professor der Physik am Lyceum zu Linz gewesen war. Seine Hauptverdienste auf dem Gebiete der Wissenschaft gehören der Electricitätslehre, zum Theil auch der Optik an, wobei er überall eine durch und durch praktische Richtung verfolgte, und von seinem besonderen Talente in der Verbesserung von Apparaten und Methoden das rühmlichste Zeugniss ablegte. Leider entriss ihn am 27. Juli 1855 ein zu früher Tod der Wissenschaft im 57sten Lebensjahre nach kurzer Krankheit in Mitte einer nach allen Seiten hin anregenden Thätigkeit und noch in voller Kraft. Ein interessantes Verzeichniss aller Schriften Petřina's ist auf S. 129 bis S. 134 mitgetheilt.

*) Wir werden diese treffliche Rede wie ihre nicht minder verdienstlichen Vorgängerinnen wieder im Archive nächstens mittheilen.

des „Annuaire" der Königlich Belgischen Akademie der Wissenschaften in Brüssel an, über das wir auch schon öfter früher in unsern literarischen Berichten nähere Nachricht gegeben haben. Ausser den gewöhnlichen Mittheilungen über die Organisation und Schicksale der Akademie enthält der Jahrgang 1856 zwei in bekannter vortrefflicher Weise von Herrn A. Quetelet verfasste „Notices biographiques" über zwei verdiente Mathematiker und Physiker, die allen Lesern des Archivs durch ihre Schriften bekannt sind: Pagani und Crahay, deren recht schön ausgeführte Bildnisse diesen biographischen Notizen beigegeben sind.

Gasparin Michel Pagani war geboren am 12. Februar 1796 zu San-Giorgio im Königreich Sardinien, als der Sohn einer alten und höchst achtbaren Familie. Ursprünglich zum Geistlichen bestimmt, entsagte er doch bald dieser Laufbahn und widmete sich auf der Universität zu Turin mit Vorliebe mathematischen Studien, indem er hauptsächlich in Plana und Bidone treffliche Lehrer verehrte. „Ses etudes terminées", fährt sein Biograph fort, „il fut nommé provisoirement aux fonctions de conseiller-maitre de la monnaie à Turin. Jeune encore, avec une imagination ardente, il rêvait, comme tant d'autres, l'indépendance de l'Italie. Beaucoup de ses camarades, ayant été entrainés par les affaires politiques, se virent forcés de quitter leur patrie. Les affaires ayant changé de face, bien qu'il ne partageât point en tout l'opinion de ses camarades, il jugea prudent de s'éloigner, sans cependant avoir rien à sa charge, et pour ne pas les abandonner au moment du danger. Il quitta tout: patrie, parents et carrière; et Dieu, dans sa bonté, après un sejour de deux ans en Suisse, où il fut recherché et aimé par tous les hommes de talent, le conduisit à Bruxelles, où il reçut l'hospitalité la plus genereuse."

In Brüssel gab er Privat-Unterricht und gewann zweimal den Preis bei der Belgischen Akademie in den Jahren 1824 und 1825 über die beiden folgenden Aufgaben:

„On sait que les lignes spiriques ou sections annulaires sont des courbes formées par l'intersection d'un plan avec la surface du solide engendré par la circonvolution d'un cercle autour d'un axe donné de position; on démande l'équation générale de ces courbes et une discussion complète de cette équation."

„Un fit flexible et uniformément pesant, étant suspendu par l'une de ses extrémités à un point fixe, et soulevé par son autre extrémité à une hauteur et à une distance quelconque, si l'on vient à lâcher cette seconde extrémité, et à abandonner ainsi ce fil à l'action libre de la pesanteur, on demande les circonstances de son mouvement dans l'espace supposé vide."

Im Jahre 1825 wurde Pagani in die Akademie der Wissenschaften in Brüssel aufgenommen, im Jahre 1826 zum ausserordentlichen Professor in Löwen ernannt und 1832 als professeur ordinaire des sciences nach Lüttich versetzt. Am Schluss sagt sein Biograph: „C'est à l'âge de 43 ans qu'il abandonne en quelque sorte la carrière mathématique pour se livrer à des travaux d'un ordre inférieur, qu'il renonce à l'emploi de brillantes qualités intellectuelles pour ne plus s'occuper que de questions qui attirent accidentellement son attention." Er scheint seit dieser Zeit in Krankheit verfallen zu sein und starb am 10. Mai 1855 zu Wouhrechtegem bei Alost. Die Biographie dieses ausgezeichneten Mannes ist in vielen Beziehungen sehr interessant und lehrreich, und Herr Quetelet verdient vielen Dank für dieselbe, so wie auch für das vollständige Verzeichniss der Schriften Pagani's auf S. 114—S. 116.

Jacques Guillaume Crahay gehörte seit dem 8. Mai 1835 der Akademie der Wissenschaften in Brüssel als eines ihrer thätigsten Mitglieder an, und war zu Maestricht geboren am 3. April 1789. Im 18ten Jahre wurde er nach dem Wunsche seines Vaters Notar, im 28sten — am 19. Februar 1817 — Professor der Physik und Chemie am Athenäum zu Maestricht. Im Jahre 1834 wurde er von den Bischöfen zum Professor an der katholischen Universität zu Löwen ernannt und starb dort an einer schmerzhaften Krankheit nach langen Leiden am 21. October 1855. „Louvain perdit" — sagt Herr Quetelet am Schluss seiner Biographie — „un de ses professeurs les plus renommés, et l'Académie royale un de ses membres les plus dévoués et les plus instruits. L'une et l'autre perte sera difficile à réposer, car je le répète, l'homme que nous regrettons ne se distinguait pas moins par les qualités du coeur que par les connaissances de l'esprit." — Seine wissenschaftlichen Arbeiten und Beobachtungen bezogen sich hauptsächlich auf Meteorologie; ein vollständiges Verzeichniss seiner Schriften findet sich S. 131—S. 136.

Arithmetik.

Cardanus Formel, deren Verwandlung zur Berechnung der Wurzeln von Zahlengleichungen von der Gestalt $x^3-Px-Q=0$, und eine allgemeine, aus jener abgeleitete Form der Wurzeln der letzteren. Lösung

des dreihundertjährigen Problemes von Doctor E. Büchner, Professor am Herzoglichen Gymnasium zu Hildburghausen. Hildburghausen. (Kesselring.) 1857. 8.

Es ist aus dieser mit wenig Klarheit verfassten Schrift in der That schwer zu sehen, welches **dreihundertjährige Problem** in derselben gelöst worden ist. Natürlich kann hier nur von dem sogenannten irreduciblen Falle bei den cubischen Gleichungen die Rede sein. Dieser Fall ist aber seit sehr langer Zeit durch die Kreisfunctionen oder strenger die goniometrischen Functionen so vollständig und in so vollkommener, zugleich so schöner und eleganter Weise gelöst, als es nur irgend gewünscht, verlangt und erwartet werden kann. Soll nun von einer neuen Erfindung bei dieser Sache die Rede sein, so könnte dieselbe nur darin bestehen, dass auch im irreduciblen Falle, wo bekanntlich alle drei Wurzeln reell sind, diese drei Wurzeln bloss mittelst der gewöhnlichen algebraischen Functionen nur durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung in völlig entwickelter, ohne alle unberufene Einmischung des Imaginären völlig reeller, endlicher, also völlig geschlossener *) Form ausgedrückt und dargestellt würden. Wer nun aber diese Aufgabe gelöst hätte, würde, weil, wie schon bemerkt, die Lösung des irreduciblen Falls durch die Kreisfunctionen in der schönsten Weise längst vollständig gelungen ist, natürlich auch die in allen Beziehungen für die gesammte Wissenschaft höchst wichtige und einflussreiche Entdeckung gemacht haben, dass auch die Kreisfunctionen, oder eigentlich und strenger die goniometrischen Functionen, bloss mittelst der gewöhnlichen algebraischen Functionen in reeller, endlicher, völlig geschlossener Form sich ausdrücken und darstellen lassen. Aber welcher Mathematiker hält dergleichen noch für möglich?! Am allerwenigsten hat so etwas völlig Unerhörtes der Herr Verfasser der vorliegenden Schrift geleistet, und wir fragen daher noch einmal billig, welches dreihundertjährige Problem denn hier eigentlich gelöst ist oder gelöst sein soll? Wir sind ganz entschieden der Meinung, dass hier gar kein Problem mehr zu lösen ist, sondern im Wesentlichen Alles längst vollständig und zwar in sehr schöner Weise abgethan ist, auch in anderer Weise gar nicht abzuthun ist. Was etwa noch zu thun wäre, könnte sich nur etwa auf Verallgemeinerung und Erweiterung der längst gegebenen Lösung beziehen oder methodische Zwecke verfolgen; denn im Wesentlichen

---

*) Also nicht etwa durch die series infinitas.

ist Alles abgethan und nichts mehr zu ändern. So weit wir den Inhalt dieser Schrift zu übersehen im Stande sind, ist in derselben höchstens eine Methode zur annähernden Bestimmung der Wurzeln gegeben, die uns aber keineswegs besondere Leistungen zu versprechen scheint. Mögen Andere in derselben

die Lösung des dreihundertjährigen Problems

suchen und finden; uns hat es auch bei dem besten Willen nicht in der entferntesten Weise gelingen wollen.

Geometrie.

Smithsonian Contributions to Knowledge. The tangencies of circles and of spheres. By Benjamin Alvord, Major United States Army. Washington city. 1855. 4°.

Der Herr Verfasser spricht sich über diese Auflösung des Problems von den Berührungen für Kreise und Kugeln auf folgende Art aus: „The solution herein given to the problems in the tangencies of circles and of spheres, is strictly based upon the principle that the tangent line, or curve, is the limit to all secant lines or curves. This principle is frequently employed in descriptive geometry, and in the discussion of tangents in analytical geometry, but I am not aware that it has ever been employed in the manner set forth in this memoir. Solutions are given of most of these problems in the eleventh volume of the Annales de Mathématiques (par J. D. Gergonne. Paris. 1820.), and in the first volume of Crelle's Mathematical Journal. Berlin. 1826. But the methods employed are quite different from that herein explained. It is believed that the following is a more complete generalization of this mass of problems than any heretofore published. The classification given of the problems in the tangencies of spheres, and also the classification of all the cases under each problem, both in the tangencies of circles and in the tangencies of spheres, are belived to be novel." Wir haben absichtlich den verehrten Herrn Verfasser hier selbst sprechen lassen. Je weniger bekannt leider die vieles Treffliche enthaltende amerikanische Literatur bei uns ist, desto mehr haben wir uns verpflichtet gehalten, unsere Leser auf diese neue, jedenfalls eigenthümliche Behandlung des schon oft behandelten berühmten geometrischen Problems aufmerksam zu machen. So weit



wir bei für jetzt nur flüchtiger Durchsicht urtheilen können, empfehlen sich die Auflösungen durch hier sehr wünschenswerthe Uebersichtlichkeit. Die Zeichnungen sind sehr schön, und in dem Herrn Verfasser erkennt man jedenfalls einen sehr gründlichen Kenner der reinen Geometrie.

Geodäsie.

Geodäsie. Anleitung zum geometrischen Theilen der Grundstücke. Von Professor Guido Schreiber, vormaligem öffentlichen Lehrer der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe und Examinator der Geometer im Grossherzogthum Baden. Mannheim (F. Bassermann) 1857. 1 Thlr. 6 Sgr.

Diese Anleitung zur Feldertheilung ist recht praktisch gehalten und hebt daher dieses praktische Element mehr hervor als elegante geometrische Constructionen und elegante algebraische Formeln. Die Coordinatenmethode ist mit Recht vorzugsweise angewandt und numerische Beispiele sind reichlich beigegeben worden. Die theoretischen Erläuterungen aus der analytischen Geometrie, die hin und wieder vorkommen, hätten wohl wegbleiben können. Praktikern mag diese Schrift immerhin empfohlen werden; in rein mathematischer Beziehung gewährt sie dem Leser weit weniger Belehrung, als manche andere Schriften über diesen Gegenstand.

Astronomie.

Smithsonian Contributions to Knowledge. On the relative Intensity of the heat and light of the sun upon different latitudes of the earth. By L. W. Meech, A. M. Washington City. 1856. 4⁰.

Diese Schrift enthält eine mit Hülfe der mathematischen Analysis durchgeführte Theorie des auf dem Titel genannten wichtigen Gegenstandes und verdient jedenfalls sehr zur Beachtung empfohlen zu werden.

Physik.

Smithsonian Contributions to Knowledge. On the recent secular period of the Aurora borealis.

By Denison Olmsted, LL. D. Professor of Natural Philosophy and Astronomy in Yale College. Washington City. 1856.

Appendix. Record of Auroral Phenomena observed in the higher northern latitudes. Compiled by Peter Force.

Nach einer Einleitung enthält die erste Schrift folgende Kapitel: Classification of auroras. — History of the recent secular period. — Laws of the aurora borealis. — Origin and cause of the aurora borealis — und verbreitet sich über alle diese Dinge in äusserst lehrreicher Weise, so dass wir auf dieselbe Alle, welche sich für die Lehre vom Nordlichte interessiren, besonders aufmerksam machen.

Das zweite, 118 Seiten in gross Quart umfassende Verzeichniss der in höheren Breiten erschienenen Nordlichter ist offenbar mit dem grössten Fleisse und der grössten Sorgfalt zusammengestellt, und jedenfalls für die nähere Kenntniss des in Rede stehenden wichtigen Phänomens, dessen völlig genügende Theorie immer noch unter die pia desideria gehört, von der grössten Wichtigkeit.

Vermischte Schriften.

Annali di scienze matematiche et fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXIV. S. 4.)

Febbraro 1857. Sulle variazioni periodiche de magnetismo terrestre. Memoria seconda del P. A. Secchi D. C. D. G. (Continuazione e fine). p. 33. — Sopra la serie doppie ricorrenti. Memoria del prof. Enrico Betti. p. 48. — Sur l'induction électrostatique. Quatrième lettre de Mr. P. Volpicelli à Mr. Regnault. p. 61. — Nuovo registratore meteorologico de P. Bertelli Barnabita. p. 68. — Sulla trasformazione delle funzioni ellitiche. Nota del prof. F. Brioschi. p. 70. — Sopra il volume della piramide triangolare. Nota del cav. Faà di Bruno. p. 77. — Necrologia (Agostino Luigi Cauchy).

Marzo 1857. Le due Comete del 1857. Nota del Prof. Ignazio Calandrelli. p. 81. — Sui poligoni inscritti e circoscritti alle coniche. Del prof. F. Brioschi. p. 119. — Sulla trasformazione delle funzioni ellitiche. Nota del prof. F. Brioschi. (Continuazione.) p. 125.



Mathematische und physikalische Bibliographie.

XV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

H. Sloman, Leibnitzens Anspruch auf die Erfindung der Differentialrechnung. 4°. geh. Leipzig. 1 Thlr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

A. Beyer, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. I. Theil. A. u. d. T.: Lehrbuch der Elementar-Arithmetik. 1. u. 2. Abschn. gr. 8°. geh. Berlin. 24 Ngr.

R. Nielsen, Philosophie og Mathematik. En propaedeutisk Afhandling. 8°. Schweden. 18 Ngr.

Arithmetik.

M. Bland's sämmtliche algebraische Gleichungen des I. und II. Grades. Nach dem englischen Original bearbeitet von C. Girl. 2. Bd. gr. 8°. geh. Halle. ⅔ Thlr.

H. A. Brettner, Leitfaden beim Unterricht in der Buchstaben-Arithmetik, Algebra und Combinationslehre. 5. Aufl. gr. 8°. geh. Breslau. 20 Ngr.

J. Dienger, Die Differential- und Integralrechnung, umfassend und mit steter Berücksichtigung der Anwendung dargestellt. gr. 8°. geh. Stuttgart. 4 Thlr.

A. Dilling, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der besonderen und allgemeinen Arithmetik, sowie aus der Lehre von den Gleichungen oder Algebra. gr. 8°. geh. Braunschweig. 1 Thlr. 18 Ngr. Dessen Auflösungen und Resultate dazu. gr. 8°. Ebendaselbst. 1 Thlr.

P. Escher, Begründung der wichtigsten Sätze der Arithmetik. gr. 8°. geh. Stuttgart. 10 Ngr.

H. G. Köhler, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 5. revid. Stereotyp-Ausgabe. Lex. 8°. broch. Leipzig. 27 Ngr.

v. Vega, Manuale logaritmico-trigonometrico. 40. Ristampa. Lex. 8°. geh. Berlin. 2 Thlr.

v. Vega, Manuel logarithmique et trigonométrique. 40. Édition. Lex. 8°. geh. Berlin. 2 Thlr.

v. Vega, Logarithmic tables of numbers and trigonometrical functions. Translated from the 40. or Bremiker's edition by W. L. F. Fischer. Lex. 8°. geh. Berlin. 2 Thlr.

Geometrie.

J. Adhémar, Traité de géométrie descriptive (supplément au). Exercices, épures de concours et questions d'examen. Extraits du recueil des exercices et questions diverses. In 8. Atlas in fol. de 30 planches. Paris. 12 fr.

W. Berkhan, Das Problem des Pappus von den Berührungen durch geometrische Oerter aufgelöst und erweitert. gr. 8°. geh. Halle. ⅓ Thlr.

H. Rose, Lehrbuch der Geometrie für technische Lehranstalten und Gymnasien. I. Thl.: die ebene Geometrie. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Nürnberg. 1 Thlr. 12 Ngr.

H. Schaeffer, Lehrbuch der Stereometrie. A. u. d. T.: Snell, Lehrbuch der Geometrie. 3. Bd. geh. gr. 8°. Leipzig. 1 Thlr.

Mechanik.

M. Privat-Deschanel, Mécanique. 1. partie. in 12. avec fig. Paris.

Optik.

J. Petzval, Bericht über optische Untersuchungen. Lex. 8°. geh. Wien. 15 Ngr.

Astronomie.

Handatlas der Erde und des Himmels in 70 Lief. Neu redigirte Ausgabe. 13. 14. Lief. qu. Imp.-Fol. Weimar. à $1/3$ Thlr.

P. A. Hansen, Supplément aux Tables du soleil de M. M. P. A. Hansen et C. F. R. Olufsen. 4°. Schweden. 6 Ngr.

G. A. Jahn, Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels. Neue Ausgabe. 8°. geh. Leipzig. $2/3$ Thlr.

Mathematische und physikalische Geographie nebst Chronologie. I. Thl. Inhalt: A. Wigand's Grundriss der mathematischen Geographie. 4. Aufl. gr. 8°. geh. Halle. 10 Ngr.

Astronomische Nachrichten, begründet durch H. C. Schumacher. 47. Bd. No. 1—3. Herausgegeben von C. A. F. Peters. gr. 4°. Hamburg. Preis für den vollständigen Band 5 Thlr.

Permoschtschikof, Ueber die allmälige Abweichung in der Bewegung der sieben grossen Planeten. (Russisch.) gr. 4°. geh. Petersburg und Leipzig. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

L. Graf Pfeil, Der Einfluss der Kometen und Meteore auf die Entstehung und Entwickelung unserer Erde. Eine Vorlesung. gr. 8°. geh. Berlin. 5 Ngr.

G. H. von Schubert, Lehrbuch der Sternkunde für Schulen und zum Selbstunterrichte. 3. Aufl. 2. Ausg. gr. 8°. geh. Frankfurt a. M. $2/3$ Thlr.

Physik.

M. E. Bary's neue physikalische Probleme. Von F. A. Korschel. gr. 8°. geh. Halle. 1 Thlr. 6 Ngr.

And. v. Baumgartner, Von der Umwandlung der Wärme in Elektricität. Wien. 8°. 4 Ngr. Aus den „Sitzungsberichten 1856 der k. k. Akademie der Wissenschaften.“

Lorin Blodget, Climatology of the United States, and of the Temperate Latitudes of the North American Continent: embracing a full Comparison of these with the Climatology of the Temperate Latitudes of Europa and Asia; with Isothermal and Rain Charts, including a Summary of Meteorological Observations in the United States, condensed from recent scientific and official publications. Royal 8°. Philadelphia u. London. Cloth. 28 s.

J. Böhm, Ueber die Seehöhe von Prag. Wien. 8°. 5 Ngr. Aus den „Sitzungsberichten der k. k. Akad. der Wissenschaften.“

Ami Boué, Parallele der Erdbeben, der Nordlichter und des Erdmagnetismus sammt ihrem Zusammenhang mit der Erdplastik sowohl als mit der Geologie. Wien. 8°. 15 Ngr. Aus den „Sitzungsberichten der k. k. Akademie der Wissenschaften.“

H. A. Brettner, Leitfaden für den Unterricht in der Physik. 14. Aufl. gr. 8°. geh. Breslau. 25 Ngr.

Fleischhauer, Populär-physikalisches Handwörterbuch für Schule und Haus. 42. Lief. broch. gr. 8°. Langensalza. 12 Ngr.

J. G. Galle, Grundzüge der Schlesischen Klimatologie. gr. 4°. geh. Breslau. 2 Thlr.

H. Gerling, Bemerkungen über rundlaufende Stürme oder Cyclonen. 2. Aufl. 8°. Hamburg und Leipzig. cart. 1 Thlr.

F. Grossmann, Führer in der geometrischen Analyse der Krystallographie. Ein Hülfsbuch zu den krystallographischen Werken Naumann's. gr. 8°. geh. Leipzig. ¾ Thlr.

Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin physico-mathématique de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tom. III. 1. Livr. Lex. 8°. geh. Petersburg und Leipzig. 1 Thlr.

J. Meyer, Grundzüge der physikalischen Geographie der Schweiz. 8°. geh. Leipzig. ¼ Thlr.

Ed. Reichardt, Die Theorie der Wärme, ein Versuch zur Erklärung der Erscheinungen von Wärme, Licht und Elektricität. Jena. 8°. 15 Ngr.

W. F. A. Zimmermann, Die Macht der Elemente. 4. Lief. gr. 8°. geh. Leipzig. ¼ Thlr.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. XXIII. Bd. 1. Hft. Wien. 8°. Mit 2 Karten u. 11 Taf. 2 Thlr. 10 Ngr.



Literarischer Bericht
CXVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Leibnitzens Anspruch auf die Erfindung der Differenzialrechnung. H. Sloman, Dr. Leipzig. Druck von B. G. Teubner. 1857. 4°. 1 Thlr.

Dieses erbärmliche wissenschaftliche Product, für dessen Widmung der berühmte Sir David Brewster, „der Biograph Newton's", und Herr J. Edleston Esq. sich hoffentlich höflichst bei dem Verfasser, Herrn Dr. Sloman in Paris, so viel wir wissen, gebürtig aus Hamburg, bedankt haben werden, bezweckt nichts Geringeres, als den grossen Leibnitz als einen Plagiarius an den Pranger zu stellen, und die Ehre der Erfindung der Differentialrechnung lediglich und einzig allein für Newton in Anspruch zu nehmen. Wir ehren jedes wissenschaftliche Streben auf diesem Gebiete der Geschichte unserer Wissenschaft und jede auf demselben sich kund gebende Ansicht. Wenn dieselbe aber in einer solchen Weise dem Publikum vorgeführt wird, wie in der vorliegenden Schrift, empört sich unser Inneres. Es ist uns widerlich, viele Stellen aus derselben zum Beleg des Obigen anzuführen. Aber Einiges müssen wir doch sagen. Was Leibnitz betrifft, so wird derselbe auf fast allen Seiten in der unwürdigsten Weise charakterisirt, so dass es in der That sehr schwer ist, Einzelnheiten hervorzuheben, weshalb wir uns mit der folgenden Stelle (S. 517.) begnügen wollen: „Es passt ganz zu der diplomatischen Feinheit des Advocaten und Staatsrathes Leibnitz, der an den Consul Oldenburg schreibt, dass er diesem nicht plump schreibt, Du weisst, wie wir mit einander stehen, meine Erfindung ist wenig, verschaffe mir heimlich das mehrere, was man bei Euch hat, denn Leibnitz schrieb nicht an einen Spion, **den er mit Geld be-**

stochen hätte, sondern an einen Freund, von dem er nur wollte, dass er ihm als Landsmann ein wenig, ohne zu wissen, dass dies viel sei, dienen sollte." — Von Johann Bernoulli und L'Hopital erdreistet sich Herr Sloman auf S. 81. zu sagen: „Was Leibnitz für die Differentialrechnung that, auch wenn er sie nicht erfand, ist noch unendlich viel mehr, als was Fermat gethan, wie denn überhaupt kein Franzose vor der Mitte des folgenden Jahrhunderts etwas darin leistete, da L'Hospital, der reiche und einflussreiche, nur dem armen Bernoulli gestohlen hat, was er sich zueignete, wozu Bernoulli **deshalb, weil ihm die Lectionen glänzend bezahlt waren,** schwieg." — Hiebei wird einer der würdigsten und verdientesten Veteranen unter den Mathematikern und Physikern der Jetztzeit, der in hohem Greisenalter in Paris noch lebende treffliche J. B. Biot, überall, wo seine bekannten verdienstlichen historischen Arbeiten irgend eine Gelegenheit dazu darzubieten scheinen, in der unwürdigsten Weise im eigentlichen Sinne verhöhnt, indem es z. B. S. 86. heisst: „Man sieht, dass Montucla, wie nur Biot, den man, seitdem er die dreifache Krone der Akademie auf seinem Haupte vereinigt — eine Ehre, die wenig Sterblichen zu Theil wird — doch den grössten Mann Frankreichs nennen muss, nicht thut, u. s. w." und auf S. 72.: „Dass Herr Biot einen solchen Charakter nicht versteht, begreifen wir, doch ist dies nicht Newton's, sondern Biot's Schuld, der weder einen englischen Charakter, wie den Newton's, noch einen deutschen Charakter, wie den Bernoulli's, sondern höchstens einen halbfranzösischen, wie den Leibnitzens, zu lieben im Stande ist *)." Auch sucht Herr Sloman überall die Verdienste französischer Mathematiker herabzusetzen, freilich für Jeden, der die Grösse derselben kennt, ohne Erfolg.

Eben so wie ich werden alle Leser des Archivs von einer solchen Schrift, ganz abgesehen von ihren wissenschaftlichen Resultaten, wenn sie überhaupt solche, gehörig begründet, enthielte, mit Widerwillen sich abwenden. Ich bin der abgesagteste Feind jedes, am meisten jedes wissenschaftlichen Scandals. Wenn aber, wie im vorliegenden Falle, ein Mensch sich erdreistet, den Charakter grosser verstorbener oder lebender Männer in einer solchen Weise darzustellen, wie in vorliegender Schrift geschieht, so halte ich es für meine Pflicht, auch offen darzulegen, wes Geistes Kind ein solcher Mensch ist, und ich stehe daher nicht an, den Lesern des Archivs ganz offen die folgende erbauliche Geschichte zu erzählen, indem ich dies namentlich dem trefflichen, so über-

*) Ganz bestimmt aber nicht einen solchen deutschen Charakter wie den Herrn Sloman's. (S. nachher.)

aus würdigen Biot und meinen wissenschaftlichen Collegen in Frankreich überhaupt unbedingt schuldig zu sein glaube, damit sie erfahren, mit wem sie es hier zu thun haben.

Herr Slomann hat bekanntlich eine Schrift geschrieben, unter dem Titel: „Versuch die Differenzialrechnung auf andere als die bisherige Weise zu begründen. Paris 1856. 8., welche mir, wahrscheinlich auf dem Wege des Buchhandels, ich weiss nicht woher, zur Besprechung in den literarischen Berichten des Archivs zugesandt wurde, die aber unterblieb und auch bis jetzt unterblieben ist, weil ich dieselbe keiner Besprechung werth hielt, worin ich mich vielleicht irren kann. Genug aber, es ist dies meine Ansicht. Hierauf liess mich der Herr Verfasser durch eine dritte Person ersuchen, die Schrift im Archiv zu beurtheilen. Ich erklärte, dass ich dieselbe dazu nicht für geeignet halte, und die Besprechung unterblieb abermals. Nun bekam ich einen Brief des Verfassers aus Paris mit einer Art Antikritik gegen eine in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" erschienene Beurtheilung dieser Schrift, welche Beurtheilung ich weder damals gelesen hatte, noch jetzt gelesen habe. Zugleich ward mir in diesem Briefe eine Art Douceur von 100 Francs geboten, insofern ich die fragliche Antikritik in das Archiv aufnehmen würde. Ja, — man denke sich, was ein Journal-Herausgeber sich bieten lassen muss! — dem Briefe war eine halb durchschnittene Banknote zu 100 Francs beigelegt, ungefähr mit dem Bemerken, dass zu gehöriger Zeit späterhin die dazu passende andere Hälfte eingefordert werden könne. Die fragliche Antikritik gegen die in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erschienene Beurtheilung der oben genannten Schrift ist in das Archiv dessenungeachtet nicht aufgenommen, sondern durch die Post an Herrn Doctor Sloman in Paris mit der halbdurchschnittenen Banknote zu 100 Francs zurückgesandt worden, eine Empfangsbescheinigung derselben aber, wie es eigentlich Pflicht und Schuldigkeit gewesen wäre, bis jetzt nicht eingegangen. Dies ist der einfache Hergang der Sache im Wesentlichen, da ich das Genauere jetzt nicht angeben kann und will, weil ich hier nur aus dem Gedächtnisse geschrieben habe. Jeder bilde sich nun selbst ein Urtheil! „Joh. Bernoulli schwieg **deshalb**, weil ihm die Lectionen gut bezahlt wurden." Mir schien Schweigen bei so bewandten Umständen nicht am Orte zu sein, so wenig ich auch irgend ein eigentliches Unrecht in dem ganzen Verfahren zu erkennen geneigt bin, was ich hier zum Schluss noch ganz ausdrücklich bemerke. Ein Jeder wird und mag sich das Beste denken!! Grunert.

Astronomie.

(Aus der Berliner Vossischen Zeitung.)

„Mannheim den 30. September 1857.

Die hiesige Sternwarte, die im vorigen Jahrhunderte durch des Ex-Jesuiten Maier Beobachtungen und die Schriften der Pfälzer Akademie einen Namen erhalten hatte, war schon seit einiger Zeit in ihrer Existenz bedroht, da Staatsmittel nicht vorgesehen waren, einen Astronomen länger zu unterhalten, geschweige die Instrumente nach dem Stande der Wissenschaft zu ergänzen. Ein junger Astronom, Dr. Nell, welcher mit so geringem Gehalt in den letzten Jahren hier angestellt war, dass er nicht davon leben konnte, hat in den letzten Tagen seine Stellung aufgegeben. Vergeblich war eine Fürbitte Alexanders v. Humboldt für den Fortbestand der Anstalt, die unter Anderm eine sehr beträchtliche Bibliothek besitzt. Nun wurde dieser Tage eine Subscription auf einmalige und Jahresbeiträge zur Besetzung der Stelle eines Astronomen in Umlauf gesetzt, und hat in kurzer Zeit ein so günstiges Ergebniss gehabt, dass eine bescheidene Besoldung jetzt schon gesichert ist. Zu gleichem Behuf hat schon früher ein hiesiger Rentner, H. Scipio, die Stiftung eines Kapitals in Aussicht gestellt, so dass die Erhaltung der Anstalt für unsere Stadt ausser Frage ist.“

Je seltener dergleichen Züge edler Aufopferung für die Wissenschaft, deren sich bis jetzt in grosser Anzahl namentlich nur Amerika rühmen kann, besonders in Deutschland sind: desto mehr verdient eine solche That in den Annalen der Wissenschaft aufbewahrt zu werden, und das „Archiv der Mathematik und Physik“ nimmt daher mit Freude Act von derselben, indem es zugleich den edlen Bürgern Mannheims im Namen der ganzen mathematischen Wissenschaft, hauptsächlich aber ihres schönsten und höchsten Theils, der von keiner anderen Wissenschaft an Grossartigkeit des Objects und der Tiefe der wissenschaftlichen Behandlung übertroffenen und übertreffbaren Astronomie, hier den wärmsten und innigsten Dank abstattet. In Cincinnati bauete der unermüdliche Mitchell bloss durch Unterstützung dortiger Bürger eine prachtvolle Sternwarte *), und das nicht minder prachtvolle Dudley-Observatorium in Albany, dem jetzt der treffliche

*) M. s. eine ausführliche Relation im Archiv. Thl. XXV. S. 119.

Gould als Director vorsteht, das nach Charles E. Dudley, von dem in der unten angeführten interessanten Schrift S. 9. gesagt wird: „C. E. Dudley was a man whose sterling merits would have ensured a high place among the first citizens of Greece or Rome, in the virtuous age of either republic, when integrity and patriotism were the only passport to popular eminence", **hauptsächlich** aber nach Mrs. **Blandina Dudley** benannt ist, verdankt seine ganze Entstehung gleich hochherzigen Gesinnungen. In der Schrift: „Inauguration of the Dudley Observatory, at Albany, August 28, 1856. Albany 1856." heisst es S. 21.: „Three gentlemen, Messrs. Thomas W. Olcott, Wm. H. De Witt and Ezra P. Prentice, immediately contributed D. 1000*) each, and Mr. De Witt subsequently increased his subscription to D. 1500. Genl. Stephen Van Rensselaer contributed several acres of valuable land as an appropriate site for the building. After this Mrs. Blandina Dudley — a name now known to you all as synonymous with munificence and patriotism, subsribed the sum of D. 12000 in token of her respect for the memory of a devoted husband; and in the act of incorporation, the Institution received by vote of the Trustees, as a testimony of their gratitude, the name of Dudley Observatory"; ferner heisst es S. 30.: „Knowing the splendid triumphs of German and French mechanic art, knowing the exalted reputation that most worthily adorns Repsold's name — the trustees of the Dudley-Observatory have yet confided the construction of this exquisitely delicate instrument to our countryman, and the great Dudley Heliometer (for which Mrs. Dudley, who had so munificently raised he D. 6000 to D. 8000, has now raised the D. 8000 to D. 14500), is to be built by our countryman Spencer, here in this city of Albany." Und endlich schliesst ein Brief der Mrs. Blandina Dudley mit folgenden Worten:

„Albany, August 14, 1856.

To the Trustees of the Dudley Observatory:

For the attainment of an object so rich in Scientific rewards and Nationaly glory, guarantied by men with reputations as exalted and enduring as the skies upon which they are written, contributions should be general, and not confined to an individual or a place.

For myself, I offer as my share of the required endowment,

*) D. bedeutet Dollar, da das eigentliche Zeichen dafür nicht in der Druckerei war.

the sum of D. 50000, in addition to the advances which I have already made, and trusting that the name which you have given to the Observatory may not be considered as an undeserved compliment, and that it will not diminish the public regards, by giving to the Institution a seemingly individual character.

I remain, Gentlemen,

Your obedient servent

BLANDINA DUDLEY."

Das ist die That einer amerikanischen Dame!

Ganz in gleichem Sinne aber handelten jene Mannheimer Bürger; denn auf das Mehr oder Minder der Gabe kommt es hier nicht an; nur die Gesinnung adelt die That. Freue dich Deutschland, noch solche Bürger zu besitzen!

Das Mannheimer Observatorium, an welchem ausser dem oben genannten verdienten Ex-Jesuiten Maier auch Nicolai und eine längere Reihe von Jahren selbst der berühmte Schumacher eine kurze Zeit wirkten, verdiente aber auch die Erhaltung. In einem 111 Fuss hohen thurmartigen viereckigen Gebäude mit vier Stockwerken eingerichtet, gleicht es sehr der alten Sternwarte in Berlin, und genügt freilich den Ansprüchen der Wissenschaft nicht mehr; es hat aber immer verdienstliche Arbeiten geliefert, die man am besten aus Zach's monatlicher Correspondenz kennen lernt, und schon manche alte Sternwarte ist wieder so hergerichtet worden, dass sie brauchbare Arbeiten liefern konnte, was ja bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft schon mit Instrumenten von kleineren Dimensionen möglich ist. Sie ist im Jahre 1772 mit einem Kostenaufwande von 70000 Gulden im Westen der Stadt in einem der das Schloss umgebenden Gärten erbaut, und die Mauern, vorzüglich die Fundamente, sind von sehr beträchtlicher Dicke. Die Treppe steigt in einem elliptisch geformten Treppenhause von 12¼ Fuss Breite empor. Der Beobachtungssaal für die grösseren Instrumente befindet, oder befand sich wenigstens sonst, in der zweiten Etage. Die Anzahl der Instrumente war wenigstens früher eine sehr grosse. Der erste Director war der schon oben genannte Ex-Jesuit Christian Maier, welcher vorher in Schwetzingen beobachtet hatte, im Jahre 1783 starb und den 1780 gestorbenen J. Metzger zum Gehülfen hatte. Ihm folgten in der Direction Ch. König von 1784 bis 1786, J. N. Fischer von 1786 bis 1787, dann P. Ungeschick, welcher starb, bevor er das Observatorium bezogen hatte. Im Jahre 1788

übernahm Roger Barry die Direction, welcher während der Kriege, die auf die Revolution folgten, sich zur Einstellung der Beobachtungen genöthigt sah. Im April wurde ihm zwar sein Gehalt als Astronom wieder ausgezahlt, ihm aber zugleich die Besorgung von Licht, Heitzung, Correspondenz und andere Ausgaben, welche sonst vom Gouvernement bestritten zu werden pflegen, aufgebürdet. Ihm folgte Schumacher und dann Nicolai, nach dessen Tode die Sternwarte wohl viele Jahre verwaist gewesen ist, bis dann endlich Herr Nell eingesetzt wurde, der nun aber, wie wir zu unserm grössten Leidwesen hören, jetzt auch genöthigt ist, sein Amt aufzugeben.

Möge es, wozu ein so ruhmvoller, in Deutschland bisher noch nicht vorgekommener Anfang gemacht worden ist, gelingen, diesen Tempel der höchsten, edelsten und schönsten der Wissenschaften zu erhalten! Grunert.

Physik.

M. E. Bary's neue physikalische Probleme. Für die oberen Klassen höherer Lehranstalten, Gymnasien, Realschulen, so wie für Studirende und Lehrer der Mathematik und Physik. Von Dr. F. A. Korschel, ordentlichem Lehrer an der Realschule zu Burg. Mit 3 Kupfertafeln. Halle. Schmidt. 1857. 8. 1 Thlr. 6 Sgr.

Herr Korschel hat sich jedenfalls durch die als solche nichts zu wünschen übrig lassende Uebersetzung dieser ausgezeichneten Sammlung physikalischer Probleme um unsere höheren Lehranstalten ein Verdienst erworben, und dieselbe wird, neben den anderen bereits vorhandenen Aufgaben-Sammlungen dieser Art, namentlich dem ausgezeichneten Buche von Fliedner (2te Aufl. Literar. Ber. Nr. CXII. S. 6.), gewiss zur Förderung des physikalischen Unterrichts beitragen. Zur näheren Charakterisirung der empfehlenswerthen Schrift bemerken wir Folgendes. Dass die Sammlung hauptsächlich ein mathematisches Gepräge an sich tragen würde, verstand sich bei der Schrift eines französischen Autors auf diesem Gebiete ganz von selbst; denn in Frankreich weiss man längst, dass der physikalische Unterricht auf höheren Lehranstalten durchaus mathematisch ertheilt werden muss, wenn er seinen Zweck nicht verfehlen soll. Ja Herr Bary ist in diesem Buche sogar so weit gegangen, dass er wenigstens im ersten Theile die physikalischen Aufgaben nach den verschiedenen **mathematischen** Methoden geordnet hat, mittelst welcher sie am zweckmässigsten gelöst werden; und dies

sind keineswegs die den Gebieten der Mechanik angehörenden Aufgaben, bei denen die mathematische Lösung sich ganz von selbst versteht, und die eben deshalb in den zweiten Theil verwiesen, nicht nach dem obigen Princip, sondern mit richtigem Takte nach der Verschiedenartigkeit der Materien geordnet worden sind, sondern recht eigentlich dem Gebiete der Physik als solcher angehörende Probleme. Durch die obige Ordnung der Aufgaben des ersten Theils ist zugleich auch deutlich ausgesprochen, wie sehr man in Frankreich dem sehr richtigen Princip huldigt, dass der physikalische Unterricht auf höheren Lehranstalten in seiner Rückwirkung hauptsächlich mit zur Förderung und Belebung des mathematischen Unterrichts benutzt werden müsse: alles Ansichten, die auch von uns stets lebhaft im Archiv vertreten worden sind. Die folgende Inhaltsanzeige wird von der Reichhaltigkeit des Buchs Zeugniss ablegen. **Erster Theil.** Kap. I. *Beispiele von Problemen, die sich ohne Hülfe der Mathematik lösen lassen.* Dichtigkeit fester Körper. Kälte durch Ausdehnung der Gase. Spannungen eines Dampfes im Vacuum und in der Luft zu vergleichen. Durch Experiment ein Strohhalm-Electrometer zu graduiren. An gegebenen Punkten eines Stahlstabes alternative Pole von möglichst grosser Kraft hervorzubringen. Eine Guitarre ohne Hülfe des Gehörs zu stimmen. Alle Saiten einer Guitarre klingen zu machen, indem man eine anschlägt. Ohne Hülfe des Gehörs das Intervall zweier Töne auszumitteln. Kap. II. *Beispiele von physikalischen Problemen, die durch die Arithmetik gelöst werden.* Dichtigkeit eines für Flüssigkeit durchdringbaren Körpers. Atmosphärendruck. Vergleichung zweier Luftwägungen unter verschiedenen Umständen. Numerische Bestimmung der Schwingungen des $\bar{c}$. Warum klingt die tiefste Saite der Guitarre, wenn man die beiden höchsten anschlägt. Kap. III. *Beispiele, die durch Geometrie gelöst werden.* Optische Täuschungen bei einer Bewegung. Achromatisches Spiegelprisma. Stabiles und labiles Gleichgewicht. Kap. IV. *Beispiele durch Algebra gelöst.* Luftballon. Mariotte'sches Gesetz. Fehler der Näherungswerthe für lineare Ausdehnung. Berechnung der Grenze der Ladung einer leydener Flasche durch einen Electrophor. Geschwindigkeit der Abkühlung im luftleeren Raume. Kap. V. *Beispiele durch Trigonometrie gelöst.* Electrische Kräfte durch ein gewöhnliches Electroscop zu messen. Bedingung, dass ein Spiegelprisma achromatisch sei. Elementare Berechnung des Minimums der Abweichung eines Lichtstrahls, der durch ein Prisma geht. Berechnung der Grenze des Verhältnisses zwischen dem Zuwachs des Einfallswinkels und dem des Brechungswinkels. Bestimmung der Näherung anderer optischer Näherungsausdrücke.

Bemerkung über Pentecaustiken. Bestimmung des Kantenwinkels eines Prisma, damit die Zerstreuung des weissen Lichts einem gegebenen Winkel gleich sei. Kap. VI. *Beispiele, durch geometrische Oerter gelöst.* Ort der conjugirten Brennpunkte einer leuchtenden Geraden in Bezug auf einen reflectirenden Kreisbogen. Innere Oberfläche eines um eine Axe sich drehenden Gefässes, an dessen Oberfläche ein schweres Molekel in jedem Punkte ruhet. Maximum der Standfläche eines Menschen. Minimum der Lichtmenge auf der Verbindungslinie zweier leuchtender Punkte. Kap. VII. *Beispiele, durch empirische Formeln gelöst.* Vergleichung des Luft- und Quecksilberthermometers. Relation zwischen den Spannkräften des Wasserdampfes über 100° C. und den Temperaturen am Luftthermometer. Relation zwischen den cubischen Ausdehnungen des Glases und den Temperaturen. Temperatur, bei welcher Glas und Platin gleiche Ausdehnung zeigen. Variation der specifischen Wärme des Eisens mit der Temperatur. Neue Modificationen der pyrometrischen Methode der Eintauchung. Empirische Gesetze der Abkühlung. Kap. VIII. *Beispiele von Lösungen durch die Infinitesimalrechnung.* Variation der Dichtigkeit des Wassers in der Nähe ihres Maximums. Maximum der Temperatur und Differenz zweier sich abkühlender Körper. Abkühlungsgeschwindigkeit im leeren Raume ohne Hülfe der Reihen zu berechnen. Trajectorie des Mittelpunkts einer Kugel, die auf einer Horizontalen gleitet, während diese sich um eine Vertikale dreht. Natur einer brechenden Fläche, damit alle gebrochenen, von einem Punkte ausgehenden Strahlen parallel sind, oder damit sie sich in demselben Punkte der Axe schneiden. **Zweiter Theil.** Kap. I. *Statik.* Wägungen. Schwerpunkt. Andere statische Aufgaben. Kap. II. *Dynamik.* Vertikaler Fall. Fall auf der schiefen Ebene. Einfaches Pendel. Schwungkraft. Ausflussparabeln. Stoss elastischer Körper. Kap. III. *Hydrostatik und Aerostatik.* Archimedisches Princip. Aräometer. Gaswägen. Saugpumpe. Cartesianische Taucher. Heber. Mariotte'sche Versuche. Luftpumpe. Kap. IV. *Wärmelehre.* Scheinbare Ausdehnung der Flüssigkeiten in Gefässen. Lufttemperatur in Verbindung mit Manometer-Beobachtungen. Wiegen im Wasser, mit Rücksicht auf Temperatur-Veränderungen. Bestimmungen einer empirischen Formel. Dampfelasticität. Specifische Wärme. Kap. V. *Optik.* Sphärische Spiegel. Durchgang der Strahlen durch Glas mit parallelen Flächen. Ebener Glasspiegel mit Amalgambelegung. Plan-concaver auf der convexen Seite amalgamirter Spiegel.

Möge diese ausführliche Inhaltsanzeige das lebhafte Interesse bethätigen, welches wir an diesem verdienstlichen Schulbuche nehmen.

Wir schliessen mit den zwei folgenden Bemerkungen rücksichtlich einer gewiss bald nöthig werdenden zweiten Auflage, namentlich in Bezug auf deutsche höhere Lehranstalten.

Zuerst rathen wir dringend an, den Abschnitt, welcher Aufgaben enthält, von denen die Anwendung der Infinitesimalrechnung in Anspruch genommen wird, ganz wegzulassen. Denn nach unserer Ansicht soll und darf ein Schulbuch durchaus nur Dinge enthalten, welche ganz im Bereich des Schulunterrichts liegen und von den Schülern völlig verstanden und begriffen werden können. Aber etwa die Anfangsgründe der höheren Analysis mit in den Schulunterricht aufnehmen zu wollen, namentlich auf den Realschulen, wie manche Lehrer in übertriebenem Amtseifer meinen, ist eine so sehr verfehlte Ansicht, dass wir in der That nicht begreifen können, wie ein wahrer Kenner der betreffenden Wissenschaft und der Einrichtung und des Standpunktes unserer Schulen nur dazu kommen kann. Die höhere Analysis erfordert Abstractionen, die, so höchst einfach sie freilich an sich sind, doch nicht für den Schüler einer Realschule passen, der ausserdem auch überhaupt viel zu viel und zu mannigfaltige Dinge zu lernen hat und lernen soll, als dass er sich noch mit einigem Erfolg in die höhere Analysis vertiefen könnte und dazu Lust haben sollte. Oder man müsste denn etwa die Differentialrechnung in der höchst oberflächlichen, der deutschen Literatur keineswegs zur Ehre gereichenden Weise lehren wollen, wie man sie in nicht wenigen unserer Elementarbücher findet, — die eben deshalb das Archiv in seinen literarischen Berichten stets ganz mit Stillschweigen übergangen hat, — und durch einen derartigen Unterricht auf das mathematische Studium auf solchen Universitäten vorzubereiten, die in der That höchst verdienstliche und löbliche Absicht haben, auf denen, wie es — horribile dictu — allerdings noch vorkommen soll, den Vorträgen immer noch der sogenannte kleine Lacroix *) zu Grunde gelegt wird, in welchem das „en défaut Sein" der Taylor'schen Reihe und andere höchst erbauliche Dinge noch eine so wahrhaft diabolische Rolle spielen. Nicht für solche, aber für wirkliche Universitäten und höhere technische Lehranstalten gehört allein der „strenge" Unterricht in der höheren Analysis. Jeder nicht völlig strenge Unterricht ist aber im höchsten Grade verderblich, und zwar am allermeisten auf einer Schule, wo gerade die höchste Strenge das Haupterforderniss alles Unterrichts ist. Und wie niederdrückend ist es — in welcher Beziehung uns sprechende

---

*) Der zu seiner Zeit ganz verdienstliche Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral.

Beispiele zur Seite stehen — für junge Studirende der Mathematik auf Universitäten, wenn solchen an sich oft recht tüchtigen jungen Leuten, die auf der Schule schon etwas ganz Vages von Differentialrechnung, unendlichen Reihen u. s. w. gehört haben, fast in jeder Vorlesung gesagt und gezeigt werden muss: „in Allem, was Ihr früher von diesen Dingen gehört habt, ist in der Weise, wie man es Euch beigebracht hat, z. B. schon in dem sogenannten allgemeinen binomischen Lehrsatze, sehr viel Widerspruch enthalten, und Ihr kommt dadurch, wenn Ihr es nicht anders anfangt, in Gefahr, zu den widersprechendsten Resultaten geführt zu werden!!“ Also nie wieder ein Wort von der Aufnahme der Elemente der höheren Analysis, so einfach diese Dinge in der That auch an sich sind*), in den Schulunterricht irgend einer Art!! was sich auch die den Schulen vorgesetzten oberen Behörden gesagt lassen sein mögen, damit sie nicht durch Gerede, wie das Obige, zu der Sache schädlichen Schritten verleitet werden. Wie viel verständigere Ansichten hat man über den angeregten Gegenstand selbst auf nicht wenigen höheren technischen Lehranstalten! Z. B. auf der preussischen Bau-Akademie in Berlin wird im ersten Cursus selbst die Mechanik zwar, wie sich von selbst versteht, in völlig strenger, aber ganz elementarer Weise, principiell ohne alle Einmischung des sogenannten höheren Calculs, gelehrt, dessen Anwendung erst in späteren Cursen folgt. Von wie viel richtigerem Takte und von wie verständigerer Würdigung des Wesens des betreffenden Lehrobjects und seiner praktischen Bedeutung zeugt dies, als jener allzugrosse Eifer der ihren von uns in seiner hohen Bedeutung sonst so bereitwillig und lebhaft anerkannten Standpunkt in der angeregten Beziehung ganz verkennenden Realschulen. Wir wiederholen also, dass wir aus diesem Grunde wünschen, dass aus dem vorliegenden verdienstlichen Buche künftig der die Infinitesimalrechnung in Anspruch nehmende Abschnitt, insofern es ein wahres Schulbuch sein und werden soll, ganz weggelassen, höchstens als Anhang mit kleiner Schrift gedruckt beigefügt werde.

Eine zweiten Wunsch wird der kenntnissreiche Herr Uebersetzer uns gewiss aus alter, von uns selbst aus Herzensgrunde vollständig erwiderter Anhänglichkeit um so lieber zu gewähren geneigt sein, weil wir ihn ja unter unsere Schüler zählen zu dürfen uns zur Ehre anrechnen. Aufgaben aus dem eigentlichen Gebiet der Maschinenlehre, wenn wir auch nur die sogenannten ein-

---

*) Aber freilich auch eben so sehr abstract.

fachen und die unmittelbar an dieselben sich anschliessenden Maschinen, wie Flaschen- und Rollenzug, Räderwerk, die verschiedenen Arten der Schnellwaage, die grosse und kleine Brückenwaage, u. s. w. u. s. w. in's Auge fassen, kommen leider in dem vorliegenden Buche so gut wie gar nicht vor. Da wir und, wie wir wissen, viele verdiente Lehrer mit uns, gerade auch solche Aufgaben gern in den Kreis des Realschul-Unterrichts gezogen sehen: so wünschen wir sehr, dass der Herr Uebersetzer einen besonderen derartigen Abschnitt selbstständig beifüge, was Ihm ein Leichtes, den betreffenden Lehranstalten aber gewiss sehr erwünscht und der Verbreitung des Buchs förderlich sein wird.

Grunert.

Vermischte Schriften.

Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Von Dr. Rudolf Wolf, Professor zu Zürich. Zweite ganz umgearbeitete und sehr erweiterte, mit zahlreichen Tabellen und fünf Figurentafeln ausgestattete Auflage. Bern. Haller. 1856. 8.

Das empfehlende Urtheil, welches wir im Literar. Bericht Nr. LXXII. S. 909. über die erste Ausgabe dieses hübschen mathematischen Taschenbuchs ausgesprochen haben, ist durch die so eben erschienene zweite Auflage bestätigt worden. Diese neue Auflage ist mit Recht als eine sehr erweiterte und vervollständigte auf dem Titel bezeichnet worden. Denn wenn auch im Ganzen, bei vielfacher Berücksichtigung der neueren Fortschritte der Wissenschaft, der Inhalt im Allgemeinen derselbe geblieben ist, so haben doch, wie wir am Schlusse unserer Anzeige der ersten Auflage wünschten, nun auch die Anfangsgründe der höheren Mathematik einige Berücksichtigung gefunden, und vieles andere Neue, namentlich auch mehrere recht zweckmässig eingerichtete Tabellen, ist hinzugekommen, auch sind die nöthigsten Figuren, welche in der ersten Auflage ganz fehlten, beigefügt. Endlich erleichtert auch ein sehr genaues Inhaltsverzeichniss den Gebrauch sehr. Uns auf unsere Anzeige der ersten Auflage im Uebrigen beziehend, empfehlen wir diese neue Auflage im Verhältniss zu jener in erhöhetem Maasse recht sehr, und wünschen dem anspruchslosen, aber in seiner Art nützlichen Büchlein vielfache Verbreitung.



Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (Siehe Literar. Ber. Nr. CX. S. 7.)

Jahrgang 1856. Band XXII. Heft 1. Boué: Chronologischer Katalog der Nordlichter bis zum Jahre 1856, sammt einer Bibliographie über diese Erscheinung. S. 3. — Pless und Pierre: Beiträge zur Kenntniss des Ozons und des Ozongehalts der atmosphärischen Luft. S. 211. — Zantedeschi: Risultamenti ottenuti da un Giroscopio. S. 251. Di alcuni nuovi esperimenti, co'quali si è creduto di comprovare la non simultanea esistenza di due correnti opposte sul medesimo filo conduttore. S. 256. — Zantedeschi e Borlinetto: Dei limiti di impressionabilità delle sostanze fotografiche; dell' influenza delle superficie nei fenomeni fotogenici; della loro chimica natura; dei miglioramenti apportati all' arte eliografica. S. 261. — v. Sonklar: Ein Condensations-Hygrometer. S. 271.

Jahrgang 1856. Band XXII. Heft 2. Knochenhauer: Ueber die Theilung des elektrischen Stromes. S. 327. — Derselbe: Ueber den Strom der Nebenbatterie. S. 331. — Boué: Parallele der Erdbeben, der Nordlichter und des Erdmagnetismus, sammt ihrem Zusammenhang mit der Erdplastik sowohl als mit der Geologie. S. 395. — v. Baumgartner: Von der Umwandlung der Wärme in Elektricität. (Sehr interessant.) S. 513.

Jahrgang 1856. Band XXII. Heft 3. Böhm: Ueber die Seehöhe von Prag. (Herr Professor Böhm in Prag hat mit grossem Fleisse und vieler Mühe vorzüglich die Nivellements der verschiedenen Eisenbahnen benutzt, um die Seehöhe von Prag zu bestimmen. Diese Arbeit ist nicht bloss interessant wegen der wichtigen, durch sie erhaltenen Resultate, sondern auch weil sie zeigt, wie genau im Ganzen genommen die Nivellements sind, die dem Bau der verschiedenen Eisenbahnen zu Grunde gelegt sind. Die Resultate seiner mühsamen Arbeit sind folgende.

Sternwarte Prags:

1) 105,15 Wiener Klafter über der See bei Cuxhaven.
2) 107,67 „ „ „ „ „ „ Swinemünde.
3) 105,53 „ „ „ „ „ „ „
4) 106,46 „ „ „ „ „ „ „
5) 106,63 „ „ „ „ „ „ „
6) 104,72 „ „ „ dem baltischen Meere.
7) 102,92 „ „ „ „ adriatischen „
8) 103,17 „ „ „ „ „ „
9) 104,80 „ „ „ „ „ „

Die ersten drei Höhen stützen sich ganz auf geometrische Nivellements; sie geben im Mittel:

106,12 Wiener Klafter.

Die drei folgenden Höhen stützen sich theils auf geometrische, theils auf trigonometrische, jedoch von einander unabhängige Operationen, die sämmtlich von demselben Meere ausgehen; sie geben im Mittel:

105,94 Wiener Klafter.

Die letzten drei Höhen beruhen der Hauptsache nach auf den Messungen des k. k. österreichischen Generalstabes; sie geben im Mittel:

103,63 Wiener Klafter.

Aehnliche Ermittelungen scheinen sehr wünschenswerth zu sein, und Herrn Professor Böhm's verdienstliche Arbeit liefert ein gutes Muster für dieselben.) — v. Littrow legt eine Karte des Mondgebirgs Kopernikus von Herrn Director P. A. Secchi vor. S. 692. — Oeltzen: Resultate aus der Vergleichung des Sternkatalogs von Fedorenko mit andern Quellen. S. 701.

Jahrgang 1857. Band XXIII. Heft 1. Zantedeschi: Apparato per la communicazione del moto. (Con 1 tavola). S. 5. — Zantedeschi e Berlinetto: Sull influenza del vuoto e di alcuni gaz ne' fenomeni chimici, che presentano i joduri d'argento esposti alla luce Solare. Memoria V^{a}. S. 7. — Benedikt: Ueber die Aenderungen des Magnetismus unter dem Einflusse elektrischer Vertheilung. S. 148. — Boué: Ueber die geometrische Regelmässigkeit des Erdballes im Allgemeinen; insbesondere über diejenige seiner Wasserrinnen und die Abtheilung dieser in symmetrische Gruppen. S. 255. — v. Littrow: Mittheilung eines Schreibens des Herrn P. A. Secchi, Directors der Sternwarte am Collegio Romano. S. 275. — Freih. v. Baumgartner: Ueber Gewitter überhaupt, Hagelwetter insbesondere. S. 277. (Sehr beachtenswerth und interessant.) — Pohl und Weselsky: Studien aus dem Gebiete der Megatypie. S. 317.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. (S. Literar. Ber. Nr. CXV. S. 8.)

Aprile 1857. Sulla teorica delle coordinate curvilinee e sul luogo de' centri di curvatura d'una superficie qualunque. Memoria del prof. Delfino Codazzi. p. 129. Eine sehr beachtenswerthe Abhandlung, in deren erstem Theile der Herr Verfasser auf be-



merkenswerth kurze Weise zu dem von Lamé in seiner bekannten Abhandlung über den betreffenden Gegenstand (Journal de Liouville. T. V. p. 313. Mémoire sur les coordinates curvilignes) gefundenen Ausdrücken gelangt, in dem zweiten Theile aber — Alles in eigenthümlicher Weise — eine von Bordoni gefundene merkwürdige Eigenschaft eines Systems paralleler Flächen und allgemeine Formeln zur Bestimmung des Orts der Mittelpunkte der Curvatur einer jeden beliebigen Fläche entwickelt, und dieselben auf einen schon von Monge behandelten besonderen Fall anwendet. Da uns die Abhandlung noch nicht vollständig vorliegt, müssen wir uns mit dieser oberflächlichen Anzeige begnügen, machen aber unsere Leser auf dieselbe besonders aufmerksam.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 360—384. Vergl. Literar. Bericht Nr. CV. S. 12.

C. Brunner II., zweijährige Beobachtungen über die Temperatur des Wassers von Ziehbrunnen. Nr. 364. S. 33.

Aus dem Fremdenbuche des Hotel du Monte Rosa in Zermatt. Nr. 364. S. 37. Enthält verschiedene magnetische Beobachtungen.

R. Wolf, neue Beobachtungen über den Ozongehalt der atmosphärischen Luft. Nr. 367 und 368. S. 57. — Enthält viele verdienstliche Beobachtungen mit Anschluss allgemeinerer Bemerkungen.

M. Hipp, über den elektrischen Webstuhl. Nr. 370—374. S. 81. — Ein recht interessanter Aufsatz in physikalischer und technischer Rücksicht.

Wenn auch eigentlich nicht hierher gehörend, aber seines allgemeinen interessanten Inhalts wegen, führen wir auch an:

Guthnik, Vegetation in Algier. Nr. 370—374. S. 101.

J. Koch, meteorologische Beobachtungen im Winter 1855/56 und im Frühjahr 1856. Nr. 375—376. S. 120.

Perty, einige Bemerkungen über Fernröhre. Nr. 377—378. S. 137. — Zur allgemeinen praktischen Beurtheilung der Güte der Fernröhre recht beachtenswerth.

R. Wolf, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Phy-

sik in der Schweiz. Nr. 379—384. S. 153. — Betreffen diesmal bloss den Bergmann Franz Samuel Wild von Bern, der aber auch lebhaftes Interesse für Mathematik hatte.

Druckfehler.

Literar. Ber. Nr. CXV. S. 3. Z. 6. v. u. statt „fit" setze man „fil".



